

جمهورية العراق  
وزارة التربية  
المديرية العامة للمناهج



# الرياضيات

للفيف الخامس الأدي

## تأليف

د. عبد علي حمودي الطائي

د. مهدي صادق عباس د. طارق شعبان رجب الحديشي

محمد عبد الغفور الجواهري حسام علي حيدر

صبحاح علي مراد سعد محمد حسين البغدادي

نظير حسن علي

١٤٤٧هـ - ٢٠٢٥م

الطبعة الخامسة عشرة

المشرف العلمي على الطبع

م.م. مروة فليح حسن

المشرف الفني على الطبع

تيسير عبد الإله إبراهيم



التصميم: شياء عبد السادة كاطع

منهاجي

متعة التعليم الهادف



المديرية العامة للمناهج  
قسم التحضير الطباعي

الموقع والصفحة الرسمية للمديرية العامة للمناهج

[www.manahj.edu.iq](http://www.manahj.edu.iq)

[manahjb@yahoo.com](mailto:manahjb@yahoo.com)

[Info@manahj.edu.iq](mailto:Info@manahj.edu.iq)



[manahjb](https://www.facebook.com/manahjb)

[manahj](https://www.youtube.com/channel/UCmanahj)

استناداً إلى القانون يوزع مجاناً ويمنع بيعه وتداوله في الاسواق

# بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## مقدمة

تعنى وزارة التربية بإعادة النظر في الكتاب المدرسي من حين إلى آخر وتعديله حيناً آخر واستبداله حيناً آخر وفق ما تقرره لجان مختصة تؤلف لهذا الغرض . وتلقى كتب الرياضيات نصيبها الوافي من هذه العناية .

وهذا الكتاب الثاني من سلسلة كتب الرياضيات للمرحلة الإعدادية للفرع الأدبي ، وقد رتبنا هذا الكتاب بأربعة فصول ، يبدأ الفصل الأول بموضوع اللوغاريتمات ، والفصل الثاني ندرس فيه موضوع المتتابعات ، أما الفصل الثالث فيتناول موضوع المصفوفات والمحددات ، وينتهي الكتاب بموضوع الإحصاء .

لقد تم وضع هذا الكتاب وفقاً للمنهج الدراسي المقرر وحاولنا إن نستخدم الطرائق التربوية الحديثة فقمنا بهذا المجهود واضعين نصب أعيننا شرح كل مادة من موادها شرحاً يقربها من الافهام وتوخينا الإكثار من التمارين العملية التي يصادفها الطالب في حياته العملية ، ومتدرجة من السهل إلى الصعب .

وختاماً نرجو إن نكون قد وفقنا إلى خدمة أبنائنا الطلبة ، ونرجو من إخواننا المدرسين أن يوافونا بملاحظاتهم حول هذا الكتاب لكي نتلافى النقص فيه والكمال لله وحده .

المؤلفون

# المحتويات

## الفصل الأول : اللوغاريتمات

7	.....	نبذة مختصرة عن اللوغاريتمات	
9	.....	الدالة الأسية	[1-1]
11	.....	الدالة اللوغاريتمية	[1-2]
12	.....	خواص الدالة اللوغاريتمية	[1-3]
15	.....	اللوغاريتمات العشرية	[1-4]
16	.....	اللوغاريتمات الطبيعية	[1-5]
19	.....	استخدام الآلة الحاسبة	[1-6]

## الفصل الثاني : المتابعات

27	.....	مقدمة	[2-1]
32	.....	التمثيل البياني للمتابعة	[2-2]
36	.....	المتابعات الحسابية (العقدية)	[2-3]
42	.....	الايوساط الحسابية	[2-3-1]
43	.....	مجموع حدود المتابعة الحسابية	[2-3-2]
49	.....	المتابعات الهندسية	[2-4]
53	.....	الايوساط الهندسية	[2-4-1]
54	.....	مجموع عدد معين من حدود متتابعة هندسية	[2-4-2]
58	.....	المتابعات الهندسية في موضوع القيمة الحالية وجملة الدفعة السنوية	[2-4-3]
59	.....	القيمة الحالية	[2-4-4]

# المحتويات

## الفصل الثالث : المصفوفات والمحددات

67	.....	مقدمة	[3-1]
68	.....	المصفوفات وخواصها	[3-2]
70	.....	رتبة المصفوفة	[3-3]
74	.....	انواع المصفوفات	[3-4]
75	.....	جمع المصفوفات	[3-5]
77	.....	نظير المصفوفة بالنسبة لعملية الجمع	[3-6]
79	.....	خواص عملية الجمع على المصفوفات	[3-7]
81	.....	ضرب المصفوفة بعدد حقيقي	[3-8]
83	.....	بعض الخواص لعملية ضرب عدد في مصفوفة	[3-8-1]
85	.....	المحددات وخواصها	[3-9]
87	.....	المعادلات الآنية	[3-10]
91	.....	محددات المصفوفة المربعة $3 \times 3$	[3-11]
		إستخدام المحددات في حل ثلاث معادلات آنياً من الدرجة الأولى	[3-12]
95	.....	بثلاث متغيرات وتسمى طريقة كرامر	

# المحتويات

## الفصل الرابع : الإحصاء

102	.....	مقدمة	[4-1]
103	.....	مقاييس التشتت	[4-2]
103	.....	الإنحراف المعياري	[4-2-1]
107	.....	الارتباط	[4-3]
107	.....	الارتباط الخطي	[4-3-1]
108	.....	معامل الارتباط	[4-4]
108	.....	معامل الارتباط الخطي البسيط	[4-4-1]
108	.....	معامل الارتباط بيرسون	[4-4-2]
115	.....	معامل ارتباط سيرمان (الرتبي)	[4-4-3]
120	.....	الإنحدار	[4-5]

# الفصل الاول CHAPTER 1

## اللوغاريتمات

### نبذة مختصرة عن اللوغاريتمات

اكتشفت اللوغاريتمات في اوائل القرن السابع عشر ، لاهميتها في تبسيط الحسابات المعقدة للعلوم الطبيعية والهندسية . واللوغاريتمات اساسية في الحسابات التجارية والفكرة القائمة عليها اللوغاريتمات هي تحويل الاعداد على شكل أس والتعامل معها عوضاً عن الاعداد الاصلية .

وفيما يلي بعض استخدامات اللوغاريتمات :-

○ استخدامه في قياس قوة الزلزال على مقياس ريختر .

○ يصف الرقم الهيدروجيني للمادة (pH) درجة حموضة المادة والتي تحسب باستخدام اللوغاريتمات للاساس

$$10 \text{ حيث الرقم الهيدروجيني } (H^+) = -\text{Log}$$

$H^+$  تركيز ايون الهيدروجين في المادة

○ يستخدم في قياس شدة الصوت (L) بالديسيبل حيث

$$L = 10 \text{ Log } \frac{a}{a_0} \text{ حيث } a \text{ : شدة الصوت}$$

$a_0$  : اقل شدة للصوت تستطيع اذن انسان عادي ان تميزه

○ حساب سرعة الصواريخ (V) حيث

$$V = -0.0098 N + v_0 \text{ Ln } (R)$$

N : زمن اشتعال وقود المحرك

$v_0$  : سرعة انطلاق البخار

R : نسبة كتلة الصاروخ محمل بالوقود الى كتلته بدون وقود

Ln : اللوغاريتم الطبيعي



○ في الاحصاء يستخدم في :

حساب الفائدة المركبة المستمرة  $a$  حيث

$$a = M e^{R \times N}$$

$M$  : المبلغ المستثمر

$R$  : الفائدة

$N$  : عدد السنوات

○ حساب الوسط الهندسي

$$\text{Geometric Mean} = \sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \dots \cdot X_n}$$

في البنود اللاحقة سندرس اللوغاريتمات العشرية والطبيعية.

البيئة بيتنا الكبير ... فلنعمل على جعلها صحياً ونظيفاً.



## الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية Exponential and Logarithmic Functions

### تواصل الموضوع

لقد تعرفنا فيما سبق على الدالة الحقيقية والان سندرس انواع اخرى من الدوال مثل الدالة الاسية والدالة اللوغاريتمية

### Exponential Function

### [ 1 - 1 ] الدالة الأسية

لناخذ الدالة الحقيقية  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$  المعرفة بالقاعدة  $f(x) = 2^x$

الجدول ( 1 - 1 ) يعطينا بعض الأزواج المرتبة لبيان الدالة  $f$

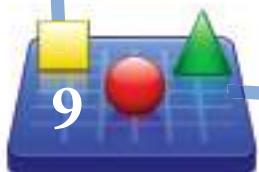
x	3	2	1	0	-1	-2	-3
f(x)	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

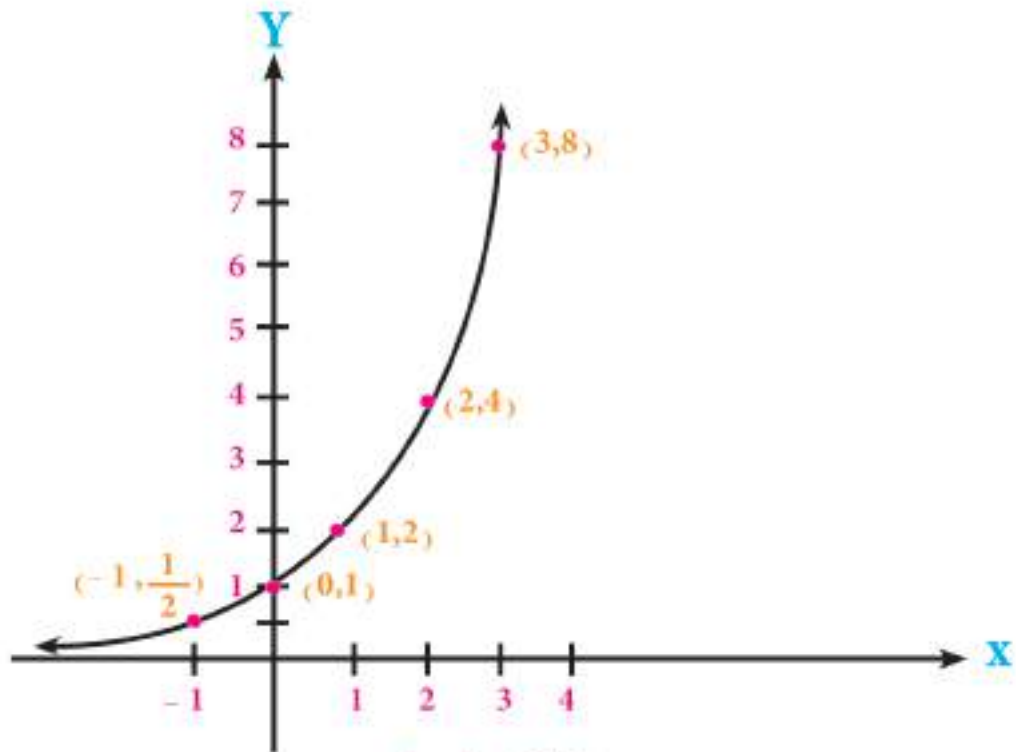
الجدول ( 1 - 1 )

ان كل زوج مرتب  $(x, 2^x)$  يعين نقطة في المخطط البياني للدالة  $f$ . ويتمثيل الأزواج المرتبة في المستوي

الاحداثي نحصل على الشكل ( 1 - 1 ) الذي يمثل جزءاً من التمثيل البياني للدالة

$$f(x) = 2^x$$





الشكل (1 - 1)

من هذا الشكل يمكننا تحديد قيمة تقريبية للدالة  $f(x) = 2^x$  عند أي قيمة معلومة للمتغير  $x$ ، وبالعكس.

فمثلاً: عندما  $x = 1.4$  فمن الشكل نجد ان  $2^{1.4} \approx 2.7$  تقريباً

وإذا كان  $2^x = 6.2$  فمن الشكل نجد ان  $x \approx 2.65$  تقريباً

ان مثل هذه الدالة تسمى دالة أسية وتعرف كما يلي:

### تعريف (1 - 1)

إذا كان  $a > 0$  ،  $a \neq 1$  فان الدالة:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ حيث } f(x) = a^x, \forall x \in \mathbb{R}$$

حيث  $f(x) = a^x$  تسمى الدالة الأسية للاساس  $a$

سنقبل بأن الدالة الأسية تقابل.

ملاحظة

إذا كان  $a = 1$  فان  $f(x) = 1^x = 1$  دالة ثابتة وهذا ما جعلنا نقول  $a \neq 1$

## تواصل الموضوع

لقد درسنا سابقاً الدالة الأسية  $f(x) = a^x$  حيث  $f: \mathbb{R} \implies \mathbb{R}^+$  وبما أن لكل دالة تقابل دالة عكسية فإن للدالة الأسية دالة عكسية  $f^{-1}$  . وهي دالة تقابل

$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \implies \mathbb{R}$$

فمجالها  $\mathbb{R}^+$  هو المجال المقابل للدالة الأسية ، ومجالها المقابل  $\mathbb{R}$  هو مجال Domain الدالة الأسية والتي هي تقابل ايضاً والتي تسمى بالدالة اللوغاريتمية .

## تعريف ( 1 - 2 )

يرمز للدالة العكسية للدالة  $y = a^x$

بالرمز  $x = \text{Log}_a y$  ونقول ان  $x$  هو لوغاريتم  $y$  للاساس  $a$  ويمكننا ان نكتب العلاقة الآتية

$$x = \text{Log}_a y \implies y = a^x$$

حيث  $x \in \mathbb{R}$  ,  $y \in \mathbb{R}^+$

## مثال 1

اكتب  $125 = 5^3$  بالصورة اللوغاريتمية .

الحل

$125 = 5^3$  يكافئ  $y = a^x$  صورة أسية

$$\text{Log}_5 125 = 3 \text{ يكافئ } x = \text{Log}_a y$$

## مثال 2

اكتب  $\text{Log}_2 32 = 5$  بالصورة الأسية

الحل

$\text{Log}_2 32 = 5$  يكافئ  $\text{Log}_a y = x$  صورة لوغاريتمية

$y = a^x$  يكافئ  $32 = 2^5$  صورة أسية

اكتب الصورة المكافئة لكل مما يأتي :

تدريب

$$\text{Log}_{10} 10000 = 4 , 7^3 = 343 , \text{Log}_5 1/25 = -2 , (0.01)^2 = 0.0001$$



### [ 3 - 1 ] خواص الدالة اللوغاريتمية

من خواص الدالة اللوغاريتمية ما يلي :

(a) لكل عدد حقيقي موجب لوغاريتم، وليس للأعداد الحقيقية السالبة والصفر لوغاريتمات حقيقية.

(b) بما ان الدالة اللوغاريتمية تقابل فان :

$$x = y \implies \text{Log}_a x = \text{Log}_a y, x, y \in \mathbb{R}^+$$

(c) لما كان  $a > 0, a \neq 1$  فلكل  $x, y \in \mathbb{R}^+$  سنقبل القواعد الآتية بدون برهان :

$$\text{Log}_a xy = \text{Log}_a x + \text{Log}_a y \quad (1)$$

$$\text{Log}_a \frac{x}{y} = \text{Log}_a x - \text{Log}_a y \quad (2)$$

$$\text{Log}_a x^n = n \text{Log}_a x \quad (3) \text{ حيث } n \in \mathbb{R}$$

$$\text{Log}_a a = 1 \quad (4)$$

$$\text{Log}_a 1 = 0 \quad (5)$$

مثال 3

$$\text{Log}_2 \left( \frac{17}{5} \right) - \text{Log}_2 \left( \frac{34}{45} \right) + 2 \text{Log}_2 \left( \frac{2}{3} \right) = 1 \text{ أثبت ان}$$

الحل

$$\text{الطرف الايسر: } \text{Log}_2 \left( \frac{17}{5} \right) - \text{Log}_2 \left( \frac{34}{45} \right) + \text{Log}_2 \left( \frac{2^2}{3^2} \right) =$$

$$\text{Log}_2 \frac{17}{5} \times \frac{45}{34} \times \frac{4}{9} =$$

$$\text{Log}_2 2 =$$

$$1 = \text{الطرف الايمن}$$

(و.ه.م)

مثال 4

جد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(a)  $\text{Log}_3 x = 4$

(b)  $\text{Log}_x 64 = 6$

(c)  $\text{Log}_5 \frac{1}{125} = x$

الحل

(a)  $\text{Log}_3 x = 4 \implies x = 3^4 \implies x = 81$

$\therefore S = \{81\}$

(b)  $\text{Log}_x 64 = 6 \implies 64 = x^6 \implies 2^6 = x^6 \implies x = \sqrt[6]{2^6}$

$\therefore x = 2 \in \mathbb{R}^+$

$\therefore S = \{2\}$

(c)  $\text{Log}_5 \frac{1}{125} = x \implies \frac{1}{125} = 5^x \implies 5^{-3} = 5^x$

$\therefore x = -3$

$\therefore S = \{-3\}$



## تمارين [ 1- 1 ]

س1 / فيما يلي علاقات غير صحيحة دائماً، مثلاً اعط  $x = a$  ،  $y = a$  وبين ذلك .

(a)  $\text{Log}_a (x + y) \neq \text{Log}_a x + \text{Log}_a y$

(b)  $\text{Log}_a (x - y) \neq \frac{\text{Log}_a x}{\text{Log}_a y}$

(c)  $\text{Log}_a xy \neq \text{Log}_a x \text{Log}_a y$

(d)  $\text{Log}_a x^2 \neq (\text{Log}_a x)^2$

س2 / جد قيمة x :

(a)  $\text{Log}_{10} 0.001 = x$

(b)  $\text{Log}_x \frac{1}{8} = -3$

(c)  $\text{Log}_{10} x = 5$

س3 / جد قيمة ما يأتي :

(a)  $\text{Log}_{10} \left(\frac{40}{9}\right) + 4 \text{Log}_{10} 5 + 2 \text{Log}_{10} 6$

(b)  $2 \text{Log}_{10} 8 + \text{Log}_{10} 125 - 3 \text{Log}_{10} 200$

(c)  $\text{Log}_a (x^2 - 1) - 2 \text{Log}_a (x - 1) + \text{Log}_a \frac{(x-1)}{(x+1)}$

(d)  $\text{Log}_2 8 - \text{Log}_3 27 - \text{Log}_5 625$

س4 / اذا كانت  $\text{Log}_{10} 2 = 0.3010$  ،  $\text{Log}_{10} 3 = 0.4771$  جد قيمة :

(a)  $\text{Log}_{10} 0.002$

(b)  $\text{Log}_{10} 3000$

(c)  $\text{Log}_{10} 12$

س5 / حل المعادلات الآتية :

(a)  $\text{Log}_3 (2x-1) + \text{Log}_3 (x+4) = \text{Log}_3 5$

(b)  $\text{Log}_2 (3x+5) - \text{Log}_2 (x-5) = 3$



## تواصل الموضوع

سبق وان درسنا اللوغاريتم لاي اساس  $a > 0$  ،  $a \neq 1$

والان سنتعرف على لوغاريتم اساسه  $a = 10$  . يسمى اللوغاريتم العشري ( اللوغاريتم الاعتيادي ) . وقد

اتفق على عدم كتابة الاساس ( 10 ) حين استعماله . حيث يكتب بشكل  $\text{Log } y$

فمثلاً :  $\text{Log}_{10} 7$  يكتب بشكل  $\text{Log} 7$  وكذلك  $\text{Log}_{10} 0.05$  يكتب بشكل  $\text{Log } 0.05$  ومن المفيد هنا

ان نذكر بعض اللوغاريتمات للقوى الصحيحة للعدد 10 معتمدين على :  $\text{Log } 10^n = n$

n	← -	-3	-2	-1	0	1	2	3	→ +
$\text{Log} 10^n$	....	-3	-2	-1	0	1	2	3	....

فمثلاً :  $\text{Log } 10^7 = 7$  ،  $\text{Log } 10^4 = 4$  ، ....

.....  $\text{Log } 0.01 = \text{Log } 10^{-2} = -2$  ،  $\text{Log } 0.00001 = \text{Log } 10^{-5} = -5$

## تواصل الموضوع

تعرفت على اللوغاريتمات العشرية حيث كان الاساس  $a = 10$   
والان سنتعرف على اللوغاريتمات التي اساسها  $a = e \approx 2.71828$   
والتي تسمى باللوغاريتمات الطبيعية والتي تكتب بشكل

$$\ln y \text{ حيث } e = a \approx 2.71828$$

اذا وضعنا ،  $a = e$  في تعريف ( 2 - 1 ) فنحصل على

$$x = \ln y \iff y = e^x$$

## ملاحظة

للاطلاع

$$e = 2.718281828459045$$

ويمكن ايجادها بالعلاقة

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} + 1 \right)^n \quad \text{or} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$

$$\ln(e^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

البرهان

$$\begin{aligned} \ln e^x &= x \ln e \\ &= x \times 1 \\ &= x \end{aligned}$$

جد قيمة  $x$  اذا علمت ان

$$e^{2x-1} = 8$$

الحل نأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

$$\ln e^{2x-1} = \ln 8 \quad \text{وحسب النتيجة (1)}$$

$$\therefore 2x - 1 = \ln 8$$

$$2x - 1 + \ln 8$$

$$\therefore x = \frac{1 + \ln 8}{2}$$

(تبديل الاساس)

$$\forall a > 0, a \neq 1$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

أو يمكن أن يكتب بالشكل :

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

## البرهان

الطرف الايسر

$$y = \text{Log}_a x \iff x = a^y \dots\dots\dots (1) \text{ نفرض}$$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفي للعلاقة (1)

$$\ln x = \ln a^y$$

$$\ln x = y \ln a$$

$$\text{الطرف الأيمن } y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

وبنفس الطريقة وبأخذ اللوغاريتم العشري لطرفي العلاقة (1) نستنتج إن :  $\text{Log}_a x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } a}$

## مثال 2

$$\frac{1}{\text{Log}_3 15} + \frac{1}{\text{Log}_5 15} \text{ ما قيمة}$$

الحل

$$\implies \frac{1}{\frac{\ln 15}{\ln 3}} + \frac{1}{\frac{\ln 15}{\ln 5}}$$

$$\implies \frac{\ln 3}{\ln 15} + \frac{\ln 5}{\ln 15}$$

$$\implies \frac{(\ln 3 + \ln 5)}{\ln 15}$$

$$\implies \frac{\ln 15}{\ln 15} = 1$$

باستخدام نتيجة (2)

تواصل الموضوع

بعد دراستنا للوغاريتمات الطبيعية والعشرية وبعض قوانين اللوغاريتمات ، الان سندرس كيفية استخدام الحاسبة Calculator لايجاد لوغاريتم عدد ولوغاريتمات الاعداد المقابلة وكتطبيق كما درسناه سابقاً .



اولاً: ايجاد لوغاريتم العدد

(1) في حالة اللوغاريتمات العشرية : (Log)

○ نكتب العدد المراد إيجاد لوغاريتمه ثم نضغط على المفتاح Log فيظهر الناتج .

مثال 1

جد :

(a) Log 7 ، (b) Log 13 ، (c) Log 0.08 ، (d) Log 1.5

الحل

(a) نكتب 7 ثم نضغط على Log فيكون الناتج 0.84509804

$$\text{Log } 7 = 0.84509804$$

(b) نكتب العدد 13 ثم نضغط Log فيكون الناتج 1.11394335

(c) نكتب العدد 0.08 ثم نضغط Log فيكون الناتج -1.096910013

(d) نكتب العدد 1.5 ثم نضغط Log فيكون الناتج 0.176091259



(2) في حالة اللوغاريتمات الطبيعية: ( $\ln$ )

نكتب العدد المراد إيجاد لوغاريتمه ثم نضغط على المفتاح  $\ln$  فيظهر الناتج

مثال 2

جد

- (a)  $\ln 7$
- (b)  $\ln 13$
- (c)  $\ln 0.08$
- (d)  $\ln 1.5$

الحل

- (a) نكتب العدد 7 ثم نضغط على  $\ln$  فيكون الناتج 1.94510149
- (b) نكتب العدد 13 ثم نضغط على  $\ln$  فيكون الناتج 2.564949357
- (c) نكتب العدد 0.08 ثم نضغط على  $\ln$  فيكون الناتج - 2.525728644
- (d) نكتب العدد 1.5 ثم نضغط على  $\ln$  فيكون الناتج 0.405465108



ثانياً : إيجاد العدد المقابل اذا علم لوغاريتمهُ

(1) في حالة اللوغاريتمات العشرية :

نكتب لوغاريتم العدد (المعطى) ونضغط على مفتاح 2ndF ويكون مفاير للاسود (اصفر ، ازرق ... ) ثم نضغط على مفتاح Log فيظهر العدد المطلوب .

مثال 3

جد الاعداد المقابلة للاعداد التي لوغاريتماتها العشرية هي :

(a) 0.84509804

(b) 1.113943352

(c) - 1.096910013

(d) 0.176091259

الحل

(a) نكتب 0.84509804 ثم نضغط على 2nd F ثم نضغط على مفتاح Log فيظهر 7

(b) نكتب 1.113943352 ثم نضغط على 2ndF ثم نضغط على مفتاح Log فيظهر

$$13 = 12.99999999$$

(c) نضغط مفتاح  $-$  نكتب 1.096910013 ثم نضغط  $=$  فيظهر -1.096910013

ثم نضغط 2nd F ثم Log فيظهر 0.08

(d) نكتب 0.176091259 نضغط على 2nd F ثم Log فيظهر 1.5

ملاحظة

(قارن نتائج مثال (1) مع هذا المثال)

(2) في حالة اللوغاريتمات الطبيعية (ln)

○ نكتب لوغاريتم العدد (المعطى) ونضغط على مفتاح 2ndF ثم نضغط على مفتاح ln فيظهر العدد المطلوب.

مثال 4

جد الاعداد المقابلة للاعداد التي لوغاريتماتها الطبيعية هي :

- (a) 1.945910149
- (b) 2.564949357
- (c) - 2.525728644
- (d) 0.405465108

الحل

- (a) نكتب 1.945910149 ثم نضغط 2ndF ثم مفتاح ln فيظهر 7
- (b) نكتب 2.564949357 ثم نضغط 2ndF ثم مفتاح ln فيظهر  $13 \approx 12.99999999$
- (c) نضغط  نكتب 2.525728644 ثم  فيظهر - 2.525728644
- ثم نضغط 2ndF ثم ln فيظهر 0.08
- (d) نكتب 0.405465108 نضغط 2ndF ثم ln فيظهر 1.5



امثلة تطبيقية على قواعد اللوغاريتمات (استخدم آلتك الحاسبة)

مثال 1

جد قيمة  $\text{Log}_8 5$

الحل

بتبديل الاساسات الى اساس 10 يكون (نتيجة 2)

$$\text{Log}_8 5 = \frac{\text{Log } 5}{\text{Log } 8} = \frac{0.69897}{0.90309} \approx 0.77397$$

مثال 2

جد قيمة  $\ln 3 + \text{Log } 3$

الحل

$$\text{Log } 3 = 0.4771$$

$$\ln 3 = 1.0986$$

$$\therefore \ln 3 + \text{Log } 3$$

$$= 1.0986 + 0.4771$$

$$= 1.5757$$

مثال 3

جد قيمة  $\text{Log}_5 14 - \text{Log}_5 7$

الحل

$$\text{Log}_5 14 - \text{Log}_5 7$$

$$\text{Log}_5 \frac{14}{7}$$

وباستخدام تبديل الاساس 2

$$\frac{\text{Log } 2}{\text{Log } 5} = \frac{0.3010}{0.6989} \approx 0.4307$$

مثال 4

$$x = \sqrt[3]{(65.26)^2} \text{ جد قيمة}$$

الحل

$$x = (65.26)^{2/3}$$

$$\text{Log } x = \frac{2}{3} \text{Log } 65.26 \text{ باستخدام الآلة الحاسبة}$$

$$\text{Log } x = \frac{2}{3} \times 1.8147$$

$$\text{Log } x = 1.2098$$

$$x \approx 16.2106$$

مثال 5

$$7^{3x} = 81 \text{ حل المعادلة}$$

الحل

$$7^{3x} = 81$$

نأخذ  $\text{Log}_7$  للطرفين

$$\text{Log}_7 7^{3x} = \text{Log}_7 81 \implies 3x \text{Log}_7 7 = \frac{\text{Log } 81}{\text{Log } 7}$$

$$3x = \frac{\text{Log } 81}{\text{Log } 7} \text{ باستخدام الآلة الحاسبة}$$

$$3x = \frac{1.9085}{0.8451}$$

$$3x \approx 2.2583$$

$$x \approx 0.7528$$

$$S = \{0.7528\}$$



## مثال 6

بفرض أنك تستثمر (2) مليون دينار بفائدة مركبة سنوية مستمرة قدرها 5.5% . اوجد جملة ما ستحصل عليه بعد (5) سنوات .

الحل

قانون حساب الفائدة المركبة المستمرة هو  $a = M e^{R \times N}$

حيث M: المبلغ ، R : الفائدة ، N: عدد السنوات

$$a = 2000000 \times e^{\frac{55}{1000} \times 5}$$

ياخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين  $a = 2000000 e^{0.275}$

$$\ln a = \ln 2000000 + 0.275 \ln e$$

$$\ln a = 14.78365774$$

$$a \approx 2633061$$

## مثال 7

جد الوسط الهندسي للأعداد : 105 ، 93 ، 110 ، 120 ، 99 .

$$\sqrt[n]{X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots \times X_n} = \text{Geometric mean } \text{الوسط الهندسي}$$

$$\sqrt[5]{105 \times 93 \times 110 \times 120 \times 99} = \text{الوسط الهندسي}$$

$$\text{Log (الوسط الحسابي)} = \frac{1}{5} [ (\text{Log } 99 + \text{Log } 120 + \text{Log } 110 + \text{Log } 93 + \text{Log } 105 ) ]$$

$$= \frac{1}{5} (10.105881 )$$

$$= 2.021176$$

باستخدام الآلة الحاسبة لإيجاد العدد المقابل نجد ان

$$104.996851 = \text{الوسط الهندسي}$$



## تمارين [ 1 - 2 ]

(استخدم آلتك الحاسبة)

س1 / جد قيمة كل من :  $\text{Log}_{10} 8$  ،  $\text{Log}_5 11$  ،  $\ln 20$

س2 / جد قيمة كل مما يأتي :

(a)  $2 \text{Log}_4 58 - \text{Log}_7 21$

(b)  $\text{Log}_6 26 + \text{Log} 26 + \ln 26$

س3 / جد قيمة كل مما يأتي :

(a)  $\sqrt[4]{0.0562}$  (b)  $(11.023)^9$

س4 / حل كلا مما يأتي :

(a)  $2^x = 25$  (b)  $e^{2x+1} = 10$

س5 / باستخدام قانون الفائدة المركبة  $a = M e^{R \times N}$  لاستثمار مليون دينار بفائدة قدرها % 3.5 ولمدة (3) سنوات . جد جملة ما ستحصل عليه .

س6 / جد الوسط الهندسي للأعداد : 4 ، 82 ، 90 ، 89 ، 71 ، 60 ، 88 ، 96 ، 84 ، 93

س7 / اثبت ان :

(a)  $\frac{1}{\text{Log}_a a b c} + \frac{1}{\text{Log}_b a b c} + \frac{1}{\text{Log}_c a b c} = 1$

(b)  $\text{Log} 40/9 + 2(2\text{Log} 5 + \text{Log} 6) = 5$

س8 / اي مقدار (مقادير) يكافئ المقدار  $3\text{Log} a + \text{Log} b$  ؟

(a)  $\text{Log} (ab)^3$

(b)  $\text{Log} a^3 b$

(c)  $\text{Log} a^3 \times \text{Log} b$

(d)  $\text{Log} a^3 + \text{Log} b$

س9 / اختر الاجابة الصحيحة اذا علمت ان  $\text{Log} a \times b$  هي :

(a)  $\text{Log} a \times \text{Log} b$

(b)  $\text{Log} a + \text{Log} b$

(c)  $\text{Log} (a + b)$

(d) ليس اي منها



## الفصل الثاني CHAPTER 2

### Sequences

### المتتابعات

#### [ 2-1 ] مقدمة

لقد درسنا كثيراً من المفاهيم (المعلومات) في السنوات السابقة في مادة الرياضيات ولكن ما يهمننا استذكاره في هذا الفصل ما يأتي:

- 1 (مجموعة الأعداد الصحيحة (Integers) الموجبة  $Z^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  التي هي نفسها مجموعة الأعداد الطبيعية عدا الصفر (Natural)  $N^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  .
- 2 معنى الدالة (Function) وتمثيل بعض أنواع الدوال
- 3 تكون الدالة معلومة متى ما كان كل من قاعدة اقترانها ومجالها (Domain) ومجالها المقابل (codomain) معلوماً .
- 4 تسمى الدالة عددية إذا كان كل من مجالها ومجالها المقابل مجموعات جزئية غير خالية من مجموعة الأعداد الحقيقية «R» Real Numbers .

في هذا الفصل سندرس دوالاً من شكل خاص يكون مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة  $Z^+$  [ أو نفس المعنى مجموعة الأعداد الطبيعية عدا الصفر  $N^+$  ] ومجالها المقابل أي مجموعة غير خالية .

## تعريف (2-1)

كل دالة مجالها المجموعة  $Z^+$  [ او  $N^+$  ] او مجموعة جزئية من  $Z^+$  بالشكل  $\{1,2,3,\dots,n\}$  حيث  $n$  عدد طبيعي {صحيح} موجب معين ومجالها المقابل مجموعة جزئية غير خالية تسمى متتابعة «sequense» .  
في هذا الفصل سنركز اهتمامنا على دراسة المتتابعات التي يكون مجالها المقابل مجموعات جزئية غير خالية من «R» .

بما إن جميع المتتابعات مجالها المجموعة  $Z^+$  او مجموعة جزئية غير خالية فيها بالفعل  $\{1,2,3,\dots,n\}$  سوف نهمل ذكر المجال ونكتفي بذكر قاعدة الاقتران فقط .



$\forall n \in Z^+$ [ او نقول $\forall n \in N^+$ ] وأن	$U(n) = 2n - 5$
يسمى الحد الاول للمتتابعة ويرمز له $U_1$	$U(1) = 2 \times 1 - 5 = -3$
يسمى الحد الثاني للمتتابعة ويرمز له $U_2$	$U(2) = 2 \times 2 - 5 = -1$
يسمى الحد الثالث للمتتابعة ويرمز له $U_3$	$U(3) = 2 \times 3 - 5 = 1$
يسمى الحد الرابع للمتتابعة ويرمز له $U_4$	$U(4) = 2 \times 4 - 5 = 3$
يسمى الحد الخامس للمتتابعة ويرمز له $U_5$	$U(5) = 2 \times 5 - 5 = 5$
يسمى الحد السادس للمتتابعة ويرمز له $U_6$	$U(6) = 2 \times 6 - 5 = 7$

وهكذا  $U(n) = 2n - 5$  يسمى الحد النوني (الحد  $n$ ) للمتتابعة ويرمز له بالرمز  $Un$  وعليه فإن

$$U = \{(1, -3), (2, -1), (3, 1), (4, 3), (5, 5), \dots, (n, 2n - 5), \dots\}$$

او تكتب بالشكل

$$U = \{(n, 2n - 5) : \forall n \in Z^+\}$$

ولكن كما ذكرنا اننا سوف نهمل ذكر المجال فلذلك يمكن أن نهمل مجموعة المساقط الاولى ونكتفي

بكتابة مجموعة المساقط الثانية

$$U_1, U_2, U_3, U_4, \dots, U_n, \dots$$



ولتمييزها عن المجموعات سنكتب حدود المتتابعة بين قوسين من الشكل « < > » فنكتب المثال السابق كما يأتي :

$$\langle U_n \rangle = \langle U_1, U_2, U_3, U_4, \dots, U_n, \dots \rangle$$

او بالشكل

$$\langle -3, -1, 1, 3, \dots, 2n-5, \dots \rangle$$



اكتب الحدود الستة الاولى لكل من المتتابعات الآتية ثم اكتب المتتابعة بالشكل اعلاه (كما في المثال السابق)

1)  $\langle U_n \rangle = \langle n^2 \rangle$

$U_1 = 1^1 = 1$  الحد الاول

$U_2 = 2^2 = 4$  الحد الثاني

$U_3 = 3^2 = 9$  الحد الثالث

$U_4 = 4^2 = 16$  الحد الرابع

$U_5 = 5^2 = 25$  الحد الخامس

$U_6 = 6^2 = 36$  الحد السادس

$$\langle U_n \rangle = \langle U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, \dots, U_n, \dots \rangle$$

$$= \langle 1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots \rangle$$

2)  $\langle H_n \rangle = \langle \frac{1}{n} \rangle$

$$H_1 = 1$$

$$H_2 = \frac{1}{2}$$

$$H_3 = \frac{1}{3}$$

$$H_4 = \frac{1}{4}$$

$$H_5 = \frac{1}{5}$$

$$H_6 = \frac{1}{6}$$

$$\langle H_n \rangle = \langle H_1, H_2, H_3, H_4, \dots, H_n, \dots \rangle$$

$$= \langle 1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots, 1/n, \dots \rangle$$

$$3) \langle U_n \rangle = 2n + (-1)^n$$

$$U_1 = 2 \times 1 + (-1)^1 = 2 - 1 = 1$$

$$U_2 = 2 \times 2 + (-1)^2 = 4 + 1 = 5$$

$$U_3 = 2 \times 3 + (-1)^3 = 6 - 1 = 5$$

$$U_4 = 2 \times 4 + (-1)^4 = 8 + 1 = 9$$

$$U_5 = 2 \times 5 + (-1)^5 = 10 - 1 = 9$$

$$U_6 = 2 \times 6 + (-1)^6 = 12 + 1 = 13$$

$$\langle U_n \rangle = \langle U_1, U_2, U_3, \dots, 2n + (-1)^n, \dots \rangle$$

$$= \langle 1, 5, 5, 9, 9, \dots, 2n + (-1)^n, \dots \rangle$$

$$4) U_1 = 1, U_{n+1} = (n+1) \cdot U_n$$

$$U_1 = 1$$

$$U_2 = 2U_1 = 2 \times 1 = 2$$

$$U_3 = 3U_2 = 3 \times 2 = 6$$

$$U_4 = 4U_3 = 4 \times 6 = 24$$

$$U_5 = 5U_4 = 5 \times 24 = 120$$

$$U_6 = 6U_5 = 6 \times 120 = 720$$

$$\langle U_n \rangle = \langle U_1, U_2, U_3, \dots, (U_1 = 1, U_{n+1} = (n+1) \cdot U_n), \dots \rangle$$

$$= \langle 1, 2, 6, 24, \dots, (U_1 = 1, U_{n+1} = (n+1) \cdot U_n), \dots \rangle$$

ملاحظة (١) □

نلاحظ ان المتتابعة  $\langle U_n \rangle = \langle 2, 4, 6, 8, 10, 12 \rangle$  تختلف عن المتتابعة  $\langle H_n \rangle = \langle 4, 2, 6, 8, 10, 12 \rangle$

وهذا يعني ان  $[H_2 \neq U_2]$  اي ان  $U_2 = 4, H_2 = 2$  وكذلك  $[H_1 \neq U_1]$  اي ان  $U_1 = 2, H_1 = 4$

ترتيب حدود المتتابعة مهم ويؤثر في تغيير المتتابعة اي أن الترتيب يعتبر من الخواص المميزة للمتتابعات .



## ملاحظة ( ٢ )

لاحظ الامثلة الآتية

$$1) \langle Un \rangle = \langle n^2 - n \rangle$$

$$U_1 = 1^2 - 1 = 0$$

$$U_2 = 2^2 - 2 = 2$$

$$U_3 = 3^2 - 3 = 6$$

$$U_4 = 4^2 - 4 = 12$$

تعلمنا ان  $U_1$  يسمى الحد الاول للمتتابعة،  $U_2$  حدها الثاني، ... وان  $Un = n^2 - n$  يسمى الحد  $n$  (النوني) للمتتابعة ويسمى ايضاً بحدها العام (General Term) اي انه في هذا المثال :  
(الحد النوني) = الحد العام =  $Un = n^2 - n$

$$2) \langle Hn \rangle = \langle 2^{n-1} \rangle$$

$$H_1 = 2^{1-1} = 2^0 = 1, \quad H_2 = 2^{2-1} = 2$$

$$H_3 = 2^{3-1} = 2^2 = 4 \dots$$

والحد العام للمتتابعة هو  $Hn = 2^{n-1}$

## ملاحظة ( ٣ )

المتتابعة التي يكون مجالها مجموعة جزئية غير خالية من  $\langle Z^+ \rangle$  وبالشكل  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  مرتبة تصاعدياً ابتداءً بالعدد (1) الى العدد المعين (n) تسمى متتابعة منتهية (Finite Sequence) اما التي مجالها  $\langle Z^+ \rangle$  تسمى متتابعة غير منتهية (Infinite Sequence).



$$1) U : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \longrightarrow R$$

معرفة كما يأتي  $Un = 2n - 9$

تكتب بذكر حدودها بالشكل

$$\langle Un \rangle = \langle -7, -5, -3, -1, 1, 3 \rangle$$

$$= \langle U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6 \rangle$$

حيث حدها الاول  $U_1 = -7$  وحدها الاخير  $U_6 = 3$  وعدد حدودها  $n = 6$

2)  $H : \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \longrightarrow R$

$H_n = \frac{n+1}{n}$  معرفة كما يأتي

$$H_1 = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$H_2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$H_3 = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$H_4 = \frac{4+1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$H_5 = \frac{5+1}{5} = \frac{6}{5}$$

$$H_6 = \frac{6+1}{6} = \frac{7}{6}$$

$$H_7 = \frac{7+1}{7} = \frac{8}{7}$$

$$H_8 = \frac{8+1}{8} = \frac{9}{8}$$

$$H_9 = \frac{9+1}{9} = \frac{10}{9}$$

$$H_{10} = \frac{10+1}{10} = \frac{11}{10}$$

$\langle H_n \rangle = \langle H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7, H_8, H_9, H_{10} \rangle$

$= \langle 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{11}{10} \rangle$

$H_1 = 2$  حدها الاول

$H_{10} = \frac{11}{10}$  حدها الاخير

$n = 10$  عدد حدودها

## [ 2 - 2 ] التمثيل البياني للمتتابعة :

بما ان المتتابعات موضوع دراستنا هي دوال عددية مجالها أما  $Z^+$  او مجموعة بالشكل  $\{1,2,3,4, \dots, n\}$  بشرط أن  $(n)$  عدداً صحيحاً موجباً معين وإنه يمكن تمثيل المتتابعات باشكال بيانية وكما موضح في الامثلة الآتية :



مثل الاشكال البيانية لكل من المتتابعات الاتية:

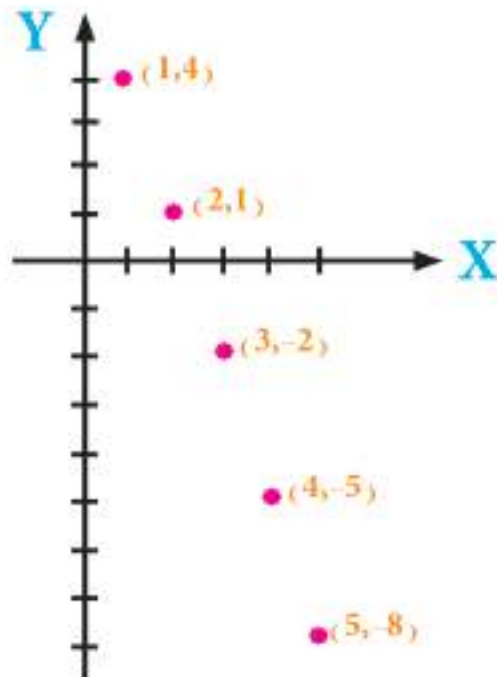
$$1) \langle U_n \rangle = \langle 7 - 3n \rangle$$

لتمثيل المتتابعة بيانيا نكتب عدداً معقولاً من حدودها ابتداءً من الحد الاول ثم نرسم محوري الاحداثيات [محور السينات  $x - axis$  ومحور الصادات  $y - axis$ ] ونعين المجال على محور السينات ونعتبر المجال المقابل  $\mathbb{R}$  [اذا لم يذكره] والذي يعين على محور الصادات فنقول:

$$U_1 = 4, U_2 = 1, U_3 = -2, U_4 = -5, U_5 = -8$$

ونعين النقط

$$(1, 4), (2, 1), (3, -2), (4, -5), (5, -8)$$

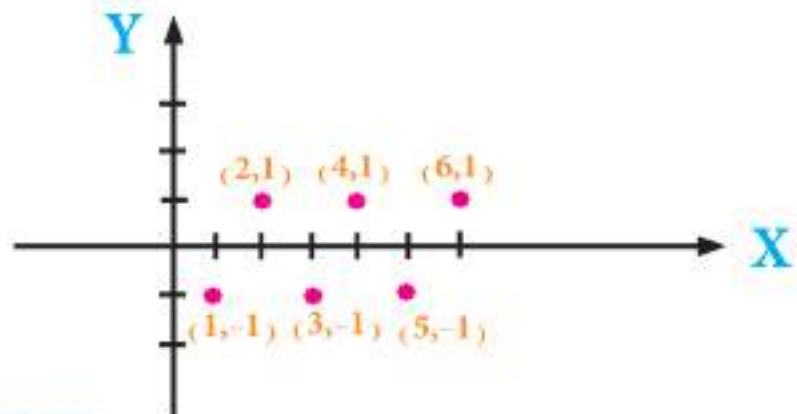


$$2) \langle H_n \rangle = \langle (-1)^n \rangle$$

$$H_1 = -1, H_2 = 1, H_3 = -1, H_4 = 1, H_5 = -1, H_6 = 1$$

ونعين النقط

$$(1, -1), (2, 1), (3, -1), (4, 1), (5, -1), (6, 1)$$



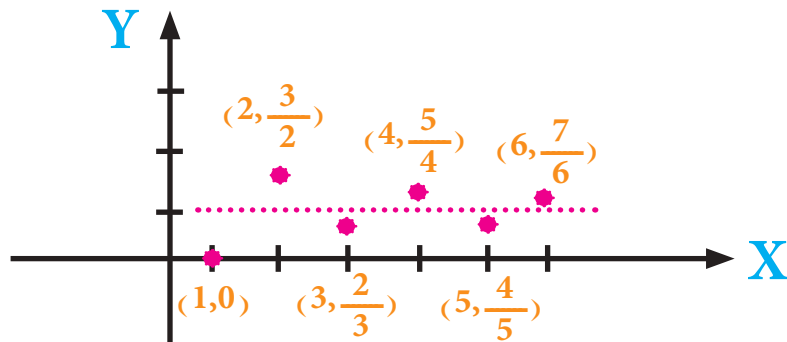
$$3) \langle G_n \rangle = \left\langle 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\rangle$$

$$G_1 = 1 - 1 = 0 \quad G_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$G_3 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad G_4 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$G_5 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \quad G_6 = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

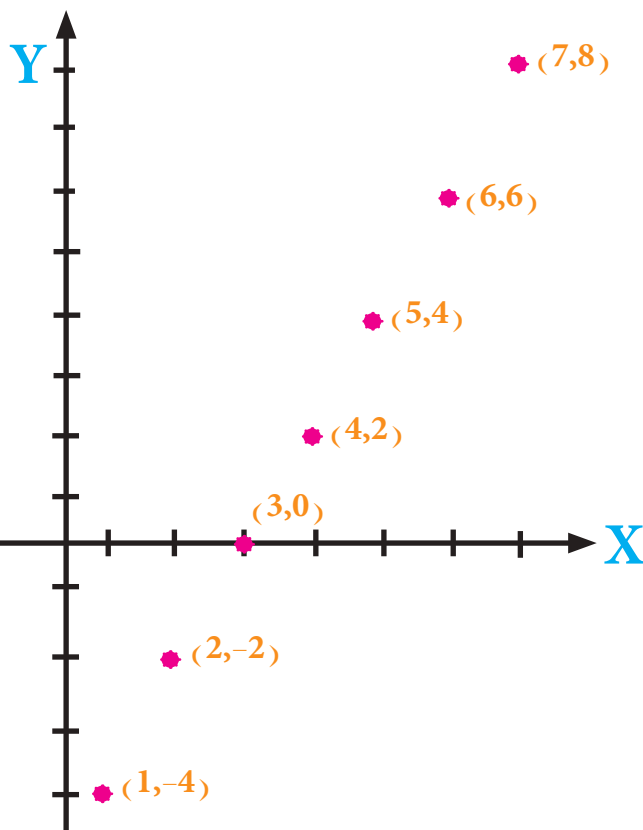
نعين النقاط  $(1, 0)$ ،  $(2, \frac{3}{2})$ ،  $(3, \frac{2}{3})$ ،  $(4, \frac{5}{4})$ ،  $(5, \frac{4}{5})$ ،  $(6, \frac{7}{6})$



$$4) \langle H_n \rangle = \langle -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8 \rangle$$

نلاحظ ان هذه المتتابعة هي متتابعة منتهية وعليه نرسم حدودها بتعيين النقط

$(1, -4)$ ،  $(2, -2)$ ،  $(3, 0)$ ،  $(4, 2)$ ،  $(5, 4)$ ،  $(6, 6)$ ،  $(7, 8)$



## تمارين [ 2 - 1 ]

لكل من المتتابعات الآتية اكتب الحدود السبعة الأولى ثم مثلها بيانياً :

$$1) \langle U_n \rangle = \langle 1 + (-1)^n \rangle$$

$$2) \langle H_n \rangle = \langle 1 / n^2 + 1 \rangle$$

$$3) \langle H_n \rangle = \langle n^2 - 3 \rangle$$

$$4) \langle U_n \rangle = \langle 10 - 2n \rangle$$

$$5) \langle G_n \rangle = \langle 4 \rangle$$

$$6) U_n = \begin{cases} 3 & \text{عندما } n \text{ عدد فردي} \\ -3 & \text{عندما } n \text{ عدد زوجي} \end{cases}$$

$$7) \langle M_n \rangle = \langle -3 (-1)^n \rangle$$

$$8) \langle G_n \rangle = \langle 3^{n-1} \rangle$$

$$9) \langle M_n \rangle = \langle \frac{1-2n}{n} \rangle$$

$$10) \langle U_n \rangle = \langle \frac{8}{n} \rangle$$



## Arithmetic Sequences [2-3] المتتابعات الحسابية (العددية)



لنلاحظ الامثلة الاتية :

$$1) \langle U_n \rangle = \langle 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22 \rangle$$

$$2) \langle H_n \rangle = \langle 30, 25, 20, 15, 10, 5, 0, -5, -10, -15 \rangle$$

$$3) \langle G_n \rangle = \langle 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 \rangle$$

نلاحظ في المثال الاول ان

$$U_2 - U_1 = 3, U_3 - U_2 = 3, U_4 - U_3 = 3, U_5 - U_4 = 3 \dots$$

وهكذا ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة = 3 وهو مقدار ثابت اي ان

$$U_{n+1} - U_n = 3 \quad [\text{عدد (مقدار) ثابت}].$$

وفي المثال الثاني فان

$$H_2 - H_1 = -5, H_3 - H_2 = -5, H_4 - H_3 = -5, H_5 - H_4 = -5, H_6 - H_5 = -5$$

وهكذا ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة = -5 وهو عدد (مقدار) ثابت أي أن :

$$H_{n+1} - H_n = -5$$

اما في المثال الثالث فان :

$$G_2 - G_1 = 3, G_3 - G_2 = 5, G_4 - G_3 = 7, G_5 - G_4 = 9$$

نلاحظ ان ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة متغير لذا فإنها ليست متتابعة حسابية ، المتتابعات

التي كما في المثالين (1) ، (2) والتي تحقق الشرط عدد ثابت =  $U_{n+1} - U_n$  [نفرض العدد الثابت  $d$ ] تسمى متتابعة حسابية .

### تعريف (2-2)

تسمى المتتابعة  $\langle U_n \rangle$  حسابية اذا كان  $\forall n \in \mathbb{Z}^+$  ، مقدار ثابت =  $U_{n+1} - U_n$

وليكن ( $d$ ) اي ان  $U_{n+1} - U_n = d$  ونفس المعنى  $U_{n+1} = U_n + d$



حيث العدد الثابت  $d$  يسمى اساس المتتابعة وعليه لو كانت  $\langle Un \rangle$  متتابعة حسابية وحدها

الاول  $U_1 = a$  واساسها  $d$  فإن :

$$U_1 = a, U_2 = a + d, U_3 = a + 2d, U_4 = a + 3d, U_5 = a + 4d$$

ويكون حدها العام (الحد النوني)

$$Un = a + (n-1)d$$

وعليه تكون المتتابعة

$$\langle Un \rangle = \langle a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n-1)d, \dots \rangle$$



اكتب الحدود الستة الاولى لكل من المتتابعات الحسابية الآتية :

1) حدها الاول  $H_1 = -7$  واساسها  $d = 2$

$$\langle Hn \rangle = \langle -7, -5, -3, -1, 1, 3, \dots \rangle$$

2) حدها الاول  $U_1 = \frac{5}{2}$  واساسها  $d = -1$

$$\langle Un \rangle = \langle \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-5}{2}, \dots \rangle$$

3) حدها الاول  $M_1 = 10$  واساسها  $d = -3$

$$\langle Mn \rangle = \langle 10, 7, 4, 1, -2, -5, \dots \rangle$$

1) اكتب الحد الثامن للمتتابعة الحسابية التي حدها الاول = -3 و اساسها (7)

$$U_n = a + (n-1)d$$

في هذا المثال لدينا  $a = -3$ ,  $d = 7$ ,  $n = 8$  (ترتيب الحد المطلوب)

$$\begin{aligned} U_8 &= -3 + (8-1) \cdot 7 \\ &= -3 + 49 \\ &= 46 \end{aligned}$$

2) اكتب الحد العاشر للمتتابعة الحسابية التي حدها الاول (12) و اساسها (-3)

الحل

$$U_n = a + (n-1)d$$

$$a = 12, d = -3, n = 10$$

$$U_{10} = 12 + (10-1) \cdot (-3)$$

$$= 12 - 27$$

$$= -15$$

3) استؤجر عامل في اول سنة براتب قدره (200000) دينار على ان يعطى زيادة ثابتة في نهاية كل شهر

مبلغاً مقداره (15000) دينار فكم يبلغ راتبه في نهاية السنة ؟

نلاحظ ان راتب الشهر الاول = 200000 دينار

راتب الشهر الثاني = 215000 بعد الزيادة للشهر الاول

راتب الشهر الثالث = 230000 بعد الزيادة للشهر الثاني

راتب الشهر الرابع = 245000 بعد الزيادة للشهر الثالث

نلاحظ ان مبالغ الرواتب تكون متتابعة حسابية حدها الاول  $a = 200000$  اساسها  $d = 15000$

والمطلوب ايجاد الراتب في نهاية السنة الذي هو  $(H_n)$  حيث  $n = 12$  [السنة (12) شهراً]

$$H_n = a + (n-1)d$$

$$H_{12} = 200000 + (12-1) \cdot 15000$$

$$= 200000 + 165000$$

$$= 365000$$

دينار راتبه الشهري في نهاية السنة

4) متتابعة حسابية حدها الاول = 7 وحدها السادس = -8 جد اساسها واكتب الحدود الخمسة الاولى منها

$$U_n = a + (n-1) \cdot d$$

$$a = 7, U_6 = -8, n = 6$$

$$-8 = 7 + (6-1)(d)$$

$$-8 - 7 = 5d$$

$$-15 = 5d$$

$$d = -3$$

$$U_1 = 7, U_2 = 4, U_3 = 1, U_4 = -2, U_5 = -5$$

5) في المتتابعة الحسابية  $\langle 42, 39, 36, \dots \rangle$  جد رتبة الحد الذي قيمته (-6) واي حد فيها يساوي صفر

$$U_n = a + (n-1) \cdot d$$

$$U_n = -6, a = 42$$

$$d = U_2 - U_1 = 39 - 42 = -3$$

$$-6 = 42 + (n-1)(-3)$$

$$-6 = 42 - 3n + 3$$

$$3n = 42 + 6 + 3 = 51$$

$$n = \frac{51}{3} = 17 \text{ هو رتبة (ترتيب) الحد الذي قيمته } (-6) \text{ هو}$$

$$U_{17} = -6 \text{ اي ان}$$

اذا كان  $U_n = 0, a = 42, d = -3$  المطلوب ايجاد  $n$

$$42 + (n-1)(-3) = 0$$

$$42 - 3n + 3 = 0$$

$$3n = 45$$

$$45$$

$$n = \frac{45}{3} = 15$$

اي ان الحد الخامس عشر = صفر

$$U_{15} = 0$$



6) إذا كان الحد العاشر في متتابعة حسابية يساوي (62) وأساسها يساوي (5) اكتب المتتابعة مبتدأً من

الحد الأول

$$U_n = a + (n-1) \cdot d$$

$$U_{10} = 62, d = 5, n = 10, a = ?$$

$$62 = a + (10-1)(5)$$

$$62 = a + 45$$

$$a = 17 \text{ الحد الأول}$$

$$\langle U_n \rangle = \langle 17, 22, 27, 32, \dots \rangle$$

7) جد المتتابعة الحسابية التي حدها التاسع = 5 وحدها الثالث عشر = -3

$$U_n = a + (n-1) \cdot d$$

$$U_9 = 5, U_{13} = -3, a = ?, d = ?$$

$$5 = a + (9-1)d$$

$$(1 \dots \dots \dots 5 = a + 8d$$

$$-3 = a + (13-1)d$$

$$(2 \dots \dots \dots -3 = a + 12d$$

$$\begin{array}{r} \overline{-5 = -a - 8d} \\ \text{بالطرح} \end{array}$$

$$-8 = 4d$$

$$d = -2 \text{ الأساس تعويض في (1)}$$

$$5 = a + 8(-2)$$

$$5 + 16 = a$$

$$a = 21 \text{ الحد الأول}$$

$$\langle U_n \rangle = \langle 21, 19, 17, 15, \dots \rangle$$



$$\langle Un \rangle = \langle 3n + 1 \rangle \text{ المتتابة } (8)$$

توجد اربع اجابات واحدة منها صحيحة . اختر الاجابة الصحيحة :

(أ) اساسها = 3 وحدها الخامس = 15

(ب) اساسها = -3 وحدها الرابع = 13

(ج) اساسها = 4 وحدها الاول = 6

(د) اساسها = 3 وحدها الثالث = 10

الحل

$$\langle Un \rangle = \langle 3n + 1 \rangle \text{ المتتابة}$$

$$\langle Un \rangle = \langle 4, 7, 10, 13, 16 \rangle$$

حدها الاول = 4 اساسها = 3

الفرع أ خطأ ، الفرع ب خطأ ، الفرع ج خطأ

الفرع د صحيح



إذا كان لدينا العددين  $a, k$  وادخلنا بينها الأعداد المرتبة  $b, c, g, \dots$  بحيث يكون  $\langle a, b, c, g, \dots, k \rangle$  متتابعة حسابية ، الأعداد  $b, c, g, \dots$  تسمى أوساط حسابية للعددين  $a, k$  وبذلك يكون :

عدد حدود المتتابعة = عدد الأوساط الحسابية + 2

والحد الأول للمتتابعة =  $a$  وحدها الأخير =  $k$



أدخل ستة أوساط حسابية بين 2,37

$$\text{عدد الحدود} = 8 = 6 + 2$$

$$U_8 = 37, a = 2$$

$$U_n = a + (n-1) \cdot d$$

$$37 = 2 + 7d$$

$$35 = 7d$$

$$d = 5$$

المتتابعة هي :  $\langle U_n \rangle = \langle 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37 \rangle$

الأوساط هي : 7, 12, 17, 22, 27, 32

## [ 2-3-2 ] مجموع حدود المتتابعة الحسابية

لتكن  $\langle Un \rangle$  متتابعة حسابية اساسها  $(d)$  حدها الاول  $a =$

$$\langle Un \rangle = \langle U1, U2, U3, U4, \dots \rangle$$

$$= \langle a, a+d, a+2d, a+3d, \dots \rangle$$

ولنرمز لمجموع  $(n)$  من الحدود من هذه المتتابعة بالرمز  $(Sn)$  ابتداءً من الحد الاول فإن :

$$Sn = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (Un-2d) + (Un-d) + Un \dots (1)$$

ويمكن كتابة المجموع  $(Sn)$  بالشكل :

$$Sn = Un + (Un-d) + (Un-2d) + \dots + (a+2d) + (a+d) + a \dots (2)$$

وبجمع المعادلتين  $(1)$  ،  $(2)$  نحصل على :

$$2Sn = (a+Un) + (a+Un) + \dots + (a+Un)$$

عدد المقدار  $Un$  هو  $n$  من المرات فيكون :

$$2Sn = n(a+Un)$$

$$Sn = \frac{n}{2} (a+Un) \dots 1$$

حيث  $(n)$  عدد الحدود ابتداءً من الحد الاول وبالترتيب الى الحد  $Un = an$

وبما ان  $Un = an$  وان  $Un = a + (n-1)d$  وبالتعويض في  $(1)$  نحصل على ان :

$$Sn = \frac{n}{2} [2a + (n-1) \cdot d]$$

حيث عدد الحدود  $n =$  ، الحد الاول  $a =$  ، الاساس  $d =$



**1** جد مجموع الحدود العشرة الاولى من المتتابعة

$$\langle Un \rangle = \langle 17, 22, 27, 32, \dots \rangle$$

$$Sn = \frac{n}{2} [2a + (n-1) \cdot d]$$

$$n = 10, a = 17, d = 22 - 17 = 5$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} [2 \times 17 + (10-1) \times 5]$$

$$S_{10} = 5 [34 + 45] = 5 \times 79 = 395$$

او بطريقة اخرى

$$a = 17, n = 10, d = 22 - 17 = 5$$

$$U_n = a + (n-1) \cdot d$$

$$U_{10} = 17 + (10-1) \times 5$$

$$= 17 + 45 = 62$$

$$S_n = \frac{n}{2} [a + U_n]$$

$$= \frac{10}{2} [17 + 62] = 5 \times 79 = 395$$

2) بين نوع المتتابعة التي حدها العام  $\langle H_n \rangle = \langle 2n - 7 \rangle$  وأوجد مجموع الحدود الخمسة عشر الاولى

منها

$$H_n = 2n - 7$$

$$H_1 = 2 \times 1 - 7 = -5 \quad \text{الحد الاول}$$

$$H_2 = 2 \times 2 - 7 = -3 \quad \text{الحد الثاني}$$

$$H_3 = 2 \times 3 - 7 = -1 \quad \text{الحد الثالث}$$

$$H_4 = 2 \times 4 - 7 = 1 \quad \text{الحد الرابع}$$

نلاحظ ان الفرق بين كل حد وسابقه مباشرة مقدار ثابت  $= 2$  وعليه تكون المتتابعة حسابية فيها

$$H_1 = -5$$

$$d = (-3) - (-5) = 2$$

$$n = 15$$

$$S_{15} = \frac{15}{2} [2 \times (-5) + (15-1)(2)]$$

$$S_{15} = \frac{15}{2} [-10 + 28]$$

$$= \frac{15}{2} \times [18] = 135$$



3) جد عدد الاعداد الصحيحة المحصورة بين (100) ، (1000) والتي تقبل القسمة على (9) بدون باقٍ ثم جد مجموعها .

لايجاد اول عدد يقبل القسمة على (9) بدون باق بعد (100) نقسم (100) على (9) فنقول  $\frac{100}{9} = 11$  والباقي 1 ولكي يكون الباقي يقبل القسمة على (9) بدون باقي نضيف له (8) فيكون اول عدد بعد (100) يقبل القسمة على (9) وبدون باق هو (108) .

ولأيجاد آخر عدد يقبل القسمة على (9) بدون باق قبل (1000) نقسم (1000) على (9) فنقول  $\frac{1000}{9} = 111$  والباقي (1) وعليه يكون اخر عدد يقبل القسمة على (9) بدون باق  $1000 - 1 = 999$  وعليه الاعداد الصحيحة المحصورة بين (100) ، (1000) والتي تقبل القسمة على (9) بدون باق تكون متتابعة حسابية هي :

$$\langle Un \rangle = \langle 108, 117, 126, 135, \dots, 999 \rangle$$

الآن لدينا :

$$a = 108, d = 9, Un = 999, n = ?$$

$$Un = a + (n-1) \cdot d$$

$$999 = 108 + (n-1) \cdot (9)$$

$$999 = 108 + 9n - 9$$

$$999 - 99 = 9n$$

$$n = \frac{900}{9} = 100$$



مجموع الاعداد الصحيحة التي تقبل القسمة على (9) بدون باق ومحصورة بين (100) ، (1000)

$$S_n = \frac{n}{2} [a + U_n]$$

$$n = 100 , a = 108 , U_n = 999$$

$$S_{100} = \frac{100}{2} [108 + 999]$$

$$= (50) (1107) = 55350$$

4) جد عدد الاعداد الصحيحة الموجبة الفردية التي اقل من (200) ثم جد مجموعها.

الاعداد الفردية الصحيحة الموجبة التي اقل من (200) هي  $1, 3, 5, 7, 9, \dots, 199$

تكون متتابعة حسابية فيها :  $a = 1, d = 2, U_n = 199$

$$U_n = a + (n-1) \cdot d$$

$$199 = 1 + (n-1) \cdot (2)$$

$$199 = 1 + 2n - 2$$

$$200 = 2n$$

$$n = \frac{200}{2} = 100 \text{ عدد الاعداد}$$

$$S_n = \frac{n}{2} [a + U_n]$$

$$S_{100} = \frac{100}{2} [1 + 199]$$

$$S_{100} = 50 \times 200 = 10000 \text{ مجموع الاعداد}$$

## تمارين [2-2]

1 لكل مما يأتي اربع اجابات واحدة منها فقط صحيحة .

اختر الجواب الصحيح

أ المتتابة  $\langle 10-5n \rangle$

1 اساسها (5) وحدها العاشر = -40

2 اساسها (-5) وحدها العاشر = 40

3 اساسها (-5) وحدها العاشر = -40

4 ليس اياً مما ذكر .

ب اذا كانت  $\langle \dots, x, y, 9, 11, 13 \rangle$  متتابة حسابية فان :

1  $Y = -7, X = -5$

2  $Y = -7, X = 5$

3  $Y = 7, X = -5$

4  $Y = 7, X = 5$

2 جد الحد الثالث عشر من المتتابة  $\langle -4, 4, 12, \dots \rangle$

3 جد عدد الحدود والاساس للمتتابة المنتهية التي حدها الاول = 9 وحدها الاخير = -6 ومجموع حدودها = 24.

4 جد عدد الاعداد الصحيحة المحصورة بين (100) ، (1000) والتي تقبل القسمة على (12) بدون باق ثم جد مجموعها .

5 رتب مقاعد قاعة في (25) صفاً يحتوي الصف الاول على (20) مقعداً والثاني على (21) مقعداً والثالث على (22) مقعداً فما عدد المقاعد في القاعة ؟

6 جد مجموع الاعداد الصحيحة غير السالبة التي اقل من (500) .



7) اكتب الحدود الستة الاولى للمتتابعة الحسابية التي حدها الاول = 7 وأساسها  $d = -4$  ثم جد حدها الخامس عشر ومجموع الحدود العشرة الثانية منها .

8) ضع ثمانية اعداد صحيحة بين 2 , 38 لتتكون لديك متتابعة حسابية حدها الاول = 38 وحدها الاخير = 2 ثم جد مجموع هذه الاعداد .

9) اذا بدأ بالعدد 5 فان الاعداد القابلة للقسمة على (5) بدون باقي هي  $5, 10, 15, \dots$  ما مجموع اول (30) عدداً منها .

10) كم من الاعداد يجب ان تأخذ من المتتابعة  $\langle 1, 2, 3, 4, \dots \rangle$  لتحصل على مجموع يساوي (5050) ؟

11) جد عدد حدود المتتابعة  $\langle 61, \dots, -14, -17, -20 \rangle$  ثم جد مجموع حدودها .

12) جد المتتابعة الحسابية التي حدها الخامس = 8 وحدها الثامن عشر = -31 ثم جد مجموع الحدود العشرة الاولى منها .

13) ادخل عشرة اوساط حسابية بين 3, 36

14) متتابعة حسابية حدها الثاني = -71 وحدها ما قبل الاخير = -3 ومجموع حدودها = -740 جد المتتابعة .

لنلاحظ المتتابعات الآتية :

$$1) \langle 2, 6, 18, 54, 162, \dots \rangle$$

$$2) \langle 64, -32, 16, -8, 4, -2, \dots \rangle$$

$$3) \langle 5, 7, 9, 11, 13, \dots \rangle$$

نشاهد في المثال الاول ان :

$$\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = \frac{162}{54} = \dots = 3$$

اي ان ناتج قسمة اي حد على الحد السابق له مباشرة مقدار ثابت (او عدد ثابت) هو (3) في هذا المثال

وفي المثال الثاني ان :

$$\frac{-32}{64} = \frac{16}{-32} = \frac{-8}{16} = \frac{4}{-8} = \frac{-2}{4} = \dots = \frac{-1}{2}$$

اي ان ناتج قسمة اي حد على الحد السابق له مباشرة مقدار (عدد) ثابت في هذا المثال هو  $(\frac{-1}{2})$  كل

المتتابعات التي مثل هذين المثالين تسمى متتابعة هندسية اي ان المتتابعة الهندسية هي المتتابعة التي يكون

فيها ناتج قسمة اي حد فيها على الحد السابق له مباشرة مقدار (عدد) ثابت يسمى اساس المتتابعة ونرمز له

بالحرف (r) وبشرط لا يوجد حد فيها قيمته صفر

$$\frac{9}{7}$$

اما المثال الثالث فلا يمثل متتابعة هندسية لأن  $\frac{9}{7} \neq \frac{7}{5}$

## تعريف (2-3)

المتتابعة  $\langle U_n \rangle$  تسمى متتابعة هندسية اذا تحقق الشرط

$$r = \frac{U_n}{U_{n-1}} = \dots = \frac{U_4}{U_3} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_2}{U_1}$$

يسمى اساس المتتابعة وبشرط  $U_n \neq 0$  لكل  $n \in \mathbb{Z}^+$  وعليه يكون في المتتابعة الهندسية

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} = r$$

نرمز للحد الاول للمتتابعة الهندسية  $\langle U_n \rangle$  بالرمز «a» والاساس بالرمز (r) فان

$$\begin{aligned} \langle U_n \rangle &= \langle U_1, U_2, U_3, U_4, \dots, U_n, \dots \rangle \\ &= \langle a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}, \dots \rangle \end{aligned}$$

لأن كل حد في المتتابعة الهندسية = الحد السابق له مباشرة  $\times$  الاساس

اي ان الحد العام (الحد النوني) للمتتابعة الهندسية

$$U_n = r \cdot U_{n-1}$$

$$U_n = ar^{n-1}$$



1) اكتب الحدود الستة الاولى للمتتابعة الهندسية التي حدها الاول = 64 واساسها  $\left(\frac{-1}{4}\right)$

$$U_1 = 64$$

$$U_2 = U_1 \cdot r = 64 \times \frac{-1}{4} = -16$$

$$U_3 = U_2 \cdot r = -16 \times \frac{-1}{4} = 4$$

$$U_4 = U_3 \cdot r = 4 \times \frac{-1}{4} = -1$$

$$U_5 = U_4 \cdot r = -1 \times \frac{-1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$U_6 = U_5 \cdot r = \frac{1}{4} \times \frac{-1}{4} = \frac{-1}{16}$$



$$U_1 = a = 64$$

$$U_2 = ar = 64 \times \frac{-1}{4} = -16$$

$$U_3 = ar^2 = 64 \times \left(\frac{-1}{4}\right)^2 = 4$$

$$U_4 = ar^3 = 64 \times \left(\frac{-1}{4}\right)^3 = -1$$

$$U_5 = ar^4 = 64 \times \left(\frac{-1}{4}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

$$U_6 = ar^5 = 64 \times \left(\frac{-1}{4}\right)^5 = \frac{-1}{16}$$

(2) جد الحد السادس في المتتابعة الهندسية  $\langle 7, 14, 28, \dots \rangle$

$$a=7, r= \frac{14}{7} = 2, n=6$$

$$U_n = a r^{n-1}$$

$$U_6 = 7 \times 2^5 = 7 \times 32 = 224$$

(3) متتابعة هندسية حدها الاول = 3 وحدها الخامس = 48 جد حدها الثامن

$$U_n = ar^{n-1}$$

$$U_5 = ar^4$$

$$3r^4 = 48$$

$$r^4 = 16$$

$$r = \pm 2$$

وهذا يعني وجود جوابين [اي متتابعتين تحققان شروط السؤال]

**الاولى:** حدها الاول = 3 واساسها = 2

$$U_8 = 3 \times 2^7 = 3 \times 128 = 384 \quad \text{فيكون الحد الثامن}$$

**الثانية:** حدها الاول = 3 واساسها = -2

$$U_8 = 3(-2)^7 = 3 \times -128 = -384 \quad \text{فيكون الحد الثامن}$$

4) اي حد في المتتابعة الهندسية  $\langle 2, 10, 50, 250, \dots \rangle$  يساوي 781250

$$r = \frac{10}{2} = 5$$

$$U_n = ar^{n-1}$$

$$781250 = 2 \times (5)^{n-1}$$

وبالقسمة على 2

$$5^{n-1} = 390625$$

$$5^{n-1} = (5)^8$$

$$n-1 = 8$$

$$n = 9$$

رتبة (ترتيب) الحد

5) جد المتتابعة الهندسية التي حدها السابع (625) وحدها الرابع (-5)

$$U_n = ar^{n-1}$$

$$U_7 = ar^6 = 625 \dots\dots (1)$$

الحد السابع

$$U_4 = ar^3 = -5 \dots\dots (2)$$

الحد الرابع

بقسمة طرفي المعادلة (1) على المعادلة (2) نحصل على:

$$\frac{ar^6}{ar^3} = \frac{625}{-5}$$

$$r^3 = -125$$

$$r = \sqrt[3]{-125} = -5 \quad \text{الاساس}$$

وبالتعويض في المعادلة (2) نحصل على

$$-5 = a \cdot (-5)^3$$

$$a = \frac{-5}{-125} = \frac{1}{25}$$

$$\therefore \langle U_n \rangle = \left\langle \frac{1}{25}, \frac{-1}{5}, 1, -5, \dots \right\rangle$$

إذا كان لدينا العددان  $a, h$  وادخلنا بينها الأعداد المرتبة  $b, c, g, \dots$  بحيث يكون  $\langle a, b, c, g, \dots, h \rangle$  متتابعة هندسية ، الأعداد  $b, c, g, \dots$  تسمى اوساط هندسية للعددين  $a, h$  وبذلك يكون :

$$\text{عدد حدود المتتابعة} = \text{عدد الاوساط} + 2$$

$$\text{الحد الاول للمتتابعة} = a$$

$$\text{وحدها الاخير} = h$$



1) ادخل ستة اوساط هندسية بين 5، 640

$$\text{عدد الحدود} = 6 + 2 = 8$$

$$U_n = U_8 = 5$$

$$U_1 = a = 640$$

$$U_n = ar^{n-1}$$

$$5 = 640 \times r^{8-1}$$

$$r^7 = \frac{5}{640} = \frac{1}{128} = \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$$\therefore r = \frac{1}{2}$$

المتتابعة  $\langle U_n \rangle = \langle 640, 320, 160, 80, 40, 20, 10, 5 \rangle$

الوساط هي 320, 160, 80, 40, 20, 10

## 2-4-2 | مجموع عدد معين من حدود متتابعة هندسية

تعلمنا ان المتتابعة الهندسية التي حدها الاول =  $a$  واساسها =  $r$  هي :

$$\langle Un \rangle = \langle a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1}, \dots \rangle$$

واذا اخذنا ( $n$ ) حداً ابتداءً من الحد الاول فتكون المتتابعة المختارة متتابعة منتهية هي :  
 $\langle a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1} \rangle$  ولو رمزنا بالرمز  $S_n$  لمجموع هذه الحدود يكون :

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} \dots\dots\dots (1)$$

وبضرب طرفي المعادلة (1) في ( $r$ ) نحصل على

$$r S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \dots\dots\dots (2)$$

وبطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) نحصل على

$$S_n - r S_n = a - a r^n$$

$$(1-r) S_n = a(1-r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

بشرط  $r \neq 1$

وعندما  $r = 1$  تكون المتتابعة المنتهية التي عدد حدودها ( $n$ ) هي  $\langle a, a, a, \dots, a \rangle$  ويكون  $S_n = na$



(1) جد مجموع الحدود الستة الاولى من المتتابعة الهندسية  $\langle 3, 9, 27, 81, \dots \rangle$

$$a = 3, \quad r = \frac{9}{3} = 3, \quad n = 6$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$S_6 = \frac{3(1-3^6)}{(1-3)}$$

$$S_6 = \frac{3(1-729)}{-2}$$

$$S_6 = 3 \times \frac{(-728)}{-2} = 1092$$

2) ما مجموع حدود المتتابعة الهندسية التي حدها الاول = 3 وحدها الاخير = 48 واساسها = 2

$$U_n = ar^{n-1}$$

$$48 = 3 \times 2^{n-1}$$

$$2^{n-1} = 16 = 2^4$$

$$n-1 = 4$$

$$n = 5$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$S_5 = \frac{3(1-2^5)}{(1-2)} = \frac{3(1-32)}{-1}$$

$$S_5 = (-3) \cdot (-31) = 93$$

3) اذا كان مجموع الحدود الستة الاولى من متتابعة هندسية يساوي تسعة امثال مجموع الحدود الثلاثة الاولى منها فما اساس المتتابعة ؟

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$S_6 = \frac{a(1-r^6)}{(1-r)}$$

$$S_3 = \frac{a(1-r^3)}{(1-r)}$$

$$\frac{a(1-r^6)}{(1-r)} = 9 \times \frac{a(1-r^3)}{(1-r)}$$

بالضرب في  $(1-r)$

$$a(1-r^6) = 9a(1-r^3)$$

بالقسمة على  $a$  وتحليل  $(1-r^6)$

بالقسمة على  $(1-r^3)$

$$(1-r^3)(1+r^3) = 9(1-r^3)$$

$$1+r^3 = 9$$

$$r^3 = 9-1$$

$$r^3 = 8$$

$$r = 2$$

الاساس



4) متتابعة هندسية مجموع الحدود الثلاثة الاولى منها (26) ومجموع الحدود الثلاثة التالية لها (702)

فما هي المتتابعة ؟

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$S_3 = \frac{a(1-r^3)}{(1-r)} = 26 \dots\dots (1)$$

$$26+702 = 728$$

مجموع الحدود الستة الاولى

$$S_6 = \frac{a(1-r^6)}{(1-r)} = 728 \dots\dots\dots (2)$$

بقسمة المعادلة (2) على المعادلة (1)

$$\frac{a(1-r^6)}{(1-r)} \div \frac{a(1-r^3)}{(1-r)} = \frac{728}{26}$$

$$\frac{a(1-r^3)(1+r^3)}{(1-r)} \times \frac{(1-r)}{a(1-r^3)} = 28$$

$$1+r^3 = 28$$

$$r^3 = 27$$

$$r = 3$$

نعوض في المعادلة (1) نحصل

$$26 = \frac{a(1-3^3)}{(1-3)}$$

$$26 = \frac{a(1-27)}{-2}$$

$$-52 = -26a$$

$$a = 2$$

$$\langle Un \rangle = \langle 2, 6, 18, 54, \dots \rangle$$

المتتابعة



طريقة ثانية

مجموع الحدود الثلاثة الاولى  $a + ar + ar^2 = 26$

مجموع الحدود الثلاثة التالية:

$$ar^3 + ar^4 + ar^5 = 702$$

$$\frac{a+ar+ar^2}{ar^3+ar^4+ar^5} = \frac{a(1+r+r^2)}{ar^3(1+r+r^2)} = \frac{26}{702} \longrightarrow \frac{a(1+r+r^2)}{ar^3(1+r+r^2)} = \frac{1}{27}$$

$$r^3 = 27 \longrightarrow r = 3$$

$$a(1+3+9) = 26 \longrightarrow 13a = 26 \longrightarrow a = 2$$



### [ 2-4-3 ] المتابعات الهندسية في موضوع القيمة الحالية

#### وجملة الدفعة السنوية

الرموز المستخدمة :

المبلغ ( Amount ) يرمز له «A» السعر ( Price ) يمثل ربح المئة في سنة واحدة يرمز له «P» الربح ( Profit ) ويرمز له ( Pr ) الزمن ( Time ) يرمز له «T» .

الجملة هي ( المبلغ + الربح ) [ Wholesale ] وهي ما يؤول اليه المبلغ الموضوع بسعر معين بعد فترة من الزمن .

القيمة الحالية [ Current Value ] ويرمز له «C» والربح اما يكون بسيطاً ( Simple profit ) او مركباً ( Compound profit ) .

الربح البسيط يرمز له ( S. pr ) ويحسب على رأس المال ( المبلغ ) فقط وفق القانون :

$$S. pr = \frac{A \cdot T \cdot P}{100}$$

حيث ان A المبلغ ، T الزمن ، P الربح

اما الربح المركب يرمز له ( C. pr ) يحسب على رأس المال وعلى الربح ايضاً ويمكن حساب جملة المبلغ الذي يحسب له ربحاً مركباً وفق القانون :

$$W = A(1.0P)^T$$

وقد تضاف الارباح في كسور من السنة فمثلاً قد تضاف الارباح في نهاية كل ستة اشهر اي مرتين في السنة او كل اربعة اشهر اي ثلاث مرات في السنة وهكذا فيكون القانون بالشكل :

$$W = A \left[ 1 + \frac{0.0P}{n} \right]^n$$

حيث ( n ) عدد المرات تضاف الارباح في السنة

في بعض القضايا التجارية قد يحتاج البعض الحصول على المال قبل موعد الاستحقاق لدفع المبلغ في مثل هذه الاحوال يعتمدون الى تنزيل قيمة المبلغ وعندئذ يخصم من المبلغ مقداراً من المال يسمى عمولة (او تنزيل داخلي).

فمثلاً :

اذا كان لدى احدهم كمبيالة قيمتها (A) تستحق الدفع بعد (t) من الزمن بالسنين واراد ان ينزلها عند احد المصارف فإن المصرف يأخذ عليها عمولة وهذه العمولة هي عبارة عن ربح المبلغ المعطى لصاحب الكمبيالة بحيث لو وضع بالربح المركب لمدة (t) من السنين وبسعر (P%) تصبح جملة (A) وهكذا المبلغ المعطى لصاحب الكمبيالة يسمى القيمة الحالية (C) بينما (A) يسمى القيمة الاسمية للكمبيالة وعلى هذا فإن القيمة الحالية لمبلغ معين هي المبلغ الذي تعبر جملته في نهاية المدة بمقدار المبلغ المعين وعليه يكون :

$$A = C \cdot (1.0P)^t$$

$$C = \frac{A}{(1.0P)^t}$$

$$C = A \cdot (1.0P)^{-t}$$



1) لدى رجل كمبيالة بمبلغ (3) ملايين دينار تستحق الدفع بعد مرور (5) سنوات ولكنه اراد ان يستلم قيمتها الان فإذا كان سعر الربح المركب 5% في السنة فما مقدار ما يستلمه ؟

$$C = A \cdot (1.0P)^{-t}$$

$$A = 3000000, P = \%5, t = 5$$

$$C = 3000000(1.05)^{-5}$$

لايجاد قيمة «C» سنستخدم اللوغارتمات (استخدم آلتك الحاسبة) كمال تعلمت من الفصل السابق فيكون :

$$\text{Log } C = \text{Log} [3000000(1.05)^{-5}]$$

$$\text{Log } C = \text{Log } 3000000 + \text{Log}(1.05)^{-5}$$

$$\text{Log } C = \text{Log } 3000000 - 5 \text{Log}(1.05)$$

$$\text{Log } C = 6.4771 - (5) \times (0.0212)$$

$$\text{حيث: } \text{Log } 3 = 0.4771$$

$$\text{Log } 105 = 2.0212$$

$$\text{Log } C = 6.4771 - 0.1060$$

$$\text{Log } C = 6.3711 \quad C = 2351000$$

### ملاحظة

نجد اللوغاريتمات اما باستخدام الحاسبة او الجداول اللوغاريتمية او تعطى في السؤال .

2) يودع رجل في نهاية كل سنة مبلغ (5) خمسة ملايين دينار ليبرح ربحاً مركباً بسعر (4 % ) في

السنة فما مقدار رصيده عند ايداعه المبلغ العاشر؟

### الحل

الرصيد هو عبارة عن جملة عدة مبالغ متساوية ، وضعت لمدة مختلفة وعليه يكون :

الرصيد للمبلغ الاول =  $W1 =$  جملة (5) ملايين دينار وضعت لمدة تسع سنوات اي ان :

$$W1 = 5000000 (1.04)^9$$

الرصيد للمبلغ الثاني =  $W2 =$  جملة (5) ملايين دينار وضعت لمدة ثمان سنوات اي ان :

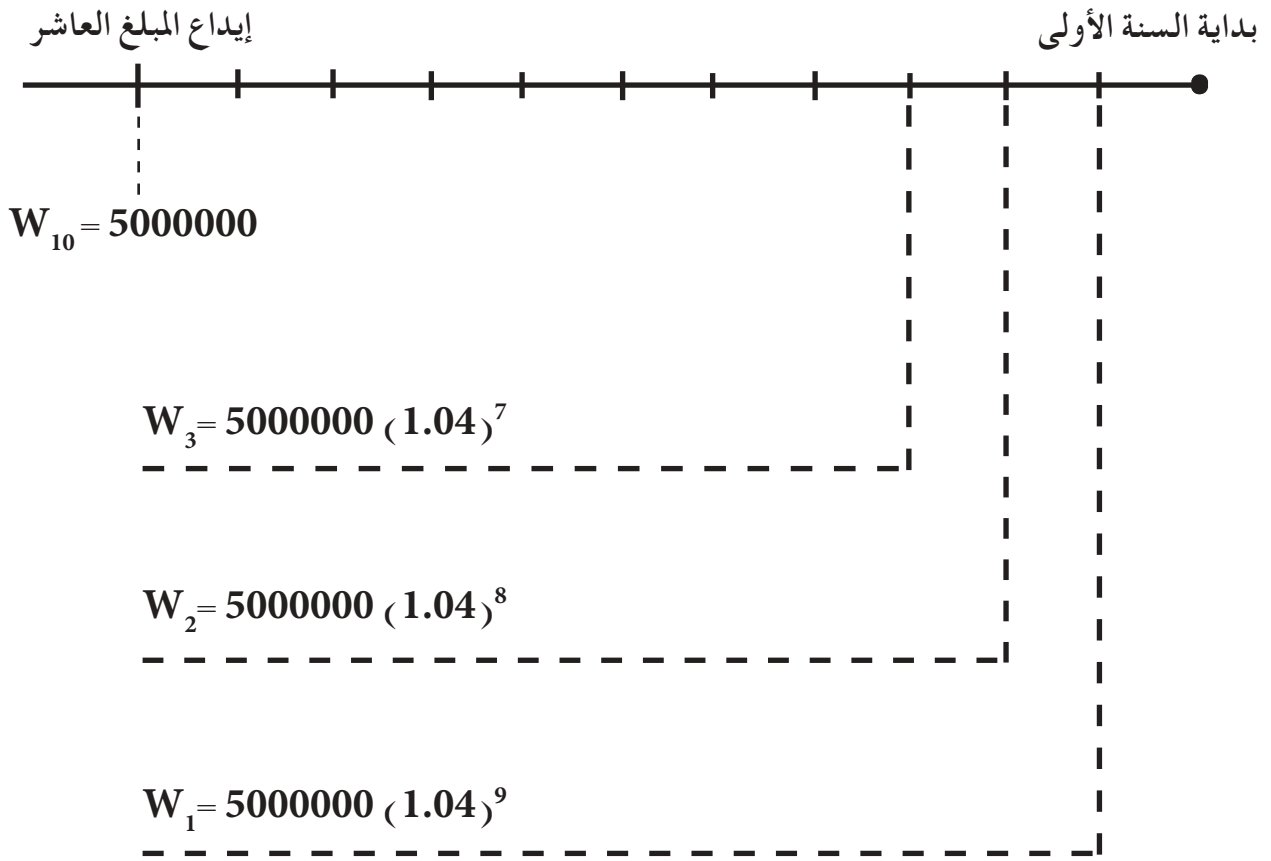
$$W2 = 5000000 (1.04)^8$$

الرصيد للمبلغ الثالث =  $W3 =$  جملة (5) ملايين دينار وضعت لمدة سبع سنوات اي ان :

$$W3 = 5000000 (1.04)^7$$

وهكذا كما في الشكل :





ولو فرضنا ان :

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + \dots + W_{10}$$

فان :

$$W = 5000000 [ (1.04)^9 + (1.04)^8 + (1.04)^7 + \dots + 1 ]$$

ولو نظرنا الى المقدار المحصور بين القوسين نجد أنه متتابعة هندسية يمكن اعتبار حدها الاول = 1 [ اخذ

المجموع من اليسار ] واساسها = 1.04 وعدد حدودها ( 10 ) فيكون :

$$W = 5000000 \left[ \frac{1(1 - (1.04)^{10})}{(1 - 1.04)} \right]$$

$$W = 5000000 \left[ \frac{1 - (1.04)^{10}}{-0.04} \right]$$

وباستخدام اللوغارتمات نجد قيمة ( 1.04 ) فنقول :

$$X = (1.04)^{10}$$

$$\text{Log } X = 10 \cdot \text{Log } 1.04$$

$$\text{Log } X = 10 \times 0.017$$

$$\text{Log } X = 0.17$$

$$\therefore X = 1.479$$



للحصول على اللوغاريتمات نستخدم الجداول او الحاسبة او تعطى في السؤال :

$$\therefore W = 5000000 \times \frac{(1-1.479)}{-0.07}$$

$$W = 5000000 \times \frac{0.479}{0.04}$$

$$W = 59875000$$

3) أمن رجل على حياته بمبلغ (10) ملايين دينار لدى احدى شركات التأمين على ان يدفع قسطاً سنوياً قدره (350000) دينار يدفع في اول كل سنة ولمدة (20) سنة ويدفع القسط الاول بعد التعاقد مباشرة فما ربح الشركة في نهاية المدة اذا استثمرت اموالها بربح مركب سعره (6 %) مع العلم ان  $\text{Log}1060 = 3.0253$  ,  $\text{Log}(0.32.6) = 1.506$  ,  $\text{Log}2396 = 3.3790$  .

الحل

اذا كانت الشركة تستثمر الاقساط بالربح المركب بسعر 6 % في السنة .

فإن : القسط الاول في نهاية المدة يصبح جملة القسط لمدة (20) سنة  $W1 =$

والقسط الثاني في نهاية المدة يصبح جملة القسط لمدة (19) سنة  $W2 =$

والقسط الثالث في نهاية المدة يصبح جملة القسط لمدة (18) سنة  $W3 =$

وهكذا ويكون :

$$W = W1 + W2 + W3 + \dots + W20$$

ويكون :

$$W1 = 350000(1.06)^{20}$$

$$W2 = 350000(1.06)^{19}$$

$$W3 = 350000(1.06)^{18}$$

$$W20 = 350000(1.06)$$

وبالجمع يكون :

$$W = 350000[(1.06)^{20} + (1.06)^{19} + (1.06)^{18} + \dots + (1.06)]$$

$$= 350000(1.06)[(1.06)^{19} + (1.06)^{18} + \dots + 1]$$

المقدار الذي داخل القوس متتابعة هندسية فيكون :

$$W = 350000 \cdot (1.06) \times \frac{1 [(1.06)^{20} - 1]}{(1.06 - 1)}$$



$$W = \frac{350000 \times (1.06)}{0.06} [(1.06)^{20} - 1]$$

$$W = \frac{37100000}{6} [(1.06)^{20} - 1]$$

نجد  $(1.06)^{20}$  باستخدام اللوغاريتمات ليكون:

$$x = (1.06)^{20}$$

$$\text{Log } x = 20 \cdot \text{Log}(1.06)$$

$$\text{Log } x = 20 \times 0.253$$

$$\text{Log } x = 0.5060$$

$$x = 3.206$$

$$\therefore W = \frac{37100000}{6} [3.206 - 1]$$

$$W = \frac{37100000}{6} \times 2.206$$

$$W = 13640430$$

فيكون ربح الشركة :

$$13640430 - 10000000 = 3640430$$

دينار ربح الشركة



## تمارين [2-3]

1) جد مجموع حدود كل من المتتابعات الهندسية الآتية :

a)  $\langle 1, 2, 4, \dots, 128 \rangle$

b)  $\langle 3, -6, 12, \dots, 768 \rangle$

c)  $\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, -\frac{1}{256} \rangle$

2) جد الحد العاشر من المتتابعة الهندسية التي يكون مجموع الحدود السبعة الأولى منها (547) وأساسها (-3)

3) متتابعة هندسية حدها الأول = 256 وأساسها  $(\frac{-1}{2})$  ومجموع (n) من حدودها ابتداءً من الحد الأول يساوي  $170\frac{1}{2}$  فما قيمة (n) ؟

4) من المعلوم أن عدد مربعات رقعة الشطرنج = 64 مربعاً فلو أراد شخص أن يضع على المربع الأول حبة حنطة واحدة وعلى المربع الثاني حبتين وعلى المربع الثالث (4) حبات وعلى المربع الرابع (8) حبات وهكذا فما عدد الحبوب التي يمكن وضعها على المربع الأخير وما مجموع الحبوب على الرقعة [استعن باللوغاريتمات لإيجاد النتائج]

5) عيّن المتتابعة الهندسية التي حدها الأول هو (-16) ومجموع الحدود الثلاثة الأولى منها يساوي (-48)

6) إذا كانت النسبة بين مجموع الحدود الأربعة الأولى لمتتابعة هندسية إلى مجموع الحدود الثمانية الأولى منها كنسبة  $\frac{1}{17}$  فما أساس المتتابعة ؟

7) متتابعة هندسية حدها الثاني (128) وحدها السابع (4) فما مجموع الحدود التسعة الأولى منها ؟

8) يودع رجل في بداية كل سنة مبلغ (5) ملايين دينار في مصرف ليبرح ربحاً مركباً بسعر 5% فما مقدار

رصيده في نهاية السنة السادسة مع العلم أن  $\text{Log} 3767 = 3.5767$  ,  $\text{Log} 105 = 2.0212$  ؟

9) وضع رجل مبلغ (500000) دينار في مصرف بحساب الربح المركب بسعر (4%) لمدة (20) سنة فما

جملة المبلغ مع العلم أن  $\text{Log} 1094 = 3.0390$  ,  $\text{Log} 500 = 2.6990$  ,  $\text{Log} 104 = 2.0170$  ؟

## تمارين عامة على الفصل

1 لكل مما يأتي توجد اربع اجابات واحدة منها فقط صحيحة. اختر الاجابة الصحيحة :

أ) اذا كانت  $\langle 10, x, 0, -5, \dots \rangle$  متتابعة حسابية فان :

1  $x = 5$       2  $x = -5$  والحد السادس = -10

3  $x = -5$       4 ليس اياً مما ذكر

ب) متتابعة حسابية حدها الثامن = 28 وحدها الحادي والعشرين = 67 فان :

1 اساسها = 3 وحدها الاول = -7

2 اساسها = -3 وحدها الاول = -7

3 اساسها = 3 وحدها الاول = 7

4 اساسها = -3 وحدها الاول = 7

ج) عدد الاعداد الصحيحة المحصورة بين (1000) ، (2000) ويقبل القسمة على (7) بدون باق هو

1 142      2 143      3 144      4 285

د) رتبة الحد الذي قيمته  $\frac{1}{192}$  في المتتابعة  $\langle \dots, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle$  هي :

1 8      2 -8      3  $\frac{1}{8}$       4  $\frac{1}{2}$

2) يوجد (n) من الاوساط العددية بين 3، 36 ونسبة الوسط الثاني الى الوسط الذي ترتيبه (n-1) هي

$\frac{3}{10}$  فما قيمة (n) ؟

3) اوجد مجموع الاعداد الصحيحة التي اكبر من 100 واصغر من 1000 والتي لا تقبل القسمة على 5

بدون باق

4) ثلاثة اعداد تكون متتابعة هندسية مجموعها = 14 وحاصل ضربها = 64 فما هذه الاعداد ؟

5) اذا كان الزيت المستهلك من احد الخزانات في كل يوم =  $\frac{2}{3}$  ما يستهلك منه في اليوم السابق مباشرة

فإذا استهلك منه في اليوم الاول (243) لتراً فبعد كم يوم يستهلك منه (665) لتراً ؟

6) اذا كان  $\langle x, 7, \dots, y, 25 \rangle$  متتابعة حسابية وكانت  $y = 5x + 2$  جد عدد حدود المتتابعة

ومجموعها.



7) اي العبارات الاتية صائبة واي منها خاطئة

أ) اذا كان  $(r)$  اساس المتتابعة الهندسية  $\langle Un \rangle$  فان  $U5 = r^2 \cdot U3$

ب) اساس المتتابعة الهندسية  $\langle 1, -1, 1, -1, \dots \rangle$  هو  $(1)$

ج) اذا كانت  $\langle \dots, -\frac{1}{2}, 2, a, 32 \rangle$  متتابعة هندسية فان  $a = -8$

د) اذا كانت  $\langle 4, x, 16 \rangle$  متتابعة هندسية فان  $x = -8$

هـ) في المتتابعة حسابية  $\langle 3, 7, 11, \dots, x, 63 \rangle$  فان  $x = 59$

و) متتابعة حسابية حدها الثالث = 9 وحدها السابع = -3 فان حدها العاشر = -12 .

8) متتابعة حسابية مجموع الحدود السبعة الاولى منها  $\frac{35}{2}$  وحدودها الاول والثالث والسابع تكون متتابعة

هندسية جد المتتابعة الهندسية .

9) كم حداً يلزم اخذها ابتداءً من الحد الاول للمتتابعة الهندسية  $\langle \dots, 64, 96, 144 \rangle$  ليكون مجموعها

2059

10) متتابعة حسابية اساسها  $(3)$  وحدودها الثاني والرابع والثامن تكون متتابعة هندسية جد المتتابعة

الهندسية .

11) ما عدد الاوساط الهندسية بين  $(1536)$  ،  $(3)$  اذا كان الوسط الرابع  $(48)$  .

## الفصل الثالث CHAPTER 3

### المصفوفات والمحددات

#### [3-1] مقدمة

تلعب المصفوفات دوراً مهماً في علم الرياضيات وعلم الاحصاء وعلم الاقتصاد والمجالات الاخرى مثلاً الحاسبات ، وهندسة الكهرباء والاتصالات والعلوم الاخرى .

وكان للعالم الياباني سيكي كوا (1683) والعالم الالماني ليبنز (1693) الفضل في اكتشاف المصفوفات والمحددات وذلك من خلال العمل بطريقة الصينيين القدماء في حل المعادلات الآنية عن طريق استخدام اعواد من البوص ووضعها في مربعات بتنظيم معين مشابه لطريقة حساب محددة المصفوفة . لقد نشر ليبنز اول مثال عن المصفوفات والمحددات بعد ذلك بعشر سنوات .

أما العالم كيلبي (1821) فقد قدم سنة (1857) نوعاً آخر من الجبر هو جبر المصفوفات .

وفي عام 1750 طور كرامر طرق حل المعادلات الخطية بأستخدام المحددات ، ان للمحددات والمصفوفات تطبيقات كثيرة في الرياضيات . كهندسة التحويلات النقطية . والهندسة المستوية وهندسة الفضاء . وامتد هذا الاهتمام ليشمل مجالات عدة مثل : مجالات التخطيط والتجارة والاقتصاد والصناعة والزراعة وعلوم الفيزياء والاحياء وغيرها .

ومن أهم الاستخدامات الحديثة للمصفوفات كونها اسلوباً رئيسياً لتزويد الحاسب الالي بالبيانات وكذلك تبسيطها اساليب عمله الى حد كبير وفي هذا الفصل سنعرف المصفوفة وبعض العمليات عليها . ونعرف محدد المصفوفة وكيفية استخدامه في حل المعادلات الآتية بطريقة كرامر .

## [ 2 - 3 ] المصفوفات وخواصها Matrices and their properties

في اغلب مجالات الرياضيات والاحصاء والعلوم الاخرى يتم تبويب وتنظيم البيانات حيث ترتب بشكل قاعدة منظمة من البيانات .

**مثلاً** في الجدول الآتي اعداد تبين ترتيب أول أربعة فرق في الدوري العراقي لكرة القدم سابقاً بعد مرور 10 مباريات من بدء الدوري الممتاز . علماً أن الفوز له ثلاث نقاط والتعادل نقطة واحدة . والخسارة ليس لها نقطة .

اسم الفريق	عدد الفوز	التعادل	الخسارة	النقط
الزوراء	6	3	1	21
الجوية	5	2	3	17
الطلبة	5	1	4	16
الشرطة	4	3	3	15

لو اخذنا الاعداد فقط واهملنا التسميات لحصلنا على المصفوفة الآتية:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 & 21 \\ 5 & 2 & 3 & 17 \\ 5 & 1 & 4 & 16 \\ 4 & 3 & 3 & 15 \end{bmatrix}$$

نلاحظ ان العمود الاول يمثل اعداد المباريات التي فاز فيها كل فريق والصف الاول يحتوي على اعداد تمثل نتائج فريق الزوراء من فوز وتعادل وخسارة وعدد النقط .

**مثلاً** عندما نسأل عن عدد تعادلات نادي الطلبة فإن الصف الثالث يمثل نتائج نادي الطلبة والعمود الثاني يمثل عدد التعادلات فالعدد الموجود في الصف الثالث والعمود الثاني هو 1 يمثل عدد تعادلات نادي الطلبة .

وبنفس الطريقة نجد عدد الفوز لنادي الشرطة والذي هو في الصف الرابع والعمود الاول والعدد هو 4 .

وهذا التنظيم العددي للبيانات وبهذا الشكل يسمى بالمصفوفة **Matrix** .  
**مثال** : البيانات الآتية تبين المعدل (الوسط الحسابي) لدرجات الطلاب في احدى الثانويات في مادتي اللغة الانكليزية والرياضيات لامتحانات الوزارة للمرحلتين المتوسطة والاعدادية (العلمي فقط) للسنوات 2006 – 2007 – 2008

الرياضيات		اللغة الانكليزية		السنة
الاعدادي	المتوسطة	الاعدادي	المتوسطة	
69	61	63	58	2006
67	64	65	56	2007
71	68	69	62	2008

لو اخذنا المعدلات فقط دون ذكر التفاصيل نحصل على الجدول الآتي :

58	63	61	69
56	65	64	67
62	69	68	71

اعداد الصف الاول تمثل معدلات للعام 2006 ومعدلات العمود الثالث مثلاً تمثل درجات الرياضيات للمرحلة المتوسطة. وهكذا لبقية الصفوف والاعمدة.

فالتنظيم العددي للبيانات بهذا الشكل المستطيل يسمى بالمصفوفة **Matrix** .

### تعريف (1 - 3)

المصفوفة عبارة عن ترتيب للاعداد على شكل مستطيل مرتبة بشكل صفوف (rows) عددها  $m$  واعمدة (columns) عددها  $n$  حيث  $m, n$  اعداد صحيحة موجبة.  
يرمز للمصفوفة بالحرف الكبير  $A$  أو  $B$  وهكذا وتقرأ المصفوفة  $A$  أو  $B$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2 \times 2$$

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2 \times 3$$

مثلاً

نلاحظ عند كتابة المصفوفة نضع الاعداد بين قوسين كبيرين وعدد الصفوف  $m$  وعدد الاعمدة  $n$ .

## Order of a matrix

## [ 3 - 3 ] رتبة المصفوفة

لكل مصفوفة رتبة تتمثل بعدد الصفوف أولاً ثم عدد الاعمدة ثانياً وتكتب  $m \times n$  حيث عدد الصفوف  $m$  , عدد الاعمدة  $n$

$$A = \begin{bmatrix} 40 & 31 & 45 \\ 30 & 41 & 36 \end{bmatrix}$$

رتبتها  $2 \times 3$

مثلاً

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

رتبتها  $1 \times 3$

$$C = \begin{bmatrix} -2 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad 2 \times 1 \quad D = [7] \quad 1 \times 1 \quad J = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 6 \\ 7 & -2 & 1 \\ 8 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad 4 \times 3$$

الاعداد الموجودة في المصفوفة تدعى بعناصر المصفوفة (Elements)

مثلاً

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 16 & 4 & 5 \\ 15 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

رتبتها  $3 \times 3$

ماذا يعني  $a_{12}$  ؟ يعني العنصر الموجود في الصف الاول والعمود الثاني  $a_{12} = -2$



وكذلك  $a_{23}$  يعني العنصر الموجود في الصف الثاني والعمود الثالث

$$a_{23} = 5$$

وهكذا لبقية العناصر

ويمكن الكتابة بالصورة  $A = [a_{ij}]$  حيث  $i = 1, 2, 3, \dots, m$

$$j = 1, 2, 3, \dots, n$$

## تعريف (2 - 3) تساوي مصفوفتين

يقال للمصفوفتين انهما متساويتين اذا وفقط اذا تحقق الشرطان :

1 - المصفوفتان لهما نفس الرتبة .

2 - عناصر المصفوفة الاولى تساوي نظائرها من عناصر المصفوفة الثانية .

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & -\frac{1}{2} \\ -4 & 0.75 \end{bmatrix} \quad 2 \times 2 \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -0.5 \\ -4 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad 2 \times 2 \quad \text{مثلاً}$$

نلاحظ : 1 : ان المصفوفتين A, B لهما نفس الرتبة  $2 \times 2$

$$b_{21} = a_{21} = -4 \quad b_{12} = a_{12} = -0.5 = -\frac{1}{2} \quad : 2$$

اي انه كل عنصر في المصفوفة A يساوي نظيره في المصفوفة B

$$B = A \quad \therefore$$

بين هل ان المصفوفتين

مثال 1

$$A = \begin{bmatrix} 6 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0.25 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & \sin \frac{\pi}{6} \\ \cos \frac{\pi}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

متساويتان؟

الحل

نلاحظ ان المصفوفتين A, B لهما نفس الرتبة  $2 \times 2$  وكذلك

$$a_{11} = b_{11} = 6 \quad a_{12} = b_{12} = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$b_{21} = a_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4} \quad a_{22} = b_{22} = 0.25 = \frac{1}{4}$$

المصفوفتان A, B متساويتان ويقال  $A = B$

## مثال 2

هل ان المصفوفتين متساويتان في كل مما يأتي؟

a)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \\ 0.8 & 5 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \\ \frac{4}{5} & \frac{10}{2} \end{bmatrix}$$

b)  $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل

a- ∴ العنصر في الصف الاول العمود الاول في المصفوفة A هو 2

العنصر في الصف الاول العمود الاول في المصفوفة B هو 1

اي انه  $a_{11} \neq b_{11}$  لذلك  $A \neq B$

b- ∴ رتبة المصفوفة A هي  $2 \times 2$

ورتبة المصفوفة B هي  $1 \times 3$

∴ المصفوفة A  $\neq$  المصفوفة B

## مثال 3

جد قيم x, y حيث  $x, y \in \mathbb{R}$  في كل مما يأتي:

(1)  $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ y+8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2x-1 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}$

(2)  $\begin{bmatrix} 2x & 5 \\ 5y-1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4x & 2 \end{bmatrix}$

(3)  $\begin{bmatrix} x+1 & -4 \\ 0 & 3x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y-2 & -4 \\ 0 & y-1 \end{bmatrix}$

(1) ∴ العناصر المتناظرة في المصفوفتين متساويتين

∴  $2x - 1 = 7$

$2x - 7 + 1$

$2x = 8$

$x = 4$

∴ المصفوفتان متساويتان

كذلك  $y + 8 = 12$

$y - 12 = 8$

$y = 4$

(2) ∴ العناصر المتناظرة في المصفوفتين متساويتين

∴  $2x - 1$

∴  $x = \frac{1}{2}$

$5y - 1 = 4x$  كذلك

$5y - 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 5y - 1 + 2 \Rightarrow 5y - 3 \Rightarrow y = \frac{3}{5}$

(3)

∴ المصفوفتان متساويتان

∴  $x + 1 = y - 2$

وكذلك

$3x = y - 1$

$x - y = -3$  ..... 1

$3x - y = -1$  ..... 2

$x - y = -3$

$\mp 3x \pm y = \pm 1$

بالطرح

$-2x = -2$

∴  $x = \frac{-2}{-2}$

$x = 1$

نعوض في المعادلة (1) عن  $x$ 

$1 - y = -3$

$-y = -4$

$y = 4$

## [ 4 - 3 ] انواع المصفوفات

فيما يلي بعض انواع المصفوفات

1 - **المصفوفة المربعة Square Matrix** : هي مصفوفة تكون فيها عدد الصفوف  $m$  مساوي لعدد الاعمدة  $n$  اي انه  $m = n$  وتكون رتبة المصفوفة بالشكل  $m \times m$  أو  $n \times n$  مثلاً :

$$\text{مصفوفة مربعة } A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \quad 2 \times 2 \quad \text{مصفوفة مربعة } B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \\ 8 & 9 & 11 \end{bmatrix} \quad 3 \times 3$$

2 - **مصفوفة الصف Row Matrix** : وهي مصفوفة تتكون من صف واحد فقط أي  $m = 1$  مثلاً :

$$B = [-4 \ 5 \ 7 \ 2] \quad 1 \times 4 \quad A = [3 \ 2] \quad 1 \times 2$$

3 - **مصفوفة العمود Column Matrix** : وهي مصفوفة تتكون من عمود واحد فقط أي :  $n = 1$

مثلاً :

$$A = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} \quad 3 \times 1 \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad 2 \times 1$$

4 - **المصفوفة الصفرية Zero Matrix** : وهي مصفوفة جميع عناصرها مساوية للصفر مثلاً :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 2 \times 3 \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 2 \times 2 \quad C = [0 \ 0 \ 0] \quad 1 \times 3$$

5 - **مصفوفة الوحدة Unit Matrix** : هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها صفراً عدا عناصر القطر

الرئيسي تساوي 1

[ عناصر القطر الرئيسي هي  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$  ]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 3 \times 3 \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2 \times 2 \quad C = [1] \quad 1 \times 1 \quad \text{مثلاً}$$

لاحظ المثال الاتي : لدينا ثلاث طلاب متفوقين اشتركوا في اختبارات لأسئلة الذكاء وهي اسئلة علمية واسئلة رياضية واسئلة ثقافية وكانت درجاتهم في الاختبارات كالاتي :

اسئلة رياضية

$$\begin{bmatrix} 8 & \text{الطالب الاول} \\ 9 & \text{الطالب الثاني} \\ 7 & \text{الطالب الثالث} \end{bmatrix}$$

اسئلة ثقافية

$$\begin{bmatrix} 6 & \text{الطالب الاول} \\ 7 & \text{الطالب الثاني} \\ 9 & \text{الطالب الثالث} \end{bmatrix}$$

اسئلة علمية

$$\begin{bmatrix} 7 & \text{الطالب الاول} \\ 9 & \text{الطالب الثاني} \\ 8 & \text{الطالب الثالث} \end{bmatrix}$$

لمعرفة اي من الطلاب الثلاث فاز بالاختبارات وحصل على أعلى الدرجات نجمع الدرجات وكالاتي :

$$\begin{bmatrix} 21 \\ 25 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 + 6 + 7 \\ 9 + 7 + 9 \\ 7 + 9 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

نلاحظ ان الطالب الثاني حصل على اعلى الدرجات وهي 25 ويعتبر الفائز، لذلك عندما يراد جمع مصفوفتين يقتضي ان تكون لهما نفس الرتبة ثم نجمع كل عنصر في المصفوفة الاولى مع نظيره في المصفوفة الثانية.

### تعريف (3-3)

اذا كانت  $B = [bij]$  ,  $A = [aij]$  مصفوفتين لهما نفس الرتبة  $m \times n$  فان  $A + B = [aij + bij]$

### مثال 4

جد ناتج ما يلي :

1 -  $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

2 -  $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & \frac{3}{2} \\ 0.4 & 0.01 \end{bmatrix}$

3 -  $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -3 \\ 8 & \sqrt{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & -1 \\ 5 & 4\sqrt{3} \end{bmatrix}$

الحل

$$1 - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+1 & -1+8 \\ 5+2 & 4 + (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2 - \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & \frac{3}{2} \\ 0.4 & 0.01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{7}{3} & \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \\ 0.5 + 0.4 & 0.3 + 0.01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & \frac{4}{2} \\ 0.9 & 0.31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & 2 \\ 0.9 & 0.31 \end{bmatrix}$$

$$3 - \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -3 \\ 8 & \sqrt{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & -1 \\ 5 & 4\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & -4 \\ 13 & 5\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

مثال 5

$$\begin{bmatrix} 3 & x \\ 5 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

إذا علمت أن

جد قيمتي  $x, y$  حيث  $x, y \in \mathbb{R}$

الحل

$$\begin{bmatrix} 3 + 4 & x + 2 \\ 5 - 1 & y + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x + 2 = 6 \quad \text{وكذلك}$$

$$x = 6 - 2 \quad \text{وكذلك}$$

$$x = 4 \quad \text{وكذلك}$$

$$y + 3 = 2$$

$$y = 2 - 3$$

$$y = -1$$



## مثال 6

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

جد كل من: **1- A+B**      **2- A + C**      **3- B + C**

الحل

$$1- \quad A + B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+1 & 5+(-2) \\ 2+4 & -1+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$2- \quad A + C = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+0 & 5+8 \\ 2+4 & -1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 13 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$3- \quad B + C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

### [ 3 - 6 ] نظير المصفوفة بالنسبة لعملية الجمع

إذا كانت المصفوفة  $A = [ a_{ij} ]$  فإن  $-A = [ -a_{ij} ]$  تسمى بالنظير الجمعي للمصفوفة  $A$  مثلاً إذا كانت  $A_{2 \times 2}$  مصفوفة فإن  $-A_{2 \times 2}$  تسمى نظير المصفوفة  $A$  بالنسبة لعملية الجمع حيث

$$A + (-A) = (-A) + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

أي أنه إذا كان ناتج جمع مصفوفتين هو مصفوفة صفرية فيقال إن إحدى المصفوفتين هي نظير المصفوفة الأخرى بالنسبة لعملية الجمع وتسمى المصفوفة الصفرية بالمصفوفة المحايدة في عملية الجمع (Neutral Matrix).

## مثال 7

ما هو النظير الجمعي للمصفوفات الآتية؟

$$1) \quad A = \begin{bmatrix} -0.8 & 2 \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$2) \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

الحل

$$A = \begin{bmatrix} -0.8 & 2 \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

∴ / 1

∴ نظير المصفوفة A بالنسبة لعملية الجمع هي المصفوفة -A

$$-A = \begin{bmatrix} 0.8 & -2 \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} -0.8 + 0.8 & 2 + (-2) \\ \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) & -1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{لأنه}$$

$$-B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 \\ -3 & 4 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{فأن نظيرها الجمعي} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{∴ المصفوفة} \quad / 2$$

$$B + (-B) = \begin{bmatrix} -2 + 2 & 5 + (-5) & 1 + (-1) \\ 3 + (-3) & -4 + 4 & \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) \end{bmatrix} \quad \text{لأنه}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-B + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{وكذلك}$$

ملاحظة

1- عند إيجاد النظير الجمعي لأي مصفوفة نغير إشارة كل عنصر في المصفوفة أي أنه نأخذ النظير الجمعي لكل عنصر في المصفوفة.

2- إذا كانت A, B مصفوفتان لهما نفس الرتبة فإن  $A - B = A + (-B)$



## 7-3 | خواص عملية الجمع على المصفوفات

1- عند جمع مصفوفتين لهما نفس الرتبة  $m \times n$  فالنتيجة هو مصفوفة لها نفس الرتبة  $m \times n$  مثلاً:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 3} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & -7 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 9 & 4 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

2- عملية جمع مصفوفتين تتمتع بخاصية الإبدال (Commutative) إذا كان  $A, B$  مصفوفتان لهما نفس الرتبة  $m \times n$  فإن  $A + B = B + A$  لأنه :

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \quad a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$$

وتتمتع بخواص جمع الأعداد الحقيقية  $[b_{ij} + a_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}]$  ∴  $A + B = B + A$

مثال 8

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

ليكن

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 + (-4) & 2 + 7 \\ 1 + 5 & 0 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

نلاحظ

$$B + A = \begin{bmatrix} -4 + 3 & 7 + 2 \\ 5 + 1 & 8 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

وكذلك

$$A + B = B + A \quad \text{أي أنه}$$

3- عملية جمع المصفوفات تتمتع بخاصية التجميع (Associative) إذا كانت  $A, B, C$  مصفوفات لها نفس الرتبة  $m \times n$  فإن :

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

مثال 9

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$$

لتكن

جد :

1/  $(A + B) + C$

2/  $A + (B + C)$

الحل

$$(A+B) + C = \begin{bmatrix} -4+0 & 2+(-2) \\ 5+3 & 1+7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+(-4) & 0+1 \\ 8+(-3) & 8+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 1 \\ 5 & 16 \end{bmatrix}$$

$$A + (B+C) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0+(-4) & -2+1 \\ 3+(-3) & 7+8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+(-4) & 2+(-1) \\ 5+0 & 1+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 1 \\ 5 & 16 \end{bmatrix}$$

نلاحظ من 1 ، 2 أن :  $(A + B) + C = A + (B + C)$

4 - وجود المصفوفة المحايدة في عملية الجمع وهي المصفوفة الصفرية :

لتكن A مصفوفة من الرتبة  $m \times n$  توجد مصفوفة صفرية من الرتبة  $m \times n$  بحيث

$$A + \text{المصفوفة الصفرية } m \times n = m \times n \text{ المصفوفة الصفرية} + A = A$$

مثلاً لتكن

$$\text{محايدة} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{نلاحظ ان المصفوفة} \quad A = \begin{bmatrix} -\sqrt{5} & 4 \\ 6 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{5} & 4 \\ 6 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{5}+0 & 4+0 \\ 6+0 & -2+0 \\ 5+0 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{5} & 4 \\ 6 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

وكذلك

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sqrt{5} & 4 \\ 6 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{5} & 4 \\ 6 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

5 - وجود النظير الجمعي للمصفوفة (Additive Inverse) :

إذا كانت A مصفوفة من الرتبة  $m \times n$  توجد مصفوفة  $-A$  من نفس الرتبة  $m \times n$  تسمى بالنظير

الجمعي للمصفوفة A حيث  $A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{0}$  ,  $\mathbf{0}$  مصفوفة صفرية من الرتبة  $m \times n$



## [ 3 - 8 ] ضرب المصفوفة بعدد حقيقي

لاحظ عزيزي الطالب هذا المثال

محل لبيع المرطبات وضع قائمة تمثل الاسعار (بالألف دينار) لانواع واحجام المرطبات التي يبيعهها وهي كالاتي:

قدح صغير	قدح وسط	قدح كبير	
2.5	3.5	5	بالكاكاو
2	3	4.5	مشكل
3	4	6	حليب بالفستق

اراد ان يرفع اسعار المرطبات. اقترح ان يضرب هذه الاسعار بالعدد 1.5 فحصل على الجدول الآتي:

قدح صغير	قدح وسط	قدح كبير	
3.75	5.25	7.5	بالكاكاو
3	4.5	6.75	مشكل
4.5	6	9	حليب بالفستق

اي انه ضرب كل عدد في القائمة بالعدد 1.5 وحصل على هذه الاسعار.

### تعريف (3-4)

اذا كانت  $A = [a_{ij}]$  مصفوفة من الرتبة  $m \times n$  و  $k \in \mathbb{R}$

فإن  $k \cdot A = [k \cdot a_{ij}]$

مثال 10

جد ناتج

$$3 \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ \frac{1}{3} & 4 \end{bmatrix}$$

الحل

$$3 \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ \frac{1}{3} & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times (-2) & 3 \times 7 \\ 3 \times \frac{1}{3} & 3 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 21 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$$

مثال 11

إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 5 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad L = -2, \quad K = \sqrt{2}$$

جد :

1 /  $K \cdot A$       2 /  $L \cdot A$       3 /  $KL \cdot A$

الحل

$$1/ K \cdot A = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 5 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} & \sqrt{2} \times 5 \\ \sqrt{2} \times 1 & \sqrt{2} \times \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$$

$$2/ L \cdot A = -2 \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 5 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \times 3\sqrt{2} & -2 \times 5 \\ -2 \times 1 & -2 \times \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\sqrt{2} & -10 \\ -2 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$3/ KL \cdot A = \sqrt{2} \times (-2) \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 5 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \times 5 \\ -2\sqrt{2} \times 1 & -2\sqrt{2} \times \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -10\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -4 \end{bmatrix}$$

إلى أبي ولأمي .. ساهما في حماية البيئة لتضمننا لي  
مستقبل أفضل.

## [ 3 - 8 - 1 ] بعض الخواص لعملية ضرب عدد في مصفوفة

ليكن  $A, B$  مصفوفتين لهما نفس الرتبة .  $K, L \in \mathbb{R}$

- 1/  $K [ A + B ] = K A + K B$
- 2/  $(K L) A = K (L A)$
- 3/  $(K + L) A = K A + L A$
- 4/  $K A = K B \quad K \neq 0 \quad \text{فإن } A = B$
- 5/  $K A =$  مصفوفة صفرية  $A$  أو  $K = 0$  فإن  $K = 0$  مصفوفة صفرية

مثال 12

جد المصفوفة  $A$  اذا علمت ان

$$-5 ( A - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} ) = -6A + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل

$$-5 A + 5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -6A + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$-5 A + \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} = -6A + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$6A - 5A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 + (-5) & 1 + (-5) \\ -1 + 5 & 5 + 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

## تمارين [ 3 - 1 ]

س1: جد قيمتي  $x, y$  حيث  $x, y \in \mathbb{R}$  في كل مما يأتي:

$$1) \begin{bmatrix} 3x + y & 0.2 \\ 3\sqrt{2} & x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & \frac{1}{5} \\ 3\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$2) \begin{bmatrix} \sin x & 3 \\ -2 & \cos x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 3 \\ -2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$3) \begin{bmatrix} x^2 & 6 \\ y^2 - y & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 15 & 4 \end{bmatrix}$$

س2: جد ناتج ما يلي:

$$1) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 & 6 \\ -11 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2) 4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$3) \begin{bmatrix} 3\sqrt{5} & -\frac{1}{4} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sqrt{5} & \frac{1}{8} \\ \sqrt{2} & 3\sqrt{3} \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$4) \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1.6 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0.9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

س3: جد المصفوفة  $X$  في كل مما يأتي:

$$1) 2x + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2) x - \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \\ 6 & -1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 7 & 5 \\ 6 & 8 & -2 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

س4: إذا كانت  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$  جد المصفوفات

الآتية:

$$1) 2A + 3B + C$$

$$2) A - B + 5C$$

$$3) 3A + B + C$$

$$4) -A + 2B - C$$



## [ 9 - 3 ] المحددات وخواصها Determinants and their properties

محدد المصفوفة **The Determinant of A Matrix**: هو عدد حقيقي يستخرج من المصفوفة المربعة.

### تعريف

لتكن المصفوفة  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  فإن  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  يسمى محدد المصفوفة ويرمز له  $\Delta$  وأن

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad \text{عدد حقيقي}$$

### مثال 13

جد قيمة كل مما يأتي:

$$1) \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -3 \\ 2 & 3\sqrt{2} \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} \quad 4) \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix}$$

الحل

$$1) \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 - 1 \times (-2) = 12 + 2 = 14$$

$$2) \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -3 \\ 2 & 3\sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} - (-3) \times 2 = 6 + 6 = 12$$

$$3) \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} - 3 \times 1 = \frac{3}{8} - 3 = \frac{3 - 24}{8} = -\frac{21}{8}$$

$$4) \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 3 \times 10 - 5 \times 6 = 30 - 30 = 0$$

ملاحظة  $\square$

إذا كان محدد مصفوفة ما يساوي صفراً فتسمى المصفوفة بالمصفوفة المنفردة (Singular Matrix)

مثال 14

جد قيمة  $h$  في كل مما يأتي  $h \in \mathbb{R}$

$$1) \quad \begin{vmatrix} 2h+3 & -1 \\ 2 & h \end{vmatrix} = 1$$

الحل

$$(2h+3) \times h - (-1) \times 2 = 1$$

$$2h^2 + 3h + 2 = 1$$

$$2h^2 + 3h + 2 - 1 = 0$$

$$2h^2 + 3h + 1 = 0$$

$$(2h + 1)(h + 1) = 0$$

$$\therefore 2h + 1 = 0 \quad \text{or} \quad h + 1 = 0$$

$$2h = -1$$

$$h = -1$$

$$h = -\frac{1}{2}$$

$$2) \quad \begin{vmatrix} 3h & -2 \\ 3 & h \end{vmatrix} = 9$$

الحل

$$3h^2 + 6 = 9$$

$$3h^2 = 9 - 6$$

$$h^2 = \frac{3}{3}$$

$$h^2 = 1$$

$$\therefore h = \mp 1$$

تستخدم المحددات في حل معادلتين من الدرجة الأولى ذات متغيرين حيث

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2 \quad \text{اعداد حقيقية } a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \times b_2 \\ \times b_1 \end{array}$$

نحصل

$$a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2$$

$$\mp a_2 b_1 x \mp b_1 b_2 y = \mp c_2 b_1 \quad \text{بالطرح}$$

$$a_1 b_2 x - a_2 b_1 x = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

$$x [ a_1 b_2 - a_2 b_1 ] = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

$$x = c_1 b_2 - c_2 b_1 / a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta \quad \text{لكن}$$

ويمثل محدد مصفوفة معاملات المتغيرين  $x, y$  في المعادلتين . وكذلك

$$c_1 b_2 - c_2 b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta x$$

ويمثل محدد مصفوفة المعاملات المطلقة (الطرف الأيمن) ومعاملات المتغير  $x$  في المعادلتين . لذلك :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \text{الأيمن}$$

وبنفس الطريقة السابقة يمكن ضرب المعادلة الأولى بالمعامل  $a_2$  والمعادلة الثانية بالمعامل  $a_1$  ونكمل الحل

بالطرح نحصل على :

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \Delta y \text{ ويسمى}$$

$$\therefore y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

(وتسمى هذه الطريقة بطريقة كرامر)

نلاحظ قبل تطبيق القانون يجب ان تكون المعادلتين مرتبتين بحيث تكون الحدود التي فيها المتغيرين  $x, y$  في الطرف الايسر والمتشابهة احدهما تحت الاخر والعدد الخالي من المتغيرين (العدد المطلق) في الطرف الايمن.



حل المعادلتين الآتيتين بطريقة المحددات (كرامر)

$$5x - 2y - 11 = 0, \quad 2x + 3y = 12$$

الحل

نرتب المعادلتين اولاً وكما يلي:

$$5x - 2y = 11$$

$$2x + 3y = 12$$

نجد

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \times 3 - (-2) \times 2 = 15 + 4 = 19$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} = 11 \times 3 - (-2) \times 12 = 33 + 24 = 57$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 5 \times 12 - 11 \times 2 = 60 - 22 = 38$$

$$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{57}{19} = 3$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{38}{19} = 2$$

$$\therefore x = 3, \quad y = 2$$



## مثال 16

جد قيمتي  $x$ ،  $y$  التي تحقق حل المعادلتين الآتيتين بطريقة كرامر:

$$3x + 5y = -1$$

$$x + 2y = 0$$

الحل نلاحظ ان المعادلتين مرتبتين:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-1 \times 2 - 5 \times 0}{3 \times 2 - 5 \times 1} = \frac{-2 - 0}{6 - 5} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{3 \times 0 - (-1) \times 1}{1} = \frac{0 + 1}{1} = 1$$

$$\therefore x = -2, y = 1$$

## مثال 17

حل المعادلتين الآتيتين آنياً بطريقة كرامر:

$$5x - 2y - 3 = 0, \quad y - 3 = x$$

الحل نرتب المعادلتين

$$5x - 2y = 3$$

$$-x + y = 3$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3 + 6}{5 - 2} = \frac{9}{3} = 3$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{5 - 2} = \frac{15 - (-3)}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

$$\therefore x = 3, y = 6$$

حل المعادلتين آنياً بطريقة كرامر:

$$2x + 5y = 12 \quad , \quad 4x + 3y = 10$$

الحل نلاحظ ان المعادلتين مرتبتين ، نجد :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 5 \\ 10 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{12 \times 3 - 5 \times 10}{2 \times 3 - 5 \times 4} = \frac{36 - 50}{6 - 20} = \frac{-14}{-14} = 1$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{2 \times 10 - 12 \times 4}{-14} = \frac{20 - 48}{-14} = \frac{-28}{-14} = 2$$

$$\therefore x = 1 \quad , \quad y = 2$$

## [ 11 - 3 ] محددات المصفوفة المربعة $3 \times 3$

يمكن أيضاً إيجاد محدد المصفوفة المربعة  $3 \times 3$  وبالشكل :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

والتي هي :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

مثال 19  
جد قيمة

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

الحل

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -2 [ 1 \times 0 - 2 \times (-3) ] - 5 [ 3 \times 0 - 2 \times 4 ] + 4 [ 3 \times (-3) - 1 \times 4 ]$$

$$= -2 [ 0 + 6 ] - 5 [ 0 - 8 ] + 4 [ -9 - 4 ]$$

$$= -12 + 40 - 52 = -24$$



توجد طريقة أخرى لاجاد محدد المصفوفة  $3 \times 3$  وكما يلي:

1 / نكرر كتابة العمودين الاول والثاني

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array}$$

نحدد الاقطار الرئيسية بأسهم وبلون يختلف عن لون الاقطار المعاكسة

2 / نجد حاصل ضرب عناصر الاقطار الرئيسية الثلاث والتي هي :  $a_1 b_2 c_3$  ,  $b_1 c_2 a_3$  ,  $c_1 a_2 b_3$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array}$$

3 / نجد  $H_1$  الذي يمثل مجموع النواتج الثلاث :

$$H_1 = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3$$

4 / نجد حاصل ضرب عناصر الاقطار المعاكسة الثلاث والتي هي :

$$c_1 b_2 a_3 , a_1 c_2 b_3 , b_1 a_2 c_3$$

5 / نجد  $H_2$  ويمثل مجموع النواتج الثلاث :

$$H_2 = c_1 b_2 a_3 + a_1 c_2 b_3 + b_1 a_2 c_3$$

واخيراً:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = H_1 - H_2$$

سنحل المثال السابق بالطريقة الثانية :

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{cc} -2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{array}$$

نجد  $H_1$  حيث :

$$H_1 = [ (-2 \times 1 \times 0) + (5 \times 2 \times 4) + (4 \times 3 \times (-3)) ]$$

$$= 0 + 40 - 36 = 4$$

$$H_2 = [ (4 \times 1 \times 4) + ((-2) \times 2 \times (-3)) + (5 \times 3 \times 0) ]$$

$$= 16 + 12 + 0 = 28$$

$$\therefore \begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = H_1 - H_2 = 4 - 28 = -24$$

ملاحظة 

سوف نستخدم في إيجاد قيمة محدد المصفوفة  $3 \times 3$  على الطريقة الثانية

مثال 20   
جد قيمة :

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & -8 \\ -5 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & -8 \\ -5 & 2 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \rightarrow 3 & -2 \\ \rightarrow 6 & 4 \\ \rightarrow -5 & 2 \end{matrix}$$

الحل

$$H_1 = [ (3 \times 4 \times 8) + ((-2) \times (-8) \times (-5)) + (4 \times 6 \times 2) ]$$

$$= 96 - 80 + 48 = 64$$

$$H_2 = [ (4 \times 4 \times (-5)) + (3 \times (-8) \times 2) + ((-2) \times 6 \times 8) ]$$

$$= -80 - 48 - 96 = -224$$



$$\therefore \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & -8 \\ -5 & 2 & 8 \end{vmatrix} = H_1 - H_2 = 64 - (-224) = 288$$

مثال 21  
جد قيمة

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

الحل

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{نجد } H_1 = (1 \times (-3) \times 5) + (2 \times 0 \times 3) + (3 \times (-2) \times 2) \\ = -15 + 0 - 12 = -27$$

$$H_2 = (3 \times (-3) \times 3) + (1 \times 0 \times 2) + (2 \times (-2) \times 5) \\ = -27 + 0 - 20 = -47$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = H_1 - H_2 = (-27) - (-47) = -27 + 47 = 20$$

## 12 - 3 | استخدام المحددات في حل ثلاث معادلات آتياً من الدرجة الأولى

بثلاث متغيرات وتسمى طريقة كرامر

تعلمنا سابقاً حل معادلتين آتياً وبطريقة المحددات (كرامر) وفي موضوعنا هذا سنتعلم كيفية حل ثلاث معادلات من الدرجة الأولى وبثلاث متغيرات باستخدام المحددات وكما يلي:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = h_1$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = h_2$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = h_3$$

يمكن بعد ضرب المعادلات بمعاملات عددية وبطريقة الحذف كما سبق في حل المعادلتين الآتيتين يمكن الحصول على القوانين الآتية لإيجاد قيم  $x, y, z$  هي محدد مصفوفة معاملات  $x, y, z$  في الطرف الأيمن

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

$\Delta x$  هي مشابه محدد  $\Delta$  بحيث تحل المعاملات العددية في الطرف الأيمن بدلاً من عمود معاملات  $x$   
 $\Delta y$  هي مشابه محدد  $\Delta$  بحيث تحل المعاملات العددية في الطرف الأيسر بدلاً من عمود معاملات  $y$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

$\Delta z$  هي محدد المصفوفة التي تمثل مصفوفة  $\Delta$  بحيث تحل المعاملات العددية في الطرف الايسر بدلاً من

عمود معاملات  $z$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

ملاحظة

- 1- يجب ترتيب حدود المعاملات بحيث المعاملات العددية في الطرف الايمن والحدود التي تحتوي  $z, y, x$  في الطرف الايسر ومرتبة بنفس الطريقة في المعاملات الثلاث .
- 2- إذا كانت قيمة  $\Delta = 0$  صفر في حل معادلتين آنياً أو ثلاث معادلات فإن المعادلات ليس لها حل في  $R$  .

مثال 22

حل المعادلات الثلاث وبطريقة المحددات في كل مما يأتي :

$$1) \quad x + 4y + 3z = 1$$

$$2x + 5y + 4z = 4$$

$$x - 3y - 2z = 5$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & | & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & | & 4 & 5 \\ 5 & -3 & -2 & | & 5 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & | & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & | & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -2 & | & 1 & -3 \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{[-10 + 80 - 36] - [75 + (-12) - 32]}{[-10 + 16 - 18] - [15 - 12 - 16]} = \frac{34 - 31}{-12 + 13} = \frac{3}{1} = 3$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & | & 2 & 4 \\ 1 & 5 & -2 & | & 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & | & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & | & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -2 & | & 1 & -3 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{[-8 + 4 + 30] - [12 + 20 - 4]}{[-10 + 16 - 18] - [15 - 12 - 16]} = \frac{26 - 28}{-12 + 13} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & | & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & | & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 5 & | & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$z = \frac{[25 + 16 - 6] - [5 - 12 + 40]}{1} = \frac{35 - 33}{1} = 2$$

$$x = 3, y = -2, z = 2$$



$$2) \quad y - 2x + 3 = z, \quad 3x - 4 = 2y - 2z, \quad x + y + z = 9$$

الحل نرتب المعادلات الثلاث وكالاتي:

$$-2x + y - z = -3$$

$$3x - 2y + 2z = 4$$

$$x + y + z = 9$$

اولاً نجد قيمة  $\Delta$  حيث

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = [4 + 2 + (-3)] - [2 + (-4) + 3] = 3 - 1 = 2$$

$$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 4 & -2 \\ 9 & 1 & 1 & 9 & 1 \end{vmatrix}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{[6 + 18 + (-4)] - [18 + (-6) + 4]}{2} = \frac{20 - 16}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -3 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 1 & 1 & 9 \end{vmatrix}}{2}$$

$$y = \frac{[-8 + (-6) + (-27)] - [(-4) + (-36) + (-9)]}{2} = \frac{-41 + 49}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 & | & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & | & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 9 & | & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2}$$

$$z = \frac{[36 + 4 + (-9)] - [6 + (-8) + 27]}{2} = \frac{31 - 25}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\therefore x = 2, y = 4, z = 3$$

$$3) \quad 2x - 4y + 5z = 5, \quad x + 3y - 2z + 10 = 0, \quad -3x - 2y - 4z + 6 = 0$$

الحل

نرتب المعادلات أولاً وكما يلي :

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 5z &= 5 \\ x + 3y - 2z &= -10 \\ -3x - 2y - 4z &= -6 \end{aligned}$$

نجد

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 & | & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & | & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -4 & | & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = [-24 + (-24) + (-10)] - [-45 + 8 + 16] = [-58] - [-21] = -37$$

ثم نجد كلاً من  $x$  و  $y$  و  $z$  وكما يلي :



$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -4 & 5 & | & 5 & -4 \\ -10 & 3 & -2 & | & -10 & 3 \\ -6 & -2 & -4 & | & -6 & -2 \end{vmatrix}}{-37}$$

$$x = \frac{[-60 + (-48) + 100] - [-90 + 20 + (-160)]}{-37} = \frac{[-8] - [-230]}{-37} = \frac{222}{-37} = -6$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 & | & 2 & 5 \\ 1 & -10 & -2 & | & 1 & -10 \\ -3 & -6 & -4 & | & -3 & -6 \end{vmatrix}}{-37} = \frac{[80 + 30 + (-30)] - [150 + 24 + (-20)]}{-37}$$

$$y = \frac{80 - 154}{-37} = \frac{-74}{-37} = 2$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 & | & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -10 & | & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -6 & | & -3 & -2 \end{vmatrix}}{-37} = \frac{[-36 + (-120) + (-10)] - [-45 + 40 + 24]}{-37}$$

$$z = \frac{-166 - 19}{-37} = \frac{-185}{-37} = 5$$

$$\therefore x = -6, y = 2, z = 5$$



## تمارين [ 3-2 ]

س1: جد قيمة كل مما يأتي وبين اي منها هو محدد لمصفوفة منفردة:

$$1) \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{vmatrix}$$

$$2) \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 5 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$3) \begin{vmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$4) \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -8 \end{vmatrix}$$

$$5) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

س2: حل المعادلات الآتية وجد قيمة x في كل مما يأتي:

$$1) \begin{vmatrix} 3x & 3 \\ 9 & 4x \end{vmatrix} = 0$$

$$2) \begin{vmatrix} x & x \\ x-1 & x-5 \end{vmatrix} = 8$$

$$3) \begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 5 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 3$$

س3: حل المعادلتين الآتيتين في كل مما يأتي وبطريقة كرامر:

$$1) 5x + 3 = 4y, \quad 3x + y = 5$$

$$2) 2x - 3 = 3y, \quad x - 1 = 2y$$

$$3) 4y + 2x = 0, \quad 3x + 5y = -1$$

$$4) 2x + 3y = 6, \quad x + y = 1$$

س4: حل المعادلات الثلاث بايجاد قيم x, y, z وبطريقة المحددات في كل مما يأتي:

$$1) 3x + y - z = 2, \quad 2x + 3y + z = 11, \quad x - y + 3z = 8$$

$$2) 4y + z = 0, \quad 2x + z = -8, \quad 5x + 6y = 2z + 4$$

$$3) x + 3y = 2z - 2, \quad 4x + 2y = z - 3, \quad 2x - y + z = 0$$

$$4) 3x + y - z = -1, \quad 5x + 2y + z = 8, \quad x - 3y - 4z = -5$$

## الفصل الرابع CHAPTER 4

Statistics

الإحصاء

### [4-1] مقدمة

كلمة الإحصاء تعني علم جمع البيانات وتحليلها وتفسيرها ، ولعلم الإحصاء مجالان رئيسان : ( الإحصاء الوصفي ) الذي يهتم بوصف البيانات و( الإحصاء الاستدلالي ) الذي يهتم بتفسير البيانات وتحليلها بهدف الوصول الى استنتاجات او تنبؤات منها .

لإحصاء دور مهم وفعال في حل كثير من المشاكل : الادارية والاقتصادية والحياتية والطبية وغيرها . . . . . ولاهمية هذا الدور يتوجب علينا دراسته وفهم حقيقته .

لقد استخدم البابليون ( 1800 قبل الميلاد ) الواحاً من الطين كسجلات للغلال الزراعية وما يجنونه من بيعها كما ان المصريين القدماء جمعوا بيانات عن اعداد مواطنيهم وثرواتهم قبل بناءهم للآهرامات نحو القرن الحادي والثلاثون قبل الميلاد .

وكان للحضارة الرومانية اول حكومة قامت بجمع البيانات وتحليلها حول اعداد السكان ومساحات المناطق التي تقع تحت سيطرة الرومان والثروات الحيوانية والزراعية والمعدنية المتوفرة فيها .

(مراجعة)

لكل مجموعة من الاعداد وسطاً حسابياً وان اعداد هذه المجموعة ربما تكون مجتمعة بالقرب منه او مبتعدة عنه فاذا كانت هذه الاعداد متجمعة بالقرب من وسطها الحسابي فان مقدار تشتتها ضئيل . واذا كانت هذه الاعداد مبتعدة عن وسطها الحسابي فان تشتتها كبير .

ومن مقاييس التشتت المدى (Range) ، والانحراف المعياري (Standard Deviation) والانحراف المتوسط والتباين . وسندرس الانحراف المعياري

## Standard Deviation

## [4-2-1] الانحراف المعياري

يعرف الانحراف المعياري بانه الجذر التربيعي لمتوسط مجموع انحرافات قيم المتغير عن وسطها الحسابي (Arithmetic Mean) وسنرمز للانحراف المعياري بالرمز (S) .

## حساب الانحراف المعياري

- 1) نستخرج الوسط الحسابي ( $\bar{X}$ ) لتلك القيم
  - 2) نستخرج انحراف كل قيمة عن وسطها الحسابي ( $X-\bar{X}$ )
  - 3) نربع الانحرافات  $(X-\bar{X})^2$
  - 4) نستخرج مجموع مربع الانحرافات  $\sum (X-\bar{X})^2$
  - 5) نقسم الناتج على عدد القيم  $\frac{\sum (X-\bar{X})^2}{n}$
  - 6) نأخذ الجذر التربيعي الموجب للناتج الاخير في حالة عدم وجود تكرار
- $$S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2} \text{ أو } S = \sqrt{\frac{\sum (X-\bar{X})^2}{n}}$$
- 7) في حالة وجود تكرارات .

حيث أن  $f$  تمثل التكرارات

$$S = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}}$$

مثال 1

أحسب الانحراف المعياري للبيانات 1, 3, 5, 7, 9

الحل

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+3+5+7+9}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$x$	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
1	-4	16
3	-2	4
5	0	0
7	2	4
9	4	16
25		40

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{40}{5}} = 2\sqrt{2}$$

## مثال 2

أحسب الانحراف المعياري لمجموعة من الأشخاص من الجدول التالي

الفئات	12-	22-	32-	42-	52-	62-72
التكرار f	3	5	8	4	2	1

الحل

$f(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})^2$	$x-\bar{x}$	$fx$	x مركز الفئة	f	الفئات
1200	400	-20	51	17	3	12-
500	100	-10	135	27	5	22-
0	0	0	296	37	8	32-
400	100	10	188	47	4	42-
800	400	20	114	57	2	52-
900	900	30	67	67	1	62-72
3800			851		23	

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{851}{23} = 37$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{3800}{23}} = \sqrt{165.2} = 12.8$$

## تمارين ( 1 - 4 )

س1 / جد الوسط الحسابي للقيم التالية 5 ، 8 ، 9 ، 11 ، 12

س2 / من الجدول التالي ، احسب الوسط الحسابي

العمر	8	9	11	12
عدد الاشخاص	3	5	4	2

س3 / احسب الانحراف المعياري للقيم 3، 2، 1، 4، 5

س4 / لدينا الجدول التالي

الفئة	20-	24-	28-	32-	36-	40-	44-48
التكرار	4	7	5	8	6	12	8

اوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري

## المقدمة

لقد استخدمنا سابقاً الطرائق والاساليب المختلفة في جمع وتصنيف وتبويب البيانات وكذلك إستخراج بعض المقاييس التي تعطي فكرة أكثر وضوحاً مثل مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت إن هذه الطرق والاساليب إستندت على البيانات المجمعة من متغير واحد فقط سواء كانت هذه البيانات مبوبة في توزيع تكراري ام غير ذلك وفي أحوال كثيرة نحتاج دراسة متغيرين او اكثر في ان واحد .

## Linear correlation

## [ 4-3-1 ] الارتباط الخطي

إن مفهوم الارتباط الخطي يقتصر بحالة وجود متغيرين أو أكثر تقترب مع بعضها بعلاقات خطية معينة على سبيل المثال العلاقة بين طول الشخص (cm) وكتلته (Kgm) . العلاقة بين تحصيل الطالب المتخرج من الكلية والمستوى المعاشي لاسرته . العلاقة بين نسبة الشفاء من مرض معين وكمية الجرعة التي تناولها من الدواء .

إذا كان المتغيرين المرتبطين يتغيران بنفس الاتجاه أي زيادة أو نقصان في احدهما يؤدي إلى زيادة أو نقصان في الآخر ويقال ان الارتباط موجب ( طردي ) على سبيل المثال زيادة طول شخص يتوقع ان يقابلها زيادة في وزنه . وانخفاض في دخل الفرد يتوقع منه انخفاض في أنفاقه على بعض السلع . أما اذا كان المتغيرين المرتبطين يتغيران باتجاه معاكس زيادة أو نقصان في احدهما يؤدي إلى نقصان أو زيادة في الآخر عندئذ يقال ان الارتباط بينهما سالب ( عكسي ) وعلى سبيل المثال . زيادة في سعر الوحدة من سلعة معينة يتوقع ان يؤدي إلى انخفاض في الطلب على تلك السلعة . وان انخفاض في درجات الحرارة يتوقع ان يؤدي إلى زيادة الطلب على الوقود . فيقال إن الارتباط بين متغيرين تام ( perfect ) إذا كان التغير في احدهما متناسب مع التغير في الآخر ومثال على ذلك . الارتباط بين درجة الحرارة المتوية ودرجة الحرارة الفهرنهايتية هو ارتباط تام .

$$F = \frac{9}{5} C + 32$$

بحسب العلاقة بين درجة الحرارة المئوية والفهرنهايتية

ويتم حساب الارتباط من خلال معامل الارتباط

## correlation coefficient

## [4-4] معامل الارتباط

يعرف معامل الارتباط بأنه درجة او قيمة العلاقة التي تربط بين متغيرين او اكثر مع بعض وهي قيمة حقيقية خالية من وحدات قياس المتغيرات المرتبطة بعلاقة .

### [4-4-1] معامل الارتباط الخطي البسيط

## simple correlation coefficient

يعرف الارتباط الخطي البسيط بأنه الدرجة او القيمة العددية للعلاقة بين متغيرين فقط .

### [4-4-2] معامل الارتباط بيرسون

يعد معامل الارتباط بيرسون من معاملات الارتباط التي تستخدم في حساب العلاقة بين متغيرين متصلين وعلى سبيل المثال الطلبة الذين يحصلون على درجات عالية في الامتحانات المدرسية فانهم يحصلون على درجات عالية في الامتحانات الوزارية . والعلاقة بين تحصيل الطلبة في مادة الرياضيات وبين قدراتهم على حل المشكلات . والعلاقة بين التحصيل العلمي والذكاء ويرمز لمعامل الارتباط (r) ، فاذا كان لدينا n من أزواج القيم  $(X_1, Y_1)$  ،  $(X_2, Y_2)$  ، ... ،  $(X_n, Y_n)$  من الظاهرتين (X) ، (Y) فان معامل الارتباط بيرسون يحسب باحدى الصيغتين :

$$1) r = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{S_x \cdot S_y}$$

$$2) r = \frac{\frac{1}{n} \sum x_i y_i - \bar{x} \bar{y}}{S_x \cdot S_y}$$

حيث (r) معامل ارتباط بيرسون

$$\bar{X} = \text{الوسط الحسابي للظاهرة } X$$

$$\bar{Y} = \text{الوسط الحسابي للظاهرة } Y$$

$$S_x = \text{الانحراف المعياري للظاهرة } X$$

$$S_y = \text{الانحراف المعياري للظاهرة } Y$$

ولحساب معامل الارتباط نتبع :-

1) نجد الوسط الحسابي للظاهرتين  $X, Y$

2) نجد الانحراف المعياري لكل منهما

3) مجموع حواصل ضرب كل من الظاهرتين  $\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$  او  $\sum X_i Y_i$

ومن ثم نطبق احدى الصيغتين .

### خصائص معامل الارتباط

$$1 \geq r \geq -1 \quad (1)$$

2) عندما تكون  $r = +1$  الارتباط طردي تام

3) عندما تكون  $r = -1$  الارتباط عكسي تام

4) عندما تكون  $r = 0$  انعدام الارتباط

5) عندما تكون  $r$  بين 0.5 و 0.75 طردي متوسط

6) عندما تكون  $r$  تزيد على 0.75 طردي قوي

7) عندما تكون  $r$  اقل من 0.5 طردي ضعيف

## مثال 1

جد معامل الارتباط بين المتغيرين X ، Y من الجدول الآتي :

x	2	3	4	5	6
y	4	6	8	10	12

نحسب الوسط الحسابي لكل من المتغيرين

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{6+5+4+3+2}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{12+10+8+6+4}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

X	Y	X- $\bar{X}$	(X- $\bar{X}$ ) <sup>2</sup>	Y- $\bar{Y}$	(Y- $\bar{Y}$ ) <sup>2</sup>	(x- $\bar{x}$ ) (y- $\bar{y}$ )
2	4	-2	4	-4	16	8
3	6	-1	1	-2	4	2
4	8	0	0	0	0	0
5	10	1	1	2	4	2
6	12	2	4	4	16	8
20	40		10		40	20

$$S_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{5} \cdot 10} = \sqrt{2}$$

$$S_Y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (y_i - \bar{y})^2} = \sqrt{\frac{1}{5} \cdot 40} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{S_x \cdot S_y}$$

$$= \frac{\frac{1}{5} \cdot 20}{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{4}{4} = 1$$

الارتباط طردي تام

طريقة اخرى

X	Y	x <sup>2</sup>	Y <sup>2</sup>	xy
2	4	4	16	8
3	6	9	36	18
4	8	16	64	32
5	10	25	100	50
6	12	36	144	72
20	40	90	360	180

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum x_i^2 - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{5} \times 90 - 16} = \sqrt{2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum y_i^2 - (\bar{y})^2} = \sqrt{\frac{1}{5} \times 360 - 64} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum x_i y_i - \bar{x} \bar{y}}{S_x \times S_y}$$

$$r = \frac{\frac{1}{5} \times 180 - 4 \times 8}{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4}{4} = 1$$

الارتباط طردي تام



## مثال 2

البيانات التالية تمثل الكمية المعروضة من سلعة معينة وسعر الوحدة الواحدة من هذه السلعة. المطلوب

حساب معامل الارتباط البسيط بين الكمية المعروضة والسعر.

السعر	x	2	2	5	4	5	6	3	5	4
الكمية المطلوبة	y	3	5	7	8	9	11	6	8	6

الحل

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{36}{9} = 4$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{63}{9} = 7$$

X	y	x - $\bar{x}$	(x - $\bar{x}$ ) <sup>2</sup>	y - $\bar{y}$	(y - $\bar{y}$ ) <sup>2</sup>	(x - $\bar{x}$ )(y - $\bar{y}$ )
2	3	-2	4	-4	16	8
2	5	-2	4	-2	4	4
5	7	1	1	0	0	0
4	8	0	0	1	1	0
5	9	1	1	2	4	2
6	11	2	4	4	16	8
3	6	-1	1	-1	1	1
5	8	1	1	1	1	1
4	6	0	0	-1	1	0
36	63		16		44	24

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{9} \times 16} = \frac{4}{3}$$

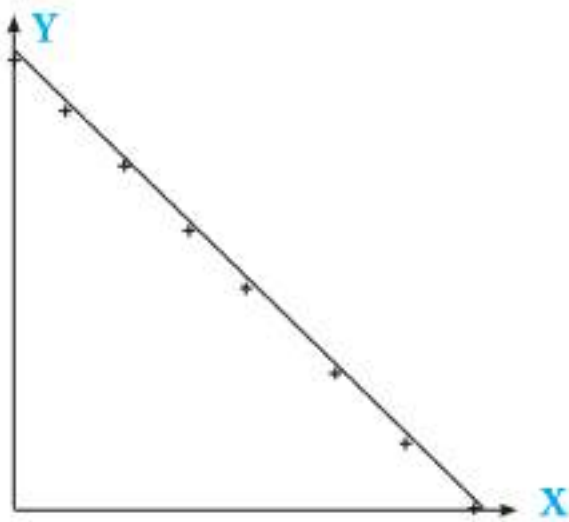
$$S_y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (y_i - \bar{y})^2} = \sqrt{\frac{1}{9} \times 44} = \frac{\sqrt{44}}{3}$$

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(S_x \cdot S_y)} = \frac{\frac{1}{9} \cdot 24}{\frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{44}}{3}} = \frac{24}{4 \sqrt{44}} = 0.905$$

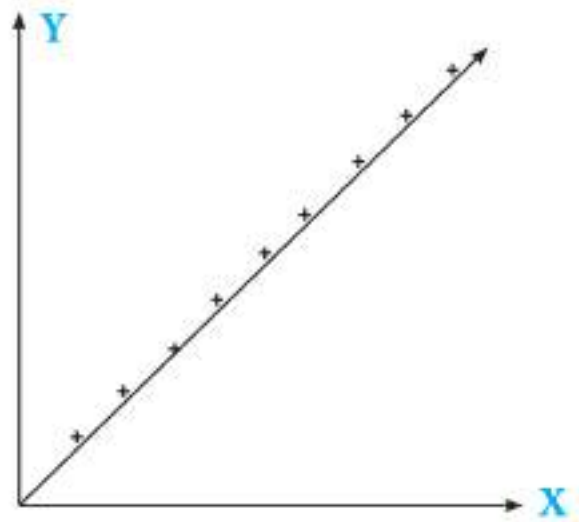
وهذا يعني ان درجة الارتباط ما بين الكمية المعروضة من هذه السلعة وسعر الوحدة منها هو 0.905 وانه ارتباط موجب . دلالة على أنه كلما ازداد السعر ازدادت بالمقابل الكمية المعروضة من هذه السلعة .

## الشكل الانتشاري

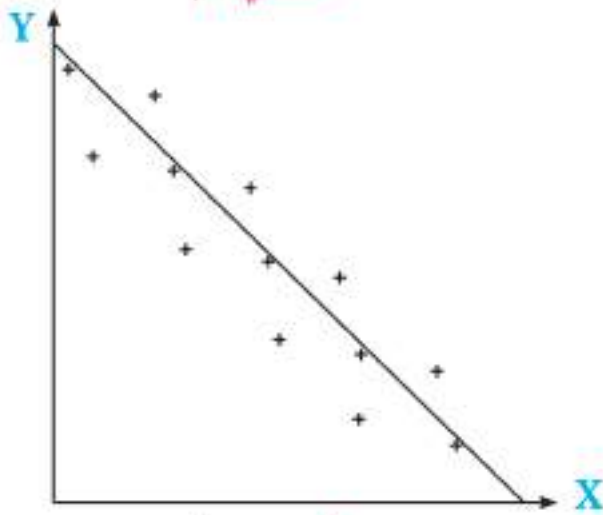
ان الشكل الانتشاري يعتبر أبسط طريقة لعرض بيانات توزيع مزدوج وهو عبارة عن انتشار النقاط في المستوي (X , Y) التي احدائها السيني يمثل قيمة X واحدائها الصادي يمثل Y ومن خلال الشكل الانتشاري يمكن تكوين فكرة جيدة عما اذا كان المتغيرين مرتبطين ام غير ذلك . فاذا لاحظنا ان نقاط الشكل الانتشاري متقاربة مع بعضها فاننا نتوقع في هذه الحالة وجود ارتباط جيد بين المتغيرين اما اذا كانت النقاط متباعدة كثيراً فاننا نتوقع ان الارتباط بينهما ضعيف . وكذلك من خلال الشكل يمكن استنتاج نوع الارتباط فيما اذا كان سالب او موجب وتضعف العلاقة اي تنخفض قيمة معامل الارتباط كلما ازداد الانتشار .



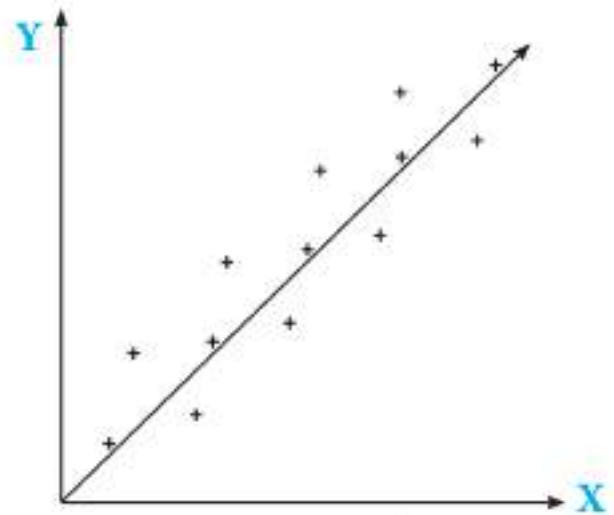
معامل الارتباط (-1)  
عكسي تام



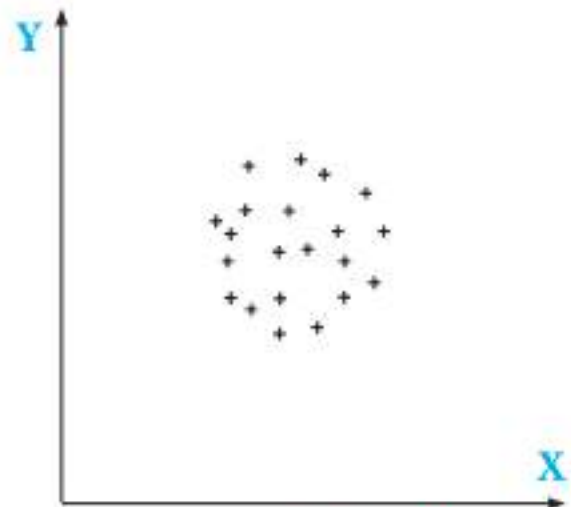
معامل الارتباط (+1) طردي تام



عكسي (سالب)



طردي (موجب)



لا يوجد ارتباط

## spearman's coefficient of Rank correlation

لو اراد باحث قياس التكيف الاجتماعي للطلاب قد لا يستطيع ذلك وقد لا يجد ما يمكنه قياس مثل هذه المتغيرات. ففي هذه الحالة يمكن قياس المتغير بمقياس رتبي كان يستطيع الباحث استطلاع اراء عدد من المعلمين او ممن لهم صلة بافراد العينة لكي يصنفوا افراد العينة رتبياً على ذلك المتغير فيقال ان (A) اكثر تكيفاً من (B) وهذا اكثر تكيفاً من (C) وهكذا. ويمكن اعطاء (A) المرتبة الاولى في التكيف الاجتماعي بمقارنته مع زملائه. وبنفس الطريقة يعطي (B) المرتبة الثانية و (C) المرتبة الثالثة. كما يمكن ترتيب نفس افراد العينة على متغير اخر غير التكيف الاجتماعي كان يكون الاتجاه نحو المدرسة او مدى نشاط الطالب وفاعليته وقد يرمز (X) للمتغير الاول و (Y) للمتغير الثاني فاذا اراد الباحث التعرف على العلاقة الموجودة بين (X, Y) وهما متغيران رتبياً فانه يستخدم

## قانون سبيرمان

ولحساب قيمة معامل الارتباط لسبيرمان نتبع الخطوات التالية :-

- 1) نرتب كلا المتغيرين X و Y تصاعدياً او تنازلياً
- 2) تحديد الرتب التي تقابل كل قيمة من هذه القيم
- 3) في حالة اشتراك اكثر من قيمة في مرتبة واحدة تحدد المراتب الجديدة من خلال ايجاد متوسطها
- 4) حساب الفروق بين رتب كلا المتغيرين X و Y
- 5) حساب مربع الفروق بين المتغيرين
- 6) تطبيق قانون معامل الارتباط لسبيرمان

$$r = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)}$$

r = معامل ارتباط سبيرمان

d = الفرق بين رتب كلا المتغيرين (رتب Y - رتب X)

d<sup>2</sup> = مربع الفرق بين المتغيرين

n = عدد ازواج البيانات

## مثال

كانت تقديرات ستة طلاب في مادة الاحصاء والرياضيات كما يلي :

تقدير درجة الاحصاء : جيد، متوسط، ضعيف، مقبول، جيد جداً، ممتاز

تقدير درجة الرياضيات : متوسط، جيد، مقبول، ضعيف، ممتاز، جيد جداً

جد معامل الارتباط البسيط بين تقدير الطالب في امتحان الاحصاء وتقديره في امتحان الرياضيات .

## الحل

نبدأ بترتيب التقديرات وفق ترتيب تصاعدي او تنازلي وليكن ترتيب تصاعدي ثم نخصص رتباً من

الاعداد الطبيعية .

① ② ③ ④ ⑤ ⑥  
X : ضعيف، مقبول، متوسط، جيد، جيد جداً، ممتاز

Y : ضعيف، مقبول، متوسط، جيد، جيد جداً، ممتاز

ثم تعود لتخصيص هذه الرتب والتقديرات الاصلية كما هو موضح في الجدول التالي .

التسلسل	x	y	رتب x	رتب y	d	d <sup>2</sup>
1	جيد	متوسط	4	3	1	1
2	متوسط	جيد	3	4	-1	1
3	ضعيف	مقبول	1	2	-1	1
4	مقبول	ضعيف	2	1	1	1
5	جيد جداً	ممتاز	5	6	-1	1
6	ممتاز	جيد جداً	6	5	1	1
						6

$$r = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)}$$

$$r = 1 - \frac{6 \times 6}{6(36-1)} = 1 - \frac{6}{35} = 0.829 \text{ معامل الارتباط طردي قوي}$$



احسب معامل الارتباط بين رتبة النجاح (X) والدخل الشهري (Y) لعائلة  
 x: 80,94,92,66,71,60  
 y: 700,350,700,400,550,820

① ② ③ ④ ⑤ ⑥  
 x: 60, 66, 71, 80, 92, 94  
 y: 350, 400, 550, 700, 700, 820

الحل

ترتب القيم تصاعدياً

$$\frac{4+5}{2} = 4.5$$

التسلسل	x	y	رتب x	رتب y	d	d <sup>2</sup>
1	80	700	4	4.5	-0.5	0.25
2	94	350	6	1	5	25
3	92	700	5	4.5	0.5	0.25
4	66	400	2	2	0	0
5	71	550	3	3	0	0
6	60	820	1	6	-5	25
						50.5

$$r = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)}$$

$$r = 1 - \frac{6 \times 50.5}{6(36-1)} = 1 - \frac{50.5}{35} = -0.4428 \text{ معامل الارتباط عكسي لانه سالب}$$

## تمارين [4-2]

س1 / جد معامل الارتباط بين  $x$  و  $y$  من الجدول التالي :

x	1	2	3
y	2	4	6

س2 / جد معامل الارتباط بين  $x$  و  $y$

x	4	8	12
y	2	4	6

س3 / جد معامل الارتباط بين  $x$  و  $y$

x	3	4	5	6	7
y	6	8	10	12	14

س4 / جد معامل الارتباط البسيط بين المتغيرين  $x$  و  $y$

x	2	5	7	8	6	9	8	10	4	5	11	9
y	1	3	5	6	4	6	7	9	3	4	9	8

س5 / جد معامل الارتباط البسيط للمتغيرين  $x$  و  $y$

x	1.5	1.3	2.5	3.3	4.2	1.2	3.8	2.6
y	3	2	4	6	8	1	7	5

س6 / من الجدول التالي جد معامل ارتباط سبيرمان

x : 50,70,80,40,30,60,65,70,75,55

y : 45 ,60,65,30,20,55,60,60,65,50

س7 / البيانات المعطاة في الجدول التالي تمثل الكثافة العددية لاشجار الصنوبر (X) ومساحة قاعدة الاشجار (Y)

x : 307,79,71,192,122,404,55,82

y : 13.5,20.1,14.8,19.6,19.5,17.4,26.1,21.1

المطلوب ايجاد معامل ارتباط سبيرمان بين كثافة الاشجار ومساحة قاعدة الاشجار .



## الانحدار :

التنبؤ بقيمة متغير معين من معرفة قيمة متغير آخر . فمثلاً يمكننا استخدام الانحدار للتنبؤ بمقدار الدخل القومي ( Y ) من معرفة مقدار الانتاج الزراعي أو الصناعي ( X ) لسنة معينة وكذلك يمكننا استخدام نفس الأسلوب للتنبؤ بالدرجات التي يحصل عليها الطالب في الامتحان الوزاري العام ( Y ) من معرفة درجاته في الامتحان المدرسي ( X ) وبصورة عامة فإنه يمكن التنبؤ بقيمة المتغير ( Y ) في ضوء معرفة قيمة المتغير ( X ) باستخدام الانحدار .

ولأجل التنبؤ بمقدار القيم الخاصة بمتغير معين من معرفة قيمة متغير آخر يستخدم عادة أبسط الصور الرياضية وهي الصورة الخطية وتمثل بالمعادلة العامة للخط المستقيم

$$\hat{y} = bx + a$$

وتعني هذه المعادلة إيجاد قيمة ( y ) المتوقعة والعلامة فوق ( y ) تدل على إن القيمة ( متوقعة او تقديرية ) وتساوي قيمة ( x ) مضروبة في ثابت معين ( b ) مضافاً إليها ثابت آخر ( a ) وكما هو ملاحظ إن المعادلة تحتاج الى التعرف على ثلاث قيم ( X ) ، ( a ) ، ( b ) لكي تستطيع التنبؤ بقيمة ( Y ) .

ومن تلك المعادلة ينبغي التعرف على خط الانحدار ( Regression line )

ويمكن رسم خط الانحدار بواسطة تحديد نقطتين على الأقل ورسم الخط المستقيم الذي يصل بين تلك النقطتين ولأجل التعرف على قيم النقطتين التي نريد تعيينها ينبغي التعرف على قيم ( a ) ، ( b ) ونحسب قيمة ( b ) بواسطة القانون التالي :

$$b = \frac{n\sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

ونحسب قيمة ( a ) كما يأتي : حيث  $\hat{a}$  تمثل قيمة a المتوقعة .

حيث تمثل (  $\bar{y}$  ) الوسط الحسابي لقيم المتغير y وتمثل (  $\bar{x}$  ) الوسط الحسابي لقيم المتغير x ويمكن كتابة

المعادلة السابقة :

$$a = \frac{\sum y_i}{n} - b \frac{\sum x_i}{n}$$



عينة تتألف من سبعة افراد وكانت نتائجهم كما يلي :

x	12	11	5	10	13	13	12
y	11	14	11	13	15	14	12

احسب معادلة انحدار  $y$  على  $x$

الحل

نريد التنبؤ بتقدير قيمة ( $y$ ) أي درجات الآختبار للافراد في الاختبار الثاني من معرفة درجات الاختبار الاول ( $x$ ).

x	y	xy	$x^2$
12	11	132	144
11	14	154	121
5	11	55	25
10	13	130	100
13	15	195	169
13	14	182	169
12	12	144	144
76	90	992	872

المجموع



$$b = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i) (\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{7 \times 992 - 76 \times 90}{7 \times 872 - (76)^2} = \frac{6944 - 6840}{6104 - 5776} = \frac{104}{328} = 0.32$$

$$a = \frac{\sum y_i}{n} - b \frac{\sum x_i}{n}$$

$$a = \frac{90}{7} - 0.32 \times \frac{76}{7}$$

$$a = 9.38$$

∴ معادلة انحدار (Y) على (X)

$$\hat{Y} = b X + a$$

$$\hat{Y} = 0.32 X + 9.38$$

وعندما تكون قيمة (X) مثلا (5) كما هو الحال بالنسبة للفرد الثالث فان درجته المتوقعة في (Ŷ)

هي:

$$\hat{Y} = 0.32 \times 5 + 9.38 = 10.98$$

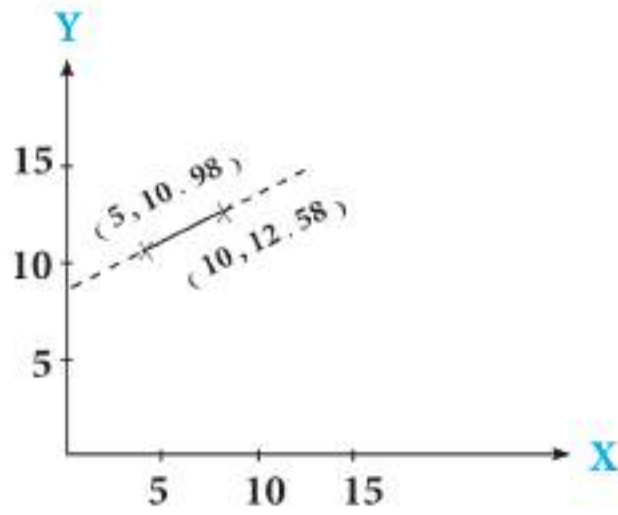
∴ النقطة (5, 10.98)

وعندما تكون قيمة (X) مساوية الى (10) بالنسبة للفرد الرابع

$$Y = 0.32 \times 10 + 9.38 = 12.58$$

∴ النقطة (10, 12.58)

ولأجل رسم خط الانحدار علينا تعيين النقطتين



مثال

البيانات التالية تمثل الكمية المطلوبة من (Y) من سلعة معينة وسعر الوحدة الواحدة منها (X) والمطلوب

معادلة (Y) على (X) :

x	11	8	7	8	6	9	5	5	4	7
y	3	5	6	4	6	4	9	8	9	6

الحل

x	y	xy	x <sup>2</sup>
11	3	33	121
8	5	40	64
7	6	42	49
8	4	32	64
6	6	36	36
9	4	36	81
5	9	45	25
5	8	40	25
4	9	36	16
7	6	42	49
70	60	382	530

المجموع

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{10 \times 382 - 70 \cdot 60}{10 \times 530 - (70)^2} = \frac{3820 - 4200}{5300 - 4900} = \frac{-38}{40} = -0.95$$

$$a = \frac{\sum y_i}{n} - b \frac{\sum x_i}{n}$$

$$a = \frac{60}{10} + 0.95 \cdot \frac{70}{10}$$

$$a = 6 + 0.95 \cdot 7 = 6 + 6.65 = 12.65$$

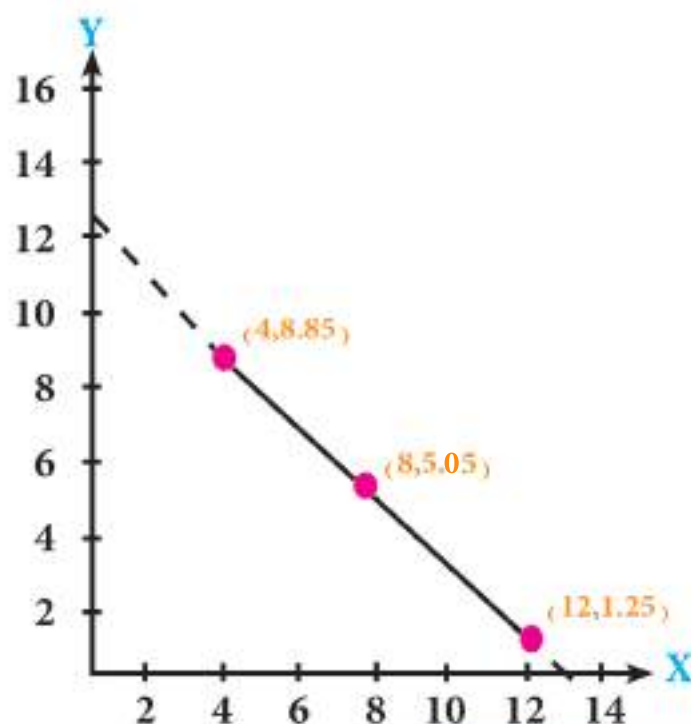
$$\therefore \hat{Y} = b \hat{X} + a$$

$$\hat{Y} = -0.95 X + 12.65$$

ولغرض رسم المعادلة أعلاه نختار القيم (X) لنحصل على قيم (Y) من المعادلة :

$$X: 4 \quad 8 \quad 12$$

$$Y: 8.85 \quad 5.05 \quad 1.25$$



## تمارين [ 4-3 ]

س1/ في تجربة حقلية لدراسة أثر زيادة كمية السماد العضوي على كمية المحصول من الحنطة تم الحصول على النتائج التالية:

كمية السماد x	12	10	3	9	4	7	2	5	8	6	8	10
كمية المحصول y	7	6	2	5	2	3	1	2	4	3	5	7

احسب معادلة انحدار كمية المحصول (Y) على كمية السماد (X)

س2/ إذا كان عدد الاهداف التي سجلها فريق بكرة القدم في عشرة مباريات خاضها مع فرق أخرى مقرونة بعدد ضربات الزاوية الممنوحة لهذا الفريق في تلك المباريات كالاتي

عدد ضربات الزاوية x	9	7	8	8	15	4	5	9	6	12
عدد الاهداف y	4	0	1	2	4	0	1	2	2	3

احسب معادلة انحدار عدد الاهداف (Y) على عدد ضربات الزاوية (X)

س3/ البيانات التالية تمثل درجات (12) طالب وان درجة الامتحان القصوى من (10) درجات والمطلوب معادلة انحدار (Y) على (X)

درجة الرياضيات x	2	3	9	8	7	10	5	6	3	6	0	1
درجة الاحصاء y	0	2	7	7	5	9	3	6	4	4	1	0

## قائمة المصطلحات

انكليزي

عربي

Exponential Function  
Logarithmic Function  
Decimal \_Logarithms  
Natural Logarithms  
Calculator  
Geometric mean  
Sequence  
Integers  
Natural Numbers  
Function  
Domain  
Codomain  
Real Numbers  
Arithmetic Sequens  
Arithmetic means  
Geometric Sequences  
Geametric means  
Amount  
Price  
Profit  
Time  
Wholesale  
Current Value  
Simple profit

1- الدالة الاسية  
2- الدالة اللوغارتمية  
3- اللوغارتمات العشرية  
4- اللوغارتمات الطبيعية  
5- الحاسبة اليدوية  
6- الوسط الهندسي  
7- المتتابعات  
8- الاعداد الصحيحة  
9- الاعداد الطبيعية  
10- الدالة  
11- مجال الدالة  
12- المجال المقابل  
13- الاعداد الحقيقية  
14- المتتابعات العددية (الحسابية)  
15- الاوساط الحسابية  
16- المتتابعات الهندسية  
17- الاوساط الهندسية  
18- المبلغ  
19- السعر  
20- الربح  
21- الزمن  
22- الجملة  
23- القيمة الحالية  
24- الربح البسيط

# قائمة المصطلحات

انكليزي

عربي

Compound Profit	25- الربح المركب
Finite Sequence	26- متتابعة منتهية
Infinite Sequence	27- متتابعة غير منتهية
General Term	28- الحد العام
Matrices	29- المصفوفات
Row	30- الصف
Column	31- العمود
Order of a matrix	32- رتبة المصفوفة
Square Matrix	33- المصفوفة المربعة
Zero Matrix	34- المصفوفة الصفرية
Unit Matrix	35- مصفوفة الوحدة
Singular Matrix	36- المصفوفة الاحادية
Addition of Matrix	37- جمع المصفوفات
Additive Invers	38- النظير الجمعي للمصفوفة
Determinants	39- المحددات
Simultaneous Equations	40- المعادلات الانية
Measures of Dispersion	41- مقاييس التشتت
Standard deviation	42- الانحراف المعياري
Correlation	43- الارتباط
Linear Correlation	44- الارتباط الخطي
Correlation coefficient	45- معامل الارتباط
Regression	46- الانحدار

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ