الرياضيات التوجيهي الادبي

إجابات أسئلة وتدريبات وحدة التكامل وتطبيقاته

فهرس الوحدة	رقم الصفحة
الفصل الأول : التكامل	٢
أولا : التكامل غير المحدود	٢
ثانيا : التكامل المحدود	٨
ثالثا : خصائص التكامل المحدود	١١
رابعا : التكامل بالتعويض	١٧
الفصل الثاني : تطبيقات التكامل	٢٣
أولا : تطبيقات هندسية	٢٣
ثانيا : تطبيقات فيزيائية	٢٦
ثالثا : المساحة	٢٩
الفصل الثالث : الاقترانان اللوغاريتمي الطبيعي والأسي الطبيعي وتطبيقاتهما	٣٦
أولا : الاقترانان اللوغاريتمي الطبيعي والأسي الطبيعي	٣٦
ثانيا : النمو والاضمحلال	٤٢

منهاجي
متعة التعليم الهادف

إعداد : المعلمة سلسبيل الخطيب

منهاجي
متعة التعليم الهادف
تم تحميل الملف من شبكة منهاجي التعليمية

الفصل الأول : التكامل

أولا التكامل غير المحدود Indefinite Integral

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

>> تدريب (١) صفحة ١٦١

إذا كان ص = $\int \frac{-٤س}{س^{٢}+١}$ د س ، فجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = -١

الحل :

نقوم باشتقاق الطرفين ،،

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د}{د س}\int \frac{-٤س}{س^{٢}+١}$ د س (مشتقة التكامل تعطي ما داخل التكامل) ، إذن:

$\frac{د ص}{د س} = \frac{-٤س}{س^{٢}+١}$

$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=-١} = \frac{-٤(-١)}{(-١)^{٢}+١} = \frac{-٤}{١+١} = \frac{-٥}{٢}$

>> تدريب (٢) صفحة ١٦٣

جد كلا من التكاملات الآتية :-

١) $\int$ د س = $\int ١ \times$ د س = س + جـ

٢) $\int س^{٣}$ د س = $\frac{س^{٤}}{٤}$ + جـ

٣) $\int س^{-٥}$ د س ، س ≠ صفر ، $\int س^{-٥}$ د س = $\frac{س^{-٤}}{-٤}$ + جـ

٤) $\int \sqrt{س}$ د س ، س ≥ ٠

$\int \sqrt{س}$ د س = $\int س^{\frac{١}{٢}}$ د س = $\frac{س^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١}$ + جـ = $\frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}$ + جـ = ٢ $\frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{٣}$ + جـ

منهاجي
متعة التعليم الهادف
تم تحميل الملف من شبكة منهاجي التعليمية

>> تدريب (٣) صفحة ١٦٤

جد كلا من التكاملين الآتيين :

١) $\int (٣س^{٢} - \frac{٦}{\sqrt{س}})$ د س $= \int (٣س^{٢} - ٦ س^{-\frac{١}{٢}})$ د س

$= س^{٣} - ٦ \frac{س^{-\frac{١}{٢}+١}}{-\frac{١}{٢}+١} + جـ = س^{٣} - ٦ \frac{س^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + جـ = س^{٣} - ١٢ س^{\frac{١}{٢}} + جـ$

٢) $\int (٤س - ٣جاس)$ د س $= ٢س^{٢} - ٣ \times -$ جتاس $+ جـ = ٢س^{٢} + ٣$جتاس $+ جـ$

>> تدريب (٤) صفحة ١٦٥

جد كلا من التكاملات الآتية :

هنا نفك القوس أولا ..تذكر
$(أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢}$

١) $\int (٢س + ٣)^{٢}$ د س $= \int (٤س^{٢} + ١٢س + ٩)$ د س $= \frac{٤س^{٣}}{٣} + ٦س^{٢} + ٩س + جـ$

٢) $\int \frac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt[٣]{س}}$ د س ، س > ٠

$\int \frac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt[٣]{س}}$ د س $= \int \frac{س^{٢} - ٥س}{س^{\frac{١}{٣}}}$ د س $= \int (\frac{س^{٢}}{س^{\frac{١}{٣}}} - \frac{٥س}{س^{\frac{١}{٣}}})$ د س

$= \int (س^{\frac{٢}{٣}} - ٥ س^{-\frac{١}{٣}})$ د س $= \int (س^{\frac{٥}{٣}} - ٥ س^{\frac{٢}{٣}})$ د س

$= \frac{س^{\frac{٨}{٣}}}{\frac{٨}{٣}} - ٥ \frac{س^{\frac{٥}{٣}}}{\frac{٥}{٣}} + جـ = \frac{٣}{٨} س^{\frac{٨}{٣}} - ٥ \times \frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} + جـ = \frac{٣}{٨} س^{\frac{٨}{٣}} - ٣ س^{\frac{٥}{٣}} + جـ$

٣) $\int \frac{س^{٢} + ٢س - ١٥}{س - ٣}$ د س ، س $\neq ٣$

$\int \frac{س^{٢} + ٢س - ١٥}{س - ٣}$ د س $= \int \frac{(س - ٣)(س + ٥)}{س - ٣}$ د س $= \int (س + ٥)$ د س $= \frac{س^{٢}}{٢} + ٥س + جـ$

٤) $\int \frac{س^٣ + ٦٤}{س + ٤}$ د س ، س $\neq$ -٤

$$\int \frac{س^٣ + ٦٤}{س + ٤} \text{ د س} = \int \frac{(س + ٤)(س^٢ - ٤س + ١٦)}{س + ٤} \text{ د س} = \int (س^٢ - ٤س + ١٦) \text{ دس}$$

$$= \frac{س^٣}{٣} - ٤\frac{س^٢}{٢} + ١٦ س + جـ = \frac{س^٣}{٣} - ٢ س^٢ + ١٦ س + جـ$$

>> تدريب (٥) صفحة ١٦٥

جد قاعدة الاقتران ق الذي تعطى مشتقته بالقاعدة قَ (س) = ٣س^٢ – ٦س + ٥ ، علما بأن ق (٠) = ٧

الحل :

ق (س) = $\int$ قَ (س) د س = $\int$ (٣س^٢ – ٦س + ٥) د س = س^٣ – ٣ س^٢ + ٥س + جـ

ق (٠) = (٠)^٣ – ٣(٠)^٢ + ٥ (٠) + جـ = ٧ <== جـ = ٧

∴ ق (س) = س^٣ – ٣ س^٢ + ٥س + ٧

الأسئلة

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

١) جد كلا مما يأتي :

أ) $\int \frac{١}{٢}$ د س = $\frac{١}{٢}$ س + جـ

ب) $\int \frac{\text{د س}}{س^٥}$ س $\neq$ ٠

$$\int \frac{\text{د س}}{س^٥} = \int \frac{١}{س^٥} \times \text{د س} = \int س^{-٥} \text{ د س} = \frac{س^{-٤}}{-٤} + جـ$$

جـ) $\int$ (٢ – س^٢) د س = ٢س - $\frac{س^٣}{٣}$ + جـ

د) $\int \frac{-٢}{س^{-٥}}$ د س = $\int$ -٢س^٥ د س = -٢ × $\frac{س^٦}{٦}$ + جـ = $\frac{-س^٦}{٣}$ + جـ

من استطال الطريق ضَعُفَ مشيه

٢) جد كلا مما يأتي :

أ) $\int (١٠س^{٢} - \sqrt[٦]{س} + ٣ قا^{٢}س)\, د س = (١٠س^{٢} - س^{\frac{١}{٦}} + ٣ قا^{٢}س)\, د س$

$= \frac{١٠ س^{٣}}{٣} - \frac{س^{\frac{٧}{٦}}}{\frac{٧}{٦}} + ٣ ظا س + جـ = \frac{١٠ س^{٣}}{٣} - \frac{٦ س^{\frac{٧}{٦}}}{٧} + ٣ظا س + جـ$

ب) $\int (٢ - س)(٤س + ١)\, د س = \int (٨ س + ٢ - ٤س^{٢} - س)\, د س$

$= \int (٧ س + ٢ - ٤س^{٢})\, د س = \frac{٧س^{٢}}{٢} + ٢س - \frac{٤ س^{٣}}{٣} + جـ$

جـ) $\int ٣ ظا س \ جتا س \ د س = \int ٣ \frac{جا س}{جتا س} \times جتا س \ د س = \int ٣ جا س \ د س$

$= ٣ \times - جتاس + جـ = -٣ جتا س + جـ$

د) $\int \frac{س^{٢} + ٦س + ٨}{س + ٢}\, د س \quad ، \quad س \neq -٢$

$\int \frac{س^{٢} + ٦س + ٨}{س + ٢}\, د س = \int \frac{(س + ٢)(س + ٤)}{س + ٢}\, د س = \int (س + ٤)\, د س = \frac{س^{٢}}{٢} + ٤س + جـ$

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

٣) جد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = ٥ ، حيثُ ص = $\int \frac{٤س + ١}{س}\, د س \quad ، س \neq ٠$

الحل :

نقوم باشتقاق الطرفين ،،

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د}{د س} \int \frac{٤س + ١}{س}\, د س$ (مشتقة التكامل تعطي ما داخل التكامل) ، إذن:

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٤س + ١}{س}$

$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س = ٥} = \frac{٤(٥) + ١}{٥} = \frac{٢٠ + ١}{٥} = \frac{٢١}{٥}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف
تم تحميل الملف من شبكة منهاجي التعليمية

٤) إذا كان ق اقترانا قابلا للاشتقاق ، وكان قَ(س) = ٦س - ٨س^{٣} + ٥ ، وكان ق (-١) = ٢ ، فجد قاعدة الاقتران ق .

الحل :

ق (س) = $\int$ قَ(س) د س = $\int$ (٦س – ٨ س^{٣} + ٥) د س = ٣س^{٢} – ٢ س^{٤} + ٥س + جـ

ق (-١) = ٣ (-١)^{٢} - ٢ (-١)^{٤} + ٥(-١) + جـ = ٢

٣ - ٢ - ٥ + جـ = ٢ ==> -٤ + جـ = ٢ ==> جـ = ٦

∴ ق (س) = ٣س^{٢} – ٢ س^{٤} + ٥س + ٦

٥) إذا كان $\int$ عَ(س) د س = ٦س^{٣} – ٣ س^{٢} + ٦س – ٥ ، فجد عَ (١) .

الحل :

نقوم باشتقاق الطرفين ،،

$\frac{د}{د س}$ $\int$ عَ(س) د س = (٦س^{٣} – ٣ س^{٢} + ٦س – ٥)َ

عَ(س) = ١٨س^{٢} – ٦س + ٦ ==> عَ(١) = ١٨ (١)^{٢} – ٦ (١) + ٦ ==> عَ(١) = ١٨

٦) إذا كان ق اقترانا قابلا للاشتقاق ، وكان قَ (س) = ٢س – ٥ ، وكان ق (٢) = ٤ ، فجد قيمة ق(١).

الحل :

ق (س) = $\int$ قَ(س) د س = $\int$ (٢س – ٥) د س = س^{٢} – ٥س + جـ

ق (٢) = (٢)^{٢} – ٥ (٢) + جـ = ٤ ==> ٤ – ١٠ + جـ = ٤ ==> جـ = ١٠

∴ ق (س) = س^{٢} – ٥س + ١٠ ==> ق(١) = (١)^{٢} – ٥ (١) + ١٠ ==> ق (١) = ٦

٧) إذا كان ق اقترانا قابلا للاشتقاق ، وكان قَ(س) = ٣س (٦ – ٥س) + ٤س^{٣} ، وكان ق (٢) = -١ ، فجد قيمة ق (١).

الحل :

قَ(س) = ١٨س – ١٥س^{٢} + ٤س^{٣}

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

منهاجي
متعة التعليم الهادف
تم تحميل الملف من شبكة منهاجي التعليمية

ق (س) = $\int$ قَ (س) د س = $\int$ (١٨س – ١٥س^{٢} + ٤س^{٣}) د س = ٩س^{٢} – ٥ س^{٣} + س^{٤} + جـ

ق (٢) = ٩(٢)^{٢}– ٥ (٢)^{٣} + (٢)^{٤} + جـ = -١ ==> ٣٦ - ٤٠ + ١٦ + جـ = -١ ==> جـ = -١٣

∴ ق (س) = ٩س^{٢} – ٥ س^{٣} + س^{٤} – ١٣ ==> ق (١) = ٩(١)^{٢}– ٥ (١)^{٣} + (١)^{٤} – ١٣ = - ٨

٨) إذا كان ق اقترانا قابلا للاشتقاق ، وكان قَ (س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٨\ \text{س}^{٣}}{\text{س}}$ ، س ≠ صفرا ، وكان ق (١) = ١٢ ، فجد قاعدة الاقتران ق.

الحل :

ق (س) = $\int$ قَ (س) د س = $\int$ $\frac{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٨\ \text{س}^{٣}}{\text{س}}$ د س = $\int$ $\frac{\text{س (س} + ٦ + ٨\ \text{س}^{٢})}{\text{س}}$ د س

= $\int$ (س + ٦ + ٨س^{٢}) د س = $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ + ٦س + ٨ $\frac{\text{س}^{٣}}{٣}$ + جـ

ق(١) = $\frac{(١)^{٢}}{٢}$ + ٦ (١) + ٨ $\frac{(١)^{٣}}{٣}$ + جـ = ١٢ ==> $\frac{١}{٢}$ + ٦ + $\frac{٨}{٣}$ + جـ = ١٢

==> $\frac{١}{٢}$ + $\frac{٨}{٣}$ + جـ = ٦ ==> $\frac{١٩}{٦}$ + جـ = ٦ ==> جـ = $\frac{١٧}{٦}$

∴ ق (س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ + ٦س + $\frac{٨\ \text{س}^{٣}}{٣}$ + $\frac{١٧}{٦}$

٩) إذا كان ل اقترانا قابلا للاشتقاق ، وكان لَ (س) = ٦س^{٢} – ٦س^{٣} – ٢س ، فجد قيمة ل (٣) – ل (١)

الحل :

ل (س) = $\int$ لَ (س) د س = $\int$ (٦س^{٢} – ٦س^{٣} – ٢س) دس = ٢س^{٣} - $\frac{٣\text{س}^{٤}}{٢}$ - س^{٢} + جـ

* ل(٣) = ٢(٣)^{٣} – ٣ $\frac{(٣)^{٤}}{٢}$ - (٣)^{٢} + جـ = ٥٤ - $\frac{٢٤٣}{٢}$ - ٩ + جـ = - $\frac{١٥٣}{٢}$ + جـ

* ل(١) = ٢(١)^{٣} – ٣ $\frac{(١)^{٤}}{٢}$ - (١)^{٢} + جـ = ٢ - $\frac{٣}{٢}$ - ١ + جـ = - $\frac{١}{٢}$ + جـ

∴ ل (٣) – ل (١) = (- $\frac{١٥٣}{٢}$ + جـ) - (- $\frac{١}{٢}$ + جـ)

= - $\frac{١٥٣}{٢}$ + جـ + $\frac{١}{٢}$ - جـ = - $\frac{١٥٣}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ = - $\frac{١٥٢}{٢}$ = -٧٦

تم تحميل الملف من شبكة منهاجي التعليمية

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

>> تدريب (١) صفحة ١٦٩

جد قيمة كل مما يأتي :

١) $\int_{٤}^{١} \frac{٦}{\sqrt{س}}$ د س $= \int_{٤}^{١} \frac{٦}{س^{\frac{١}{٢}}}$ د س $= \int_{٤}^{١} ٦ س^{-\frac{١}{٢}}$ د س $= ٦ \times \frac{س^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} \Big]_{٤}^{١} = ١٢ \sqrt{س} \Big]_{٤}^{١}$

$= ١٢ \sqrt{١} - ١٢ \sqrt{٤} = ١٢ - ٢٤ = -١٢$

ب) $\int_{٠}^{١} ١٤ (س)^{\frac{٤}{٣}}$ د س $= ٤ \times \frac{س^{\frac{٤}{٣}+١}}{\frac{٤}{٣}+١} \Big]_{٠}^{١} = ١٤ \times ٣ \times \frac{س^{\frac{٧}{٣}}}{٧} \Big]_{٠}^{١} = ٦ \sqrt[٣]{س^{٧}} \Big]_{٠}^{١}$

$= ٦ \sqrt[٣]{(١)^{٧}} - ٦ \sqrt[٣]{(٠)^{٧}} = ٦$

>> تدريب (٢) صفحة ١٧٠

إذا كان ق (-١) = ٣ ، ق (٢) = ٥ ، فجد قيمة التكامل الآتي : $\int_{-١}^{٢} ٤$ قَ (س) د س

الحل :

$\int_{-١}^{٢} ٤$ قَ (س) د س $= ٤ \int_{-١}^{٢}$ قَ (س) د س $= ٤$ ق (س) $\Big]_{-١}^{٢} = ٤$ (ق (٢) – ق (-١))

$= ٤ (٥ - ٣) = ٤ \times ٢ = ٨$

>> تدريب (٣) صفحة ١٧٠

إذا كان $\int_{١}^{ب} ٦$س د س $= ٩$ ، فجد قيمة الثابت ب .

الحل :

$\int_{١}^{ب} ٦$ س د س $= ٩$ <== $٣س^{٢} \Big]_{١}^{ب} = ٩$ <== $٣(ب)^{٢} - ٣(١)^{٢} = ٩$ ==> $٣ب^{٢} - ٣ = ٩$

$\pm$

الأسئلة

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

١) احسب قيمة كل مما يأتي :

أ) $\int_{١}^{٦} -٢ \, د س = -٢ (٦ - ١) = -٢ \times ٥ = -١٠$

ب) $\int_{٨}^{١} \frac{١}{\sqrt[٣]{س}} د س = \int_{٨}^{١} \frac{١}{٨ \, س^{\frac{١}{٣}}} د س = \int_{٨}^{١} \frac{١}{٨} س^{-\frac{١}{٣}} د س = \frac{١}{٨} \times \left[\frac{س^{\frac{٢}{٣}}}{\frac{٢}{٣}} \right]_{٨}^{١}$

$= \frac{٣}{١٦} \left[س^{\frac{٢}{٣}} \right]_{٨}^{١} = \frac{٣}{١٦} \sqrt[٣]{س^{٢}}_{(١)} - \frac{٣}{١٦} \sqrt[٣]{(٨)^{٢}}$

$= \frac{٣}{١٦} - \frac{٣}{١٦} \times ٤ = \frac{١٢}{١٦} - \frac{٩}{١٦} =$

جـ) $\int_{٠}^{٦} (٢س + ٨س^{٣} - ٥س^{٤} + ٧) د س = \left[س^{٢} + ٢س^{٤} - س^{٥} + ٧س \right]_{٠}^{٦}$

$= ((٦)^{٢} + ٢ (٦)^{٤} - (٦)^{٥} + ٧ (٦) - \text{صفر}) = ٣٦ + ٢٥٩٢ - ٧٧٧٦ + ٤٢ = -٥١٠٦$

د) $\int_{-٢}^{٢} (٣س - ٢) (س + ١) د س = \int_{-٢}^{٢} (٣س^{٢} + ٣س - ٢س - ٢) د س = \int_{-٢}^{٢} (٣س^{٢} + س - ٢) د س$

$= \left[س^{٣} + \frac{س^{٢}}{٢} - ٢س \right]_{-٢}^{٢} = ((٢)^{٣} + \frac{(٢)^{٢}}{٢} - ٢ \times ٢) - ((-٢)^{٣} + \frac{(-٢)^{٢}}{٢} - ٢ \times -٢)$

$= (٨ + ٢ - ٤) - (-٨ + ٢ + ٤) = ٦ - -٢ = ٨$

٢) إذا كان $\int_{-١}^{م} ٤ \, د س = ٢٠$ ، فجد قيمة الثابت م .

الحل :

$\int_{-١}^{م} ٤ \, د س = ٢٠ \implies ٤ (م - -١) = ٢٠ \implies ٤ (م + ١) = ٢٠ \implies م + ١ = ٥ \implies م = ٤$

٣) إذا كان الاقتران ق معرفا على الفترة [١ ، ٥] ، وكان قَ (س) = ٢س + ١ ، فجد قيمة ق(٥) – ق(١)

الحل :

$$\int_{١}^{٥} قَ(س)\,د\,س = ق(س)\Big]_{١}^{٥} = ق(٥) - ق(١)$$

$$\int_{١}^{٥} (٢س + ١)\,د\,س = (س^{٢} + س)\Big]_{١}^{٥} = (٥^{٢} + ٥) - (١^{٢} + ١) = ٣٠ - ٢ = ٢٨$$

٤) احسب قيمة التكامل الآتي : $\int_{٢}^{٢} (٤س - ٦س^{٢} + ٣)\,د\,س$.

الحل :

$$\int_{٢}^{٢} (٤س - ٦س^{٢} + ٣)\,دس = (٢س^{٢} - ٢س^{٣} + ٣س)\Big]_{٢}^{٢}$$

$$= ((٢)٣ + ٣(٢)٢ - ٢(٢)٢) - ((٢)٣ + ٣(٢)٢ - ٢(٢)٢)$$

$$= (٦ + ١٦ - ٨) - (٦ + ١٦ - ٨) = ٢ + ٢ = ٤ \text{ صفر}$$

وهذه من خضائص التكامل المحدود $\int_{أ}^{أ} ق(س)\,دس$ = صفر

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

٥) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية :-

أ) $\int_{١}^{٢} ٣س(٤ - ٢س^{٢})\,دس = \int_{١}^{٢} (١٢س - ٦س^{٣})\,دس = (٦س^{٢} - \frac{٦}{٤}س^{٤})\Big]_{١}^{٢}$

$$= (٦ \times ٢^{٢} - \frac{٦}{٤} \times ٢^{٤}) - (٦ \times ١^{٢} - \frac{٦}{٤} \times ١^{٤})$$

$$= (٢٤ - ٢٤) - (٦ - \frac{٦}{٤}) = \text{صفر} - (\frac{٢٤ - ٦}{٤}) = \frac{-١٨}{٤} = \frac{-٩}{٢}$$

ب) $\int_{١}^{-١} (٢س - ٣)^{٢}\,د\,س = \int_{١}^{-١} (٤س^{٢} - ١٢س + ٩)\,دس = (\frac{٤}{٣}س^{٣} - ٦س^{٢} + ٩س)\Big]_{١}^{-١}$

$$= (\frac{٤}{٣} \times (-١)^{٣} - ٦ \times (-١)^{٢} + ٩ \times -١) - (\frac{٤}{٣} \times ١^{٣} - ٦ \times ١^{٢} + ٩ \times ١)$$

$$= (\frac{-٤}{٣} - ١٥ -) - (\frac{٤}{٣} + ٣) = \frac{-٤}{٣} - ١٥ - \frac{٤}{٣} - ٣ = \frac{-٨}{٣} - ١٨ = -\frac{٦٢}{٣}$$

تم تحميل الملف من شبكة منهاجي التعليمية

جـ) $\int_{-١}^{٢} \frac{س^٢ + ٦س - ٧}{س - ١}$ دس $= \int_{-١}^{٢} \frac{(س - ١)(س + ٧)}{س - ١}$ دس $= \int_{-١}^{٢}$ (س + ٧) دس

$= \left[\frac{س^٢}{٢} + ٧س\right]_{-١}^{٢} = \left(\frac{(-٢)^٢}{٢} + ٧ \times -٢\right) - \text{صفر} = ٢ - ١٤ = -١٢$

٦) إذا كان $\int_{٥}^{٢}$ قَ (س) دس = ١٣ ، وكان ق(٥) = -١٧ ، فجد قيمة ق(٢)

الحل :

$\int_{٥}^{٢}$ قَ (س) دس = ق(٢) – ق(٥)

١٣ = ق(٢) - - ١٧ ==> ١٣ = ق(٢) + ١٧ ==> ق (٢) = -٤

ثالثا خصائص التكامل المحدود Properties of the Definite Integral

>> تدريب (١) صفحة ١٧٣

إذا كان $\int_{-١}^{٢}$ ٢ل(س) دس = -٢ ، $\int_{-١}^{٢}$ ع(س) دس = ٥ ، فجد قيمة كل مما يأتي :

١) $\int_{-١}^{٢} \frac{٥\ ع(س)}{٢}$ دس $= \int_{-١}^{٢} \frac{٥}{٢} \times$ ع(س) دس $= \int_{-١}^{٢} \frac{٥}{٢}$ ع(س) دس $= \frac{٥}{٢} \times ٥ = \frac{٢٥}{٢}$

٢) $\int_{-١}^{٢}$ (٢ ع(س) – ٣ل(س) – ٢س) دس $= ٢ \int_{-١}^{٢}$ ع(س) دس $- ٣ \int_{-١}^{٢}$ ل(س) دس $- \int_{-١}^{٢}$ ٢س دس

لحل المسألة تحتاج إلى معرفة $\int_{-١}^{٢}$ ل(س) دس ،،، الآن من معطيات السؤال

$\int_{-١}^{٢}$ ٢ ل(س) دس = -٢ ومنه $\int_{-١}^{٢}$ ل(س) دس = -١

∴ $\int_{-١}^{٢}$ (٢ ع(س) – ٣ل(س) – ٢س) دس $= ٢ \times ٥ - ٣ \times -١ - \left[س^٢\right]_{-١}^{٢} = ١٠ + ٣ - ((٢)^٢ - (-١)^٢)$

$= ١٠ + ٣ - (١ - ٤) = ١٣ - ٣ = ١٠$

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

>> تدريب (٢) صفحة ١٧٥

إذا كان $\int_{-١}^{٢} \frac{ق(س)}{٣}$ دس = ٥ ، $\int_{-١}^{٦} ق(س)$ دس = ٤ ، فجد قيمة كل مما يأتي :

١) $\int_{٢}^{-١} ٢\ ق(س)$ دس = ٢ $\int_{٢}^{-١} ق(س)$ دس

من معطيات السؤال $\int_{-١}^{٢} \frac{ق(س)}{٣}$ دس = ٥ ==> $\frac{١}{٣} \int_{-١}^{٢} ق(س)$ دس = ٥ ==> $\int_{-١}^{٢} ق(س)$ دس = ١٥

∴ $\int_{٢}^{-١} ق(س)$ دس = - $\int_{-١}^{٢} ق(س)$ دس = - ١٥

∴ المطلوب : $\int_{٢}^{-١} ٢\ ق(س)$ دس = ٢ × -١٥ = -٣٠

٢) $\int_{٦}^{٢} ق(س)$ دس

$\int_{-١}^{٦} ق(س)$ دس = $\int_{-١}^{٢} ق(س)$ دس + $\int_{٢}^{٦} ق(س)$ دس

٤ = ١٥ + $\int_{٢}^{٦} ق(س)$ دس ومنه $\int_{٢}^{٦} ق(س)$ دس = -١١

∴ المطلوب : $\int_{٦}^{٢} ق(س)$ دس = - $\int_{٢}^{٦} ق(س)$ دس = +١١

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

>> تدريب (٣) صفحة ١٧٥

إذا كان $\int_{٢}^{٥}$ (٣ ق(س) – ٤) دس = ١٨ ، فجد قيمة التكامل الآتي $\int_{٢}^{٥} ق(س)$ دس.

الحل :

$\int_{٢}^{٥}$ (٣ ق(س) – ٤) دس = ١٨ ومنه ٣ $\int_{٢}^{٥} ق(س)$ دس - ٤ دس = ١٨

$\int_{٢}^{٥}$ ٣ ق(س) دس - ٤(٥ – ٢) = ١٨ ومنه $\int_{٢}^{٥}$ ٣ ق(س) دس – ١٢ = ١٨ ومنه

$\int_{٢}^{٥}$ ٣ ق(س) دس = ٣٠ ومنه $\int_{٢}^{٥}$ ق(س) دس = ١٠

>> تدريب (٤) صفحة ١٧٦

١) إذا كان $\int_{١+م^{٣}}^{-٧}$ ق(س) دس = ٠ ، فجد قيمة الثابت م

الحل :

-٧ = $م^{٣}$ + ١ ==> - ٨ = $م^{٣}$ وبأخذ الجذر التكعيبي للطرفين ∴ م = -٢

٢) إذا كان $\int_{ن}^{١}$ (٢س – ٣) دس = ٠ ، فجد قيمة الثابت ن.

الحل :

$\left[(س^{٢} - ٣س)\right]_{ن}^{١}$ = ٠

((١)^{٢} – ٣ × ١) – (ن^{٢} – ٣ن) = ٠

١ – ٣ – ن^{٢} + ٣ن = ٠ ==> -٢ – ن^{٢} + ٣ن = ٠ وبإعادة ترتيب المعادلة ينتج :

- ن^{٢} + ٣ن – ٢ = ٠ الآن اضرب المعادلة بـ (-١) وذلك لجعل معامل ن^{٢} = ١

ن^{٢} – ٣ن + ٢ = ٠ الآن حلل العبارة التربيعية

(ن – ١) (ن – ٢) = ٠ ومنه قيم ن هي : {١ ، ٢}

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

كن كالنخيل عن الأحقاد مرتفعاً ،، يرمى بصخرٍ فيعطي أطيبَ الثمر

منهاجي
متعة التعليم الهادف
تم تحميل الملف من شبكة منهاجي التعليمية

الأسئلة

١) إذا كان $\int_{١}^{٤}$ ٢ ق(س) دس = ١٢ ، $\int_{٤}^{٥}$ ق(س) دس = ٤ ، فجد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\int_{٤}^{١}$ ٣ ق(س) دس = ٣ $\int_{٤}^{١}$ ق (س) دس

من معطيات السؤال $\int_{١}^{٤}$ ٢ ق(س) دس = ٢ $\int_{١}^{٤}$ ق(س) دس = ١٢ ومنه $\int_{١}^{٤}$ ق(س) دس = ٦

∴ $\int_{٤}^{١}$ ق(س) دس = - $\int_{١}^{٤}$ ق(س) دس = - ٦

∴ المطلوب : $\int_{٤}^{١}$ ٣ ق(س) دس = ٣ × -٦ = - ١٨

ب) $\int_{٥}^{١}$ ق(س) دس

$\int_{١}^{٥}$ ق(س) دس = $\int_{١}^{٤}$ ق(س) دس + $\int_{٤}^{٥}$ ق(س) دس = ٦ + ٤ = ١٠

∴ المطلوب : $\int_{٥}^{١}$ ق(س) دس = - $\int_{١}^{٥}$ ق(س) دس = - ١٠

جـ) $\int_{٥}^{٤}$ (ق(س) + ٢س) دس = $\int_{٥}^{٤}$ ق(س) دس + $\int_{٥}^{٤}$ ٢س دس = -٤ + $[س^{٢}]_{٥}^{٤}$

= -٤ + ($٤^{٢}$ − $٥^{٢}$) = -٤ + (١٦ − ٢٥) = -٤ + -٩ = - ١٣

٢) إذا كان $\int_{-١}^{٢}$ $\frac{ل(س)}{٢}$ دس = ٣ ، $\int_{٢}^{-١}$ (هـ(س) + ١) دس = ٥ ، فجد قيمة كل مما يأتي :

أ) $\int_{٢}^{-١}$ هـ (س) دس

$\int_{٢}^{-١}$ $\int_{٢}^{-١}$ $\int_{٢}^{-١}$

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

منهاجي
متعة التعليم الهادف
تم تحميل الملف من شبكة منهاجي التعليمية

من معطيات السؤال : (هـ (س) + ١) دس = هـ (س) دس + ١ دس = ٥ يتبع >>

$\int_{-١}^{٢}$ هـ (س) دس + ١ (-١ – ٢) = ٥ ومنه $\int_{-١}^{٢}$ هـ (س) دس = ٨

ب) $\int_{-١}^{٢}$ (٣ هـ (س) – ٢س + ٣ل (س)) دس = ٣ $\int_{-١}^{٢}$ هـ (س) دس - $\int_{-١}^{٢}$ ٢س دس + ٣ $\int_{-١}^{٢}$ ل (س) دس

** $\int_{-١}^{٢}$ هـ (س) دس = - $\int_{-٢}^{-١}$ هـ (س) دس = - ٨ (من فرع (أ))

** $\int_{-١}^{٢}$ $\frac{ل(س)}{٢}$ دس = $\frac{١}{٢}$ $\int_{-١}^{٢}$ ل (س) دس = ٣ ==> $\int_{-١}^{٢}$ ل (س) دس = ٦ (من معطيات السؤال)

∴ المطلوب $\int_{-١}^{٢}$ (٣هـ (س) – ٢س + ٣ل (س)) دس = ٣ × - ٨ - س^{٢} $]_{-١}^{٢}$ + ٣ × ٦

= - ٢٤ – ((٢^{٢}) - (-١)^{٢}) + ١٨

= - ٢٤ – ٣ + ١٨ = - ٩

٣) إذا كان $\int_{أ-١}^{٥أ+٧}$ ق(س) دس = ٠ ، فجد قيمة الثابت أ .

الحل :

٥ أ + ٧ = أ - ١ ==> ٤ أ + ٧ = -١ ==> ٤ أ = - ٨ ==> أ = -٢

٤) إذا كان $\int_{٣}^{م}$ (٢ – ٤س) دس = ٠ ، فجد قيمة الثابت م .

الحل :

(٢س – ٢س^{٢}) $]_{٣}^{م}$ = ٠

(٢م – ٢م^{٢}) – (٢×٣ – ٢×(٣)^{٢}) = ٢م – ٢م^{٢} – ٦ + ١٨ = ٠ بإعادة ترتيب المعادلة ينتج :

-٢م^{٢} + ٢م + ١٢ = ٠ بالقسمة على -٢ ينتج :

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

م^{٢} – م – ٦ = ٠ ومنه (م – ٣) (م + ٢) = ٠ ومنه قيم م هي : {٣ ، -٢}

٥) إذا كان $\int_{١}^{٤}$ (٣ ق(س) – ٥) دس = ٩ ، فجد قيمة التكامل الآتي : $\int_{٤}^{١}$ (٢ق(س) + ١) دس

الحل :

$$\int_{١}^{٤} (٢ق(س) + ١)\ دس = ٢ \int_{١}^{٤} ق(س)\ دس + \int_{١}^{٤} ١\ دس$$

من معطيات السؤال

$$\int_{٤}^{١} (٣ق(س) – ٥)\ دس = ٣ \int_{٤}^{١} ق(س)\ دس - ٥ \int_{٤}^{١} دس = ٩ \quad \text{ومنه} \quad ٣ \int_{٤}^{١} ق(س)\ دس - ٥ (١ – ٤) = ٩$$

$$٣ \int_{٤}^{١} ق(س)\ دس + ١٥ = ٩ \quad \text{ومنه} \quad ٣ \int_{٤}^{١} ق(س)\ دس = -٦ \quad \text{ومنه} \quad \int_{٤}^{١} ق(س)\ دس = -٢$$

$$\therefore \int_{١}^{٤} ق(س)\ دس = - \int_{٤}^{١} ق(س)\ دس = ٢$$

$$\therefore \text{المطلوب} : \int_{١}^{٤} (٢ق(س) + ١)\ دس = ٢ \int_{١}^{٤} ق(س)\ دس + \int_{١}^{٤} ١\ دس$$

$$= ٢ \times ٢ + ١ (٤ – ١) = ٤ + ٣ = ٧$$

٦) إذا كان $\int_{٠}^{ل}$ (٢س – ١) دس = ٦ ، فجد قيمة الثابت ل .

الحل :

$$\left[(س^{٢} – س) \right]_{٠}^{ل} = ٦$$

$$(ل^{٢} – ل) – (٠) = ٦$$

$$ل^{٢} – ل = ٦ \quad \Longleftarrow \quad ل^{٢} – ل – ٦ = ٠ \quad \Longleftarrow \quad (ل – ٣)(ل + ٢) = ٠$$

∴ قيم الثابت ل هي {٣ ، -٢}

لا تقلقْ من تَدابير البشر،، فأقصى ما يستَطيعُون فعله مَعك،، هو تنفيذ إرادةُ الله

منهاجي
متعة التعليم الهادف
تم تحميل الملف من شبكة منهاجي التعليمية

>> تدريب (١) صفحة ١٧٩

جد قيمة التكامل الآتي : $\int$ ٢١ $(٣س^{٢} + ٤س)(س^{٣} + ٢س^{٢})^{٧}$ دس

الحل :

افرض ص $= س^{٣} + ٢س^{٢}$ $\Longleftarrow$ $\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢} + ٤س$ $\Longleftarrow$ دس $= \frac{دص}{٣س^{٢} + ٤س}$

$\therefore$ $\int$ ٢١ $(٣س^{٢} + ٤س)(س^{٣} + ٢س^{٢})^{٧}$ دس $= \int$ ٢١ $(٣س^{٢} + ٤س)$ (ص)^{٧} $\frac{دص}{٣س^{٢} + ٤س}$

$= \int$ ٢١ $ص^{٧}$ دص $= \frac{٢١ ص^{٨}}{٨} + جـ = \frac{٢١}{٨}(س^{٣} + ٢س^{٢})^{٨} + جـ$

>> تدريب (٢) صفحة ١٨٢

حل الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل $\int_{٣}^{١٦} \frac{١}{\sqrt{٥س + ١}}$ دس

الحل :

افرض ص $= ٥س + ١$ $\Longleftarrow$ $\frac{دص}{دس} = ٥$ $\Longleftarrow$ دس $= \frac{دص}{٥}$

- عند س $= ٣$ ، ص $= ٥ \times ٣ + ١ = ١٦$

- عند س $= ٠$ ، ص $= ٥ \times ٠ + ١ = ١$

$\therefore$ $\int_{٣}^{١} \frac{١}{\sqrt{٥س + ١}}$ دس $= \int_{١٦}^{١} \frac{١}{\sqrt{ص}} \frac{دص}{٥} = \int_{١٦}^{١} \frac{١}{٥} ص^{-\frac{١}{٢}}$ دص $= \frac{١}{٥} \left[\frac{ص^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} \right]_{١٦}^{١}$

$= \frac{١}{٥} \left[٢\sqrt{ص} \right]_{١٦}^{١} = \frac{٢}{٥}\sqrt{١} - \frac{٢}{٥}\sqrt{١٦} = \frac{٢}{٥} - \frac{٨}{٥} = -\frac{٦}{٥}$

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

>> تدريب (٣) صفحة ١٨٢

جد قيمة كل من التكاملات الآتية :-

١) $\int ٣س (س^{٢} + ١)^{-٥}$ دس

$ص = س^{٢} + ١ \Longleftarrow \frac{دص}{دس} = ٢س \Longleftarrow دس = \frac{دص}{٢س}$

$\therefore \int ٣س (س^{٢} + ١)^{-٥}$ دس $= \int ٣س (ص)^{-٥} \frac{دص}{٢س} = \int \frac{٣}{٢} ص^{-٥}$ دص $= \frac{٣}{٢} \times \frac{ص^{-٤}}{-٤} +$ جـ

$= -\frac{٣}{٨} ص^{-٤} +$ جـ $= -\frac{٣}{٨} (س^{٢} + ١)^{-٤} +$ جـ

٢) $\int ٢س قا^{٢} (١ - س^{٢})$ دس

$ص = ١ - س^{٢} \Longleftarrow \frac{دص}{دس} = -٢س \Longleftarrow دس = \frac{دص}{-٢س}$

$\therefore \int ٢س قا^{٢} (١ - س^{٢})$ دس $= \int ٢س قا^{٢} (ص) \frac{دص}{-٢س} = -\int قا^{٢} ص$ دص $=$ - ظا ص + جـ

$=$ - ظا$(١ - س^{٢})$ + جـ

٣) $\int_{١}^{-١} (٤س - ١) \sqrt[٣]{س - ٢س^{٢} - ١}$ دس

$ص = س - ٢س^{٢} - ١ \Longleftarrow \frac{دص}{دس} = ١ - ٤س \Longleftarrow دس = \frac{دص}{١ - ٤س}$

- عند س $= ١$ ، ص $= ١ - ٢ \times (١)^{٢} - ١ \Longleftarrow$ ص $= -٢$

- عند س $= -١$ ، ص $= ١ - ٢ \times (-١)^{٢} - ١ \Longleftarrow$ ص $= -٤$

$\therefore \int_{١}^{-١} (٤س - ١) \sqrt[٣]{س - ٢س^{٢} - ١}$ دس $= \int_{-٢}^{-٤} (٤س - ١) \sqrt[٣]{ص} \frac{دص}{١ - ٤س} = -\int_{-٢}^{-٤} \sqrt[٣]{ص}$ دص

$= -\int_{-٢}^{-٤} ص^{\frac{١}{٣}}$ دص $= -١ \left[\frac{ص^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}}\right]_{-٢}^{-٤} = \frac{-٣}{٤} \sqrt[٣]{ص^{٤}}\Big]_{-٢}^{-٤}$

$= \frac{-٣}{٤} (\sqrt[٣]{(-٤)^{٤}} - \sqrt[٣]{(-٢)^{٤}}) = \frac{-٣}{٤} (\sqrt[٣]{٢٥٦} - \sqrt[٣]{١٦})$

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

تم تحميل الملف من شبكة منهاجي التعليمية

٤) $\int_{\cdot}^{٣} \frac{١}{\sqrt[٥]{س + ١}}$ دس $= \int_{\cdot}^{٣} \frac{١}{(س + ١)^{\frac{١}{٥}}}$ دس $= \int_{\cdot}^{٣} (س + ١)^{-\frac{١}{٥}}$ دس $= \frac{٥}{٤} (س + ١)^{\frac{٤}{٥}} \Big]_{\cdot}^{٣}$

$= \frac{٥}{٤} \sqrt[٥]{(س + ١)^{٤}} \Big]_{\cdot}^{٣} = \frac{٥}{٤} (\sqrt[٥]{(٣ + ١)^{٤}} - \sqrt[٥]{(٠ + ١)^{٤}}) = \frac{٥}{٤} \sqrt[٥]{(٤)^{٤}} - \frac{٥}{٤}$

>> تدريب (٤) صفحة ١٨٢

جد قيمة كل تكامل مما يأتي :

١) $\int (أ س + ب)^{ن}$ دس ، حيثُ أ ، ب ثابتان ، أ $\neq ٠$ ، ن $\neq -١$

افرض ص $= أ س + ب$ $\Longrightarrow$ $\frac{دص}{دس} = أ$ $\Longrightarrow$ دس $= \frac{دص}{أ}$

$\therefore \int (أ س + ب)^{ن}$ دس $= \int ص^{ن} \frac{دص}{أ} = \frac{١}{أ} \int ص^{ن}$ د ص $= \frac{١}{أ} \frac{ص^{ن+١}}{ن + ١} +$ جـ

$= \frac{(أس + ب)^{ن+١}}{أ (ن + ١)} +$ جـ

٢) $\int$ جتا (أ س + ب) دس ، حيثُ أ ، ب ثابتان ، أ $\neq ٠$

افرض ص $= أ س + ب$ $\Longrightarrow$ $\frac{دص}{دس} = أ$ $\Longrightarrow$ دس $= \frac{دص}{أ}$

$\therefore \int$ جتا (أ س + ب) دس $= \int$ جتا ص $\frac{دص}{أ} = \frac{١}{أ} \int$ جتا ص دص $= \frac{١}{أ}$ جاص + جـ

$= \frac{جا (أ س + ب)}{أ} +$ جـ

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

>> تدريب (٥) صفحة ١٨٣

جد قيمة كل تكامل مما يأتي :-

١) $\int_{-١}^{٢} ٦ (١ - ٢س)^{٥}$ دس $= ٦ \times \frac{(١ - ٢س)^{٦}}{-٢ \times ٦} \Big]_{-١}^{٢} = -\frac{١}{٢} (١ - ٢س)^{٦} \Big]_{-١}^{٢}$

$= -\frac{١}{٢} ((١ - ٢ \times ٢)^{٦} - (١ - ٢ \times -١)^{٦}) = -\frac{١}{٢} ((-٣)^{٦} - (٣)^{٦}) =$ صفر

٢) $\int$ ١٢ جا (١ – ٤س) دس = ١٢ × $\frac{\text{- جتا (١ – ٤س)}}{-٤}$ + جـ = ٣ جتا (١ – ٤س) + جـ

الأسئلة

١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية :-

أ) $\int$ (١ – ٢س) (س – س^{٢})^{٤} دس ،،، ص = س – س^{٢}

ب) $\int$ ٦س^{٢} $\sqrt[٥]{(٢س^{٣} - ٢)^{٢}}$ دس ،،، ص = ٢س^{٣} – ٢

جـ) $\int$ (٢س – ٣س^{٢}) قا^{٢}(س^{٣} – س^{٢}) دس ،،، ص = س^{٣} – س^{٢}

د) $\int$ $\frac{٣س - ٩}{(س^{٢} - ٦س)^{٢}}$ دس ،،، ص = س^{٢} – ٦س

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية :-

أ) $\int$ $\sqrt[٣]{(٣س - ٢)^{٢}}$ دس = $\int$ (٣س – ٢)$^{\frac{٢}{٣}}$ دس = $\frac{(٣س - ٢)^{\frac{٥}{٣}}}{\frac{٥}{٣} \times ٣}$ + جـ = $\frac{(٣س - ٢)^{\frac{٥}{٣}}}{٥}$ + جـ

ب) $\int$ (س – ١) (٢س^{٢} – ٤س + ١)^{٥} دس

ص = ٢س^{٢} – ٤س + ١ ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٤س – ٤ ⟸ دس = $\frac{\text{دص}}{٤س - ٤}$

∴ $\int$ (س – ١) (٢س^{٢} – ٤س + ١)^{٥} دس = $\int$ (س – ١) (ص)^{٥} $\frac{\text{دص}}{٤س - ٤}$ = $\int$ $\frac{١}{٤}$ ص^{٥} دص

$\frac{١}{٤}$ = $\frac{ص^{٦}}{٦}$ × $\frac{١}{٤}$ + جـ = $\frac{ص^{٦}}{٢٤}$ + جـ = $\frac{(٢س^{٢} - ٤س + ١)^{٦}}{٢٤}$ + جـ

$\int$ $\frac{\text{ظا (٢ – س)}}{-١}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف
تم تحميل الملف من شبكة منهاجي التعليمية

جـ) $\int ٢ \text{ قا}^{٢}(٢ - س)$ دس $= ٢$ $+$ جـ $= -٢$ ظا $(٢ - س) +$ جـ

د) $\int ٢س^{٣}$ جا $(س^{٤} + ١)$ دس

افرض ص $= س^{٤} + ١$ $\Longleftarrow$ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٤س^{٣}$ $\Longleftarrow$ دس $= \frac{\text{دص}}{٤س^{٣}}$

$\therefore \int ٢س^{٣}$ جا ص $\frac{\text{دص}}{٤س^{٣}} = \frac{١}{٢}$ جاص دص $= -\frac{١}{٢}$ جتا ص $+$ جـ $= \frac{-١}{٢}$ جتا$(س^{٤} + ١) +$ جـ

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية :-

أ) $\int_{٠}^{٢} \sqrt{٤س + ١}$ دس $= \int_{٠}^{٢} (٤س + ١)^{\frac{١}{٢}}$ دس $= ٢ \frac{(٤س + ١)^{\frac{٣}{٢}}}{٤ \times ٣} \Big]_{٠}^{٢} = \frac{١}{٦} \Big[\sqrt{(٤س + ١)^{٣}} \Big]_{٠}^{٢}$

$= \frac{١}{٦} \left(\sqrt{(٤ \times ٢ + ١)^{٣}} - \sqrt{(٤ \times ٠ + ١)^{٣}} \right) = \frac{١}{٦} (٢٧ - ١) = \frac{١}{٦} \times ٢٦ = \frac{٢٦}{٦}$

ب) $\int_{-١}^{١} ٣س^{٢} (س^{٣} - ١)^{٣}$ دس $=$ صفر ، لأن $\int_{أ}^{أ}$ ق(س) دس $=$ صفر

جـ) $\int_{١}^{٠} ٢س^{٣} \sqrt{س^{٢} - ١}$ دس

افرض ص $= س^{٢} - ١$ $\Longleftarrow$ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢س$ $\Longleftarrow$ دس $= \frac{\text{دص}}{٢س}$

- عند س $= ١$ ، فإن ص $= ٠$
- عند س $= ٠$ ، فإن ص $= -١$

$\therefore \int_{١}^{٠} ٢س^{٣} \sqrt{س^{٢} - ١}$ دس $= \int_{٠}^{-١} ٢س^{٣} \sqrt{ص} \frac{\text{دص}}{٢س} = \int_{٠}^{-١} ص^{\frac{١}{٣}}$ دص $= \frac{٣}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}} \Big]_{٠}^{-١}$

$= \frac{٣}{٤} \left[\sqrt[٣]{(ص)^{٤}} \right]_{٠}^{-١} = \frac{٣}{٤} \left(\sqrt[٣]{(-١)^{٤}} - \sqrt[٣]{(٠)^{٤}} \right) = \frac{٣}{٤}$

د) $\int_{١}^{٢} \frac{٣ - ٢س}{(س^{٢} - ٣س)^{٢}}$ دس

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

افرض ص = س^{٢} – ٣س ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢س – ٣ ⟸ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{٢س – ٣}}$

- عند س = ١ ، ص = -٢

- عند س = ٢ ، ص = -٢

∴ $\int_{١}^{٢} \frac{\text{٣ – ٢س}}{(\text{س}^{٢} - \text{٣س})^{٢}}$ دس = $\int_{-٢}^{-٢} \frac{\text{٣ – ٢س}}{\text{ص}^{٢}} \times \frac{\text{دص}}{\text{٢س – ٣}} = \Big[\frac{-١}{\text{ص}^{٢}}\Big]_{-٢}^{-٢}$ دص = صفر

٤) إذا علمت أن ق(- ٨) = ٥ ، ق(٢٧) = -٦ ، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-٢}^{٣}$ ٣س^{٢} قَ (س^{٣}) دس

الحل :

ص = س^{٣} ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣س^{٢} ⟸ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{٣س}^{٢}}$

- عند س = -٢ ، ص = - ٨

- عند س = ٣ ، ص = ٢٧

∴ $\int_{-٢}^{٣}$ ٣س^{٢} قَ (س^{٣}) دس = $\int_{-٨}^{٢٧} \frac{\text{دص}}{\text{٣س}^{٣}}$ قَ (ص) دص = ق(٢٧) – ق(-٨)

= -٦ – ٥ = -١١

٥) إذا علمت أن $\int_{٥}^{٢}$ ق(س) دس = ٣ ، فجد قيمة التكامل التالي : $\int_{-١}^{٢}$ ٨ س ق (س^{٢} + ١) دس.

الحل :

ص = س^{٢} + ١ ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢س ⟸ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{٢س}}$

- عند س = -١ ، فإن ص = ٢

- عند س = ٢ ، فإن ص = ٥

∴ $\int_{-١}^{٢}$ ٨ س ق (س^{٢} + ١) دس = $\int_{٢}^{٥}$ ٨س ق(ص) $\frac{\text{دص}}{\text{٢س}}$ = ٤ $\int_{٢}^{٥}$ ق(ص) دص = ٤ × -٣ = -١٢

٦) جد قيمة التكامل الآتي : $\int_{٠}^{٤}$ ٢س $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٩}$ دس

الحل :

ص = س^{٢} + ٩ ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢س ⟸ دس = $\frac{\text{دص}}{\text{٢س}}$

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

- عند س = ٠ ، ص = ٩

- عند س = ٤ ، ص = ٢٥

$$\therefore \int_{٠}^{٤} ٢س \sqrt{س^{٢} + ٩}\ دس = \int_{٩}^{٢٥} ٢س \sqrt{ص}\ \frac{دص}{٢س} = \int_{٩}^{٢٥} \sqrt{ص}\ دص = \int_{٩}^{٢٥} ص^{\frac{١}{٢}}\ دص$$

$$= \left[\frac{٢ص^{\frac{٣}{٢}}}{٣} \right]_{٩}^{٢٥} = \frac{٢}{٣} \left[ص^{\frac{٣}{٢}} \right]_{٩}^{٢٥} = \frac{٢}{٣} \left(\sqrt{(٢٥)^{٣}} - \sqrt{(٩)^{٣}} \right) = \frac{٢}{٣}(١٢٥ - ٢٧) = \frac{١٩٦}{٣}$$

الفصل الثاني : تطبيقات التكامل

أولا تطبيقات هندسية Geometric Applications

>> تدريب (١) صفحة ١٨٦

جد قاعدة الاقتران ق ، علما بأن منحناه يمر بالنقطة (-١ ، ٢) ، وأنّ ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة : قَ(س) = ٢س – ١

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

الحل :

م = قَ(س) = ٢س – ١

$$ق(س) = \int قَ(س)\ دس = \int (٢س - ١)\ دس = س^{٢} - س + جـ$$

ق(-١) = (-١)^{٢} – (-١) + جـ = ٢ <== ١ + ١ + جـ = ٢ ==> جـ = ٠

∴ ق(س) = س^{٢} – س

>> تدريب (٢) صفحة ١٨٧

جد قيمة ق(١٤) ، علما بأن ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة : قَ(س) = ٦ $\sqrt[٣]{٢س - ١}$ ، وأن منحناه يمر بالنقطة (٠ ، ٥) .

الحل :

$$ق(س) = \int قَ(س)\ دس = \int ٦ \sqrt[٣]{٢س - ١}\ دس = ٦ \int (٢س - ١)^{\frac{١}{٣}}\ دس = ٦ \times \frac{(٢س - ١)^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣} \times ٢} + جـ$$

∴ ق (س) = $\frac{٩}{٤}$ $\sqrt[٣]{(٢س - ١)^{٤}}$ + جـ

ق (٠) = $\frac{٩}{٤}$ $\sqrt[٣]{(٢ \times ٠ - ١)^{٤}}$ + جـ = ٥ ⟸ جـ = ٥ − $\frac{٩}{٤}$ = $\frac{١١}{٤}$

∴ ق(س) = $\frac{٩}{٤}$ $\sqrt[٣]{(٢س - ١)^{٤}}$ + $\frac{١١}{٤}$

ق(١٤) = $\frac{٩}{٤}$ $\sqrt[٣]{(٢ \times ١٤ - ١)^{٤}}$ + $\frac{١١}{٤}$ = $\frac{٩}{٤}$ × ٨١ + $\frac{١١}{٤}$ = ١٨٥

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

الأسئلة

١) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يساوي (٦ − ٢س + ٩س^{٣}) ، فجد قاعدة الاقتران ق ، علما بأن ق(٠) = ٥

الحل :

ق (س) = $\int$ ق′(س) دس = $\int$ (٦ − ٢س + ٩س^{٣}) دس = ٦س − س^{٢} + $\frac{٩س^{٤}}{٤}$ + جـ

ق(٠) = ٦ × ٠ − (٠)^{٢} + $\frac{٩(٠)^{٤}}{٤}$ + جـ = ٥ ⟸ جـ = ٥

∴ ق(س) = ٦س − س^{٢} + $\frac{٩س^{٤}}{٤}$ + ٥

٢) جد قاعدة الاقتران ق ، إذا كان ميل المماس لمنحنى ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة : ق′(س) = $\frac{٢س}{\sqrt[٣]{س^{٢} + ٨}}$ ، وكان منحناه يمر بالنقطة (٠ ، ٤).

الحل :

ق (س) = $\int$ ق′(س) دس = $\int$ $\frac{٢س}{\sqrt[٣]{س^{٢} + ٨}}$ دس

افرض ص = س^{٢} + ٨ ⟸ $\frac{دص}{دس}$ = ٢س ⟸ دس = $\frac{دص}{٢س}$

∴ ق (س) = $\int$ $\frac{٢س}{\sqrt[٣]{ص}}$ × $\frac{دص}{٢س}$ = $\int$ $\frac{١}{\sqrt[٣]{ص}}$ دص = $\int$ $\frac{١}{ص^{\frac{١}{٣}}}$ دص = ص$^{\frac{-١}{٣}}$دص

= $\frac{٣}{٢}$ ص$^{\frac{٢}{٣}}$ + جـ = $\frac{٣}{٢}$ (س^{٢} + ٨)$^{\frac{٢}{٣}}$ + جـ = $\frac{٣}{٢}$ $\sqrt[٣]{(س^{٢} + ٨)^{٢}}$ + جـ

$\frac{٣}{٢}$ $\sqrt[٣]{((٠)^{٢} + ٨)^{٢}}$ $\frac{٣}{٢}$

ق(٠) = + جـ = ٤ ⟸ × ٤ + جـ = ٤ ⟸ جـ = -٢

∴ ق(س) = $\frac{٣}{٢}$ $\sqrt[٣]{(س^{٢} + ٨)^{٢}}$ - ٢

٣) جد قيمة ق(١) ، علما بأن ميل المماس لمنحنى ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يساوي ٢٥ (٥س +٤)^{٤} ، وأن منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (-١ ، ٧).

الحل :

ق (س) = $\int$ ق′(س) دس = $\int$ ٢٥ (٥س + ٤)^{٤} دس = ٢٥ × $\frac{(٥س + ٤)^{٥}}{٥ \times ٥}$ + جـ = (٥س + ٤)^{٥} + جـ

ق(-١) = (٥×-١ + ٤)^{٥} + جـ = ٧ ⟸ -١ + جـ = ٧ ⟸ جـ = ٨

∴ ق (س) = (٥س + ٤)^{٥} + ٨ ⟸ ق (١) = (٥ × ١ + ٤)^{٥} + ٨ = ^{٥}٩ + ٨ = ٥٩٠٥٧

٤) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ل عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة : ل′(س) = ٢س (٤ – ٣س) ، فجد قاعدة الاقتران ل علما بأن منحناه يمر بالنقطة (٠ ، ٣).

الحل :

ل (س) = $\int$ ل′(س) دس = $\int$ ٢س (٤ – ٣س) دس = $\int$ (٨س – ٦س^{٢}) دس = ٤س^{٢} – ٢س^{٣} + جـ

ل(٠) = ٤ × (٠)^{٢} – ٢ (٠)^{٣} + جـ = ٣ ⟸ جـ = ٣

∴ ل (س) = ٤س^{٢} – ٢س^{٣} + ٣

٥) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران هـ يعطى بالقاعدة هـ′ (س) = $\frac{٢س^{٢} - ٥س}{س}$ ، س ≠ ٠ ، فجد هـ (٢) ، علما بأن منحنى الاقتران هـ يمر بالنقطة (-١ ، ٥) .

الحل :

هـ (س) = $\int$ هـ′ (س) د س = $\int$ $\frac{٢س^{٢} - ٥س}{س}$ دس = $\int$ (٢س – ٥) دس = س^{٢} – ٥س + جـ

هـ (-١) = (-١)^{٢} – ٥ × -١ + جـ = ٥ ⟸ ١ + ٥ + جـ = ٥ ⟸ جـ = -١

∴ هـ (س) = س^{٢} – ٥س – ١

هـ (٢) = (٢)^{٢} - ٥ × ٢ – ١ = ٤ – ١٠ – ١ = -٧

أن تحقق هدفاً صغيراً كل يوم يعلو بك على سلم النجاح،، خير لك من الوقوف في مكانك وانتظار المجهول .

ثانيا تطبيقات فيزيائية Physical Applications

>> تدريب (١) صفحة ١٩٠

١) يتحرك جُسيم على خط مستقيم ، وتعطى سرعته بالعلاقة : ع(ن) = (٢ن – ٥) م/ث ، حيث ن : الزمن بالثواني. جد موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة، علما بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٣م.

٢) يتحرك جُسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة تعطى بالعلاقة : ع(ن) = (٦)(١ – ٢ن)^{٢}) م/ث. جد موقعه بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة، علما بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٥م.

الحل :

١) ف (ن) = $\int$ ع (ن) دن = $\int$ (٢ن – ٥) دن = ن^{٢} – ٥ن + جـ

ف(٠) = ٣ <== (٠)^{٢} – ٥ (٠) + جـ = ٣ <== جـ = ٣

∴ ف (ن) = ن^{٢} – ٥ن + ٣

ف(٢) = (٢)^{٢} – ٥(٢) + ٣ = ٤ – ١٠ + ٣ = - ٣م

٢) ف (ن) = $\int$ ع (ن) دن = $\int$ (٦)(١ – ٢ن)^{٢}) دن = $\int$ (٦ (١ – ٤ن + ٤ن^{٢}) دن

= $\int$ (٦ – ٢٤ن + ٢٤ن^{٢}) دن = ٦ن – ١٢ن^{٢} + ٨ ن^{٣} + جـ

ف (٠) = ٦×٠ – ١٢×(٠)^{٢} + ٨ ×(٠)^{٣} + جـ = ٥ <== جـ = ٥

∴ ف(ن) = ٦ن – ١٢ن^{٢} + ٨ ن^{٣} + ٥

ف(١) = ٦ × ١ – ١٢ × (١)^{٢} + ٨ × (١)^{٣} + ٥ = ٦ – ١٢ + ٨ + ٥ = ٧ م

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

>> تدريب (٢) صفحة ١٩١

يتحرك جسيم على خط مستقيم ، وبتسارع ثابت مقدارة ت(ن) = -١٢ م/ث^{٢}. إذا كانت سرعته الابتدائية ع(٠) = ٥ م/ث ، وموقعه الابتدائي ف(٠) = ٣م، فجد :

١) سرعة الجسيم بعد مرور أربع ثوانٍ من بدء الحركة.

٢) موقع الجسيم بعد مرور ثلاث ثوانٍ من بدء الحركة.

الحل :

١) ع (ن) = $\int$ ت (ن) د ن = $\int$ -١٢ دن = -١٢ن + جـ

ع(٠) = -١٢ × ٠ + جـ = ٥ <== جـ = ٥

∴ ع (ن) = -١٢ن + ٥

ع (٤) = -١٢ × ٤ + ٥ = -٤٨ + ٥ = -٤٣ م/ث

٢) ف (ن) = $\int$ ع (ن) دن = $\int$ (-١٢ن + ٥) دن = -٦ن^{٢} + ٥ن + جـ

ف (٠) = -٦×(٠)^{٢} + ٥×٠ + جـ = ٣ <== جـ = ٣

∴ ف(ن) = -٦ن^{٢} + ٥ن + ٣

ف (٣) = -٦(٣)^{٢} + ٥×٣ + ٣ = -٥٤ + ١٥ + ٣ = -٣٦ م/ث

الأسئلة

١) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور ن ثانية من بدء حركته تعطى بالعلاقة : ع(ن) = (١٢ جتا (٢ن – ١)) م/ث . جد القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة.

الحل :

ف (ن) = $\int$ ع (ن) دن = $\int$ ١٢ جتا (٢ن – ١) دن = ١٢ × $\frac{\text{جا (٢ن – ١)}}{٢}$ + جـ

∴ ف (ن) = ٦ جا (٢ن – ١) + جـ

٢) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور ن ثانية من بدء حركتها تعطى بالعلاقة : ع(ن) = (٤ن + ٨) م/ث. جد موقع النقطة المادية بعد مرور أربع ثوانٍ من بدء حركتها ، علما بأن موقعها الابتدائي ف (٠) = ٢م.

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

الحل :

$$ف(ن) = \int ع(ن)\,دن = \int (٤ن + ٨)\,دن = ٢ن^{٢} + ٨ن + جـ$$

$$ف(٠) = ٢ \implies ٢(٠)^{٢} + ٨(٠) + جـ = ٢ \implies جـ = ٢$$

$$\therefore ف(ن) = ٢ن^{٢} + ٨ن + ٢ \implies ف(٤) = ٢(٤)^{٢} + ٨ \times ٤ + ٢ = ٦٦م$$

٣) إذا كان تسارع جسيم يسير بخط مستقيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة تعطى بالعلاقة :

ت (ن) = ٤٨ (١ – ٢ن)^{٣} م/ث^{٢} ، وكان موقعه الابتدائي ف(٠) = ٣م ، وسرعته الابتدائية ع(٠) = ٢م/ث، فجد :

أ) سرعة الجسيم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة.

ب) موقع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

الحل :

أ) $$ع(ن) = \int ت(ن)\,دن = \int ٤٨ (١ – ٢ن)^{٣}\,دن = ٤٨ \times \frac{(١ – ٢ن)^{٤}}{-٢ \times ٤} + جـ =$$

$$= -٦ (١ – ٢ن)^{٤} + جـ$$

$$ع(٠) = -٦ (١ – ٢ \times ٠)^{٤} + جـ = ٢ \implies جـ = ٨$$

$$\therefore ع(ن) = -٦ (١ – ٢ن)^{٤} + ٨$$

$$ع(١) = -٦ (١ – ٢ \times ١)^{٤} + ٨ = -٦ + ٨ = ٢م/ث$$

ب) $$ف(ن) = \int ع(ن)\,دن = \int (-٦ (١ – ٢ن)^{٤} + ٨)\,دن = -٦ \times \frac{(١ – ٢ن)^{٥}}{-٢ \times ٥} + ٨ن + جـ$$

$$= \frac{٣}{٥} (١ – ٢ن)^{٥} + ٨ن + جـ$$

$$ف(٠) = \frac{٣}{٥} (١ – ٢ \times ٠)^{٥} + ٨ \times ٠ + جـ = ٣ \implies \frac{٣}{٥} + جـ = ٣ \implies جـ = \frac{١٢}{٥}$$

$$\therefore ف(ن) = \frac{٣}{٥} (١ – ٢ن)^{٥} + ٨ن + \frac{١٢}{٥}$$

$$ف(٢) = \frac{٣}{٥} (١ – ٢ \times ٢)^{٥} + ٢ \times ٨ + \frac{١٢}{٥} \implies ف(٢) = \frac{-٦٣٧}{٥} م$$

٤) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة تعطى بالقاعدة :

ع(ن) = (٣ن – ١) (٤ن + ١) م/ث. جد:

أ) القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة.

ب) موقع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة ، علما بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٧م.

الحل :

أ) ف (ن) = $\int$ ع (ن) دن = $\int$ (٣ن – ١) (٤ن + ١) دن = $\int$ (١٢ن^{٢} – ن – ١) دن

∴ ف (ن) = ٤ن^{٣} – $\frac{ن^{٢}}{٢}$ – ن + جـ

ب) ف (٠) = ٤(٠)^{٣} – $\frac{(٠)^{٢}}{٢}$ – ٠ + جـ = ٧ ⟸ جـ = ٧

ف (ن) = ٤ن^{٣} – $\frac{ن^{٢}}{٢}$ – ن + ٧

ف (٢) = ٤ (٢)^{٣} – $\frac{(٢)^{٢}}{٢}$ – ٢ + ٧ = ٣٢ – ٢ – ٢ + ٧ = ٣٥ م

ثالثا المساحة The Area

>> تدريب (١) صفحة ١٩٨

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) ، ومحور السينات على الفترة المحددة في كل مما يأتي:-

١) ق(س) = ١٢ – ٤س ، على الفترة [١ ، ٢]

٢) ق(س) = ٣س^{٢} – ١٢س ، على الفترة [٠ ، ٢]

٣) ق(س) = ٦ – ٢س ، على الفترة [١ ، ٤]

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

الحل :

١) ق(س) = ١٢ – ٤س ، على الفترة [١ ، ٢]

١٢ – ٤س = ٠ ⟸ س = ٣

$\int_{١}^{٢}$ ق (س) دس = $\int_{١}^{٢}$ (١٢ – ٤س) دس = $\left[(١٢س – ٢س^{٢}) \right]_{١}^{٢}$

= (١٢ × ٢ – ٢ × ٢^{٢}) – (١٢ × ١ – ٢ × ١^{٢})

= (٢٤ – ٨) – (١٢ – ٢) = ١٦ – ١٠ = ٦

∴ م = $\int_{١}^{٢}$ | ق(س) | دس = ٦ وحدة مربعة

٢) ق(س) = ٣س^{٢} – ١٢س ، على الفترة [٠ ، ٢]

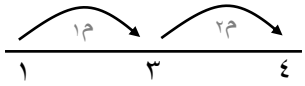
٣س^{٢} – ١٢س = ٠ ==> ٣س (س – ٤) = ٠ ==> س = ٠ ، س = ٤

$$\int_{٠}^{٢} ق(س)\,د\,س = \int_{٠}^{٢} (٣س^{٢} - ١٢س)\,دس = [س^{٣} - ٦س^{٢}]_{٠}^{٢} = ((٢)^{٣} - ٦(٢)^{٢}) - (صفر) = -١٦$$

∴ م = $\int_{٠}^{٢} |ق(س)|\,دس$ = ١٦ وحدة مربعة

٣) ق(س) = ٦ – ٢س ، على الفترة [١ ، ٤]

إذن هنا نجزأ لتكامل



٦ – ٢س = ٠ ==> س = ٣ لاحظ أن س = ٣ تقع ضمن الفترة

$$* \int_{١}^{٣} ق(س)\,دس = \int_{١}^{٣} (٦ - ٢س)\,دس = [٦س - س^{٢}]_{١}^{٣} = (٦\times٣ - (٣)^{٢}) - (٦\times١ - (١)^{٢})$$

$$= (١٨ - ٩) - (٦ - ١) = ٩ - ٥ = ٤$$

∴ م$_{١}$ = $\int_{١}^{٣} |ق(س)|\,دس$ = ٤ وحدة مربعة

$$* \int_{٣}^{٤} ق(س)\,دس = \int_{٣}^{٤} (٦ - ٢س)\,دس = [٦س - س^{٢}]_{٣}^{٤} = (٦\times٤ - (٤)^{٢}) - (٦\times٣ - (٣)^{٢})$$

$$= (٢٤ - ١٦) - (١٨ - ٩) = ٨ - ٩ = -١$$

∴ م$_{٢}$ = $\int_{٣}^{٤} |ق(س)|\,دس$ = ١ وحدة مربعة

∴ المساحة الكلية = م$_{١}$ + م$_{٢}$ = ٤ + ١ = ٥ وحدات مربعة

<< تدريب (٢) صفحة ١٩٨

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) = س^{٢} – ٢س – ٣ ، ومحور السينات.

الحل :

تعتبر حدود التكامل

س^{٢} – ٢س – ٣ = صفر ==> (س – ٣) (س + ١) = ٠ ==> س = ٣ ، س = -١

$$\int_{-١}^{٣} (س^{٢} - ٢س - ٣)\,دس = \left[\frac{س^{٣}}{٣} - س^{٢} - ٣س\right]_{-١}^{٣}$$

$$\frac{(٣)^{٣}}{٣} \qquad \frac{(-١)^{٣}}{٣}$$

تم تحميل الملف من شبكة منهاجي التعليمية

$= (-٣ \times ٣ - {}^{٢}(٣) -) - (-٣ \times ٣ - {}^{٢}(-١) -) =$

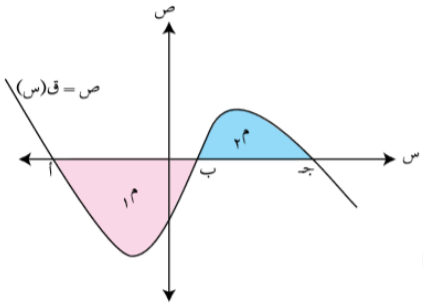
$= (٩ - ٩ - ٩) - (٣ + ١ - \frac{-١}{٣}) = -٩ - (٢ + \frac{-١}{٣}) = -٩ - \frac{٥}{٣} = \frac{-٣٢}{٣}$

$\therefore$ م $= \int_{-١}^{٣} |$ ق (س) | دس $= \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

القلق لا يمنع ألم الغد ،، لكنه يسرق متعة اليوم .

>> تدريب (٣) صفحة ١٠٠

يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران ص = ق(س) ، فإذا كانت المساحة م$_{١}$ = ٨ وحدات مربعة ، والمساحة م$_{٢}$ = ٥ وحدات مربعة ، فجد قيمة كل مما يأتي ، مبررا إجابتك .



١) $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) دس $= -٨$ ؛ لأن ق (س) تحت محور السينات

٢) $\int_{ب}^{جـ}$ ق (س) دس $= +٥$ ؛ لأن ق (س) فوق محور السينات

٣) $\int_{أ}^{جـ}$ ق(س) دس $= \int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس + $\int_{ب}^{جـ}$ ق(س) دس $= -٨ + ٥ = -٣$

٤) مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات على الفترة [أ ، جـ]

م = م$_{١}$ + م$_{٢}$ = ٨ + ٥ = ١٣ وحدة مربعة

الأسئلة

١) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) ، ومحور السينات والمستقيمين المحددين في كل مما يأتي :-

أ) ق (س) = ١٢ ، س = -١ ، س = ٢

ب) ق (س) = ٥ – ٢س ، س = -٢ ، س = ٢

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

منهاجي
متعة التعليم الهادف
تم تحميل الملف من شبكة منهاجي التعليمية

جـ) ق(س) = ٣س^{٢} – ٣ ، س = -٢ ، س = -٤

الحل :

أ) ق (س) = ١٢ ، س = -١ ، س = ٢ المنحنى اقتران ثابت لا يقطع محور السينات

$$\int_{-١}^{٢} \text{ق (س) دس} = \int_{-١}^{٢} ١٢ \text{ دس} = [١٢س]_{-١}^{٢} = (١٢ \times ٢ - ١٢ \times -١) = ٢٤ + ١٢ = ٣٦$$

∴ م = $\int_{-١}^{٢}$ | ق (س) | دس = ٣٦ وحدة مربعة

ب) ق (س) = ٥ – ٢س ، س = -٢ ، س = ٢

٥ – ٢س = ٠ ==> س = ٢,٥ لا تقع ضمن الفترة [-٢ ، ٢]

$$\int_{-٢}^{٢} \text{ق (س) دس} = \int_{-٢}^{٢} (٥ - ٢س) \text{ دس} = [٥س - س^{٢}]_{-٢}^{٢} = (٥ \times ٢ - (٢)^{٢}) - (٥ \times -٢ - (-٢)^{٢})$$

$$= (١٠ - ٤) - (-١٠ - ٤) = ٦ + ١٤ = ٢٠$$

∴ م = $\int_{-٢}^{٢}$ | ق (س) | دس = ٢٠ وحدة مربعة

جـ) ق(س) = ٣س^{٢} – ٣ ، س = -٢ ، س = -٤

٣س^{٢} – ٣ = ٠ ==> س = +١ ، س = -١ لا يقع أي منهما ضمن الفترة [-٢ ، -٤]

$$\int_{-٤}^{-٢} \text{ق (س) دس} = \int_{-٤}^{-٢} (٣س^{٢} - ٣) \text{ دس} = [س^{٣} - ٣س]_{-٤}^{-٢} = ((-٢)^{٣} - ٣ \times -٢) - ((-٤)^{٣} - ٣ \times -٤)$$

$$= (-٨ + ٦) - (-٦٤ + ١٢) = -٢ + ٥٢ = ٥٠$$

∴ م = $\int_{-٤}^{-٢}$ | ق (س) | دس = ٥٠ وحدة مربعة

٢) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) ، ومحور السينات على الفترة المحددة في كل مما يأتي :-

أ) ق (س) = ٦ - ٦س^{٢} ، على الفترة [-٢ ، ٠]

ب) ق (س) = ٤س^{٣} ، على الفترة [-١ ، ١]

جـ) ق (س) = ٣س^{٢} – ٤٨ ، على الفترة [٣ ، ٥]

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

تم تحميل الملف من شبكة منهاجي التعليمية

د) ق (س) = - س^{٢} – ٤ ، على الفترة [-١ ، ١]

الحل :

أ) ق (س) = ٦ - ٦س^{٢} ، على الفترة [-٢ ، ٠]

٦ – ٦س^{٢} = ٠ ==> س = +١ ، س = -١

لاحظ أن س = -١ تقع ضمن الفترة المعطاة

* $\int_{-٢}^{-١}$ (٦ – ٦س^{٢}) دس = [٦س – ٢س^{٣}]$_{-٢}^{-١}$ = (٦×-١ – ٢(-١)^{٣}) – (٦×-٢ – ٢×(-٢)^{٣})

= (-٦ - -٢) – (-١٢ - -١٦) = -٤ - ٤ = -٨

∴ م$_{١}$ = $\int_{-٢}^{-١}$ | ق (س) | دس = ٨ وحدة مربعة

* $\int_{-١}^{٠}$ (٦ – ٦س^{٢}) دس = [٦س – ٢س^{٣}]$_{-١}^{٠}$ = (٦×٠ – ٢(٠)^{٣}) – (٦×-١ – ٢(-١)^{٣})

= صفر – (-٦ +٢) = ٠ - -٤ = ٤

∴ م$_{٢}$ = $\int_{-١}^{٠}$ | ق (س) | دس = ٤ وحدة مربعة

∴ المساحة الكلية = م$_{١}$ + م$_{٢}$ = ٨ + ٤ = ١٢ وحدة مربعة

ب) ق (س) = ٤س^{٣} ، على الفترة [-١ ، ١]

٤س^{٣} = ٠ ==> س = ٠ تقع ضمن الفترة المعطاة

* $\int_{-١}^{٠}$ ٤س^{٣} دس = [س^{٤}]$_{-١}^{٠}$ = (٠)^{٤} – (-١)^{٤} = (٠ – ١) = -١

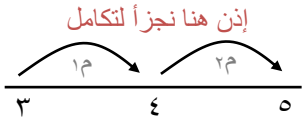
∴ م$_{١}$ = $\int_{-١}^{٠}$ | ق (س) | دس = ١ وحدة مربعة

* $\int_{٠}^{١}$ ٤س^{٣} دس = [س^{٤}]$_{٠}^{١}$ = (١)^{٤} – (٠)^{٤} = ١ – ٠ = ١

∴ م$_{٢}$ = $\int_{٠}^{١}$ | ق (س) | دس = ١ وحدة مربعة

∴ المساحة الكلية = م١ + م٢ = ١ + ١ = ٢ وحدة مربعة

جـ) ق (س) = ٣س^{٢} – ٤٨ ، على الفترة [٣ ، ٥]



٣س^{٢} – ٤٨ = ٠ ⟸ س = -٤ ، س = +٤

لاحظ أن س = ٤ تقع ضمن الفترة المعطاة

$$* \int_{٣}^{٤} (٣س^{٢} - ٤٨)\,دس = (س^{٣} - ٤٨س)\Big]_{٣}^{٤} = ((٤)^{٤} - ٤٨ \times ٤) - ((٣)^{٣} - ٤٨ \times ٣)$$

$$= (٦٤ - ١٩٢) - (٢٧ - ١٤٤) = -١١$$

∴ م٢ = $\int_{٣}^{٤} |ق(س)|\,دس$ = ١١ وحدة مربعة

$$* \int_{٤}^{٥} (٣س^{٢} - ٤٨)\,دس = (س^{٣} - ٤٨س)\Big]_{٤}^{٥} = ((٥)^{٣} - ٤٨ \times ٥) - ((٤)^{٤} - ٤٨ \times ٤)$$

$$= (١٢٥ - ٢٤٠) - (٦٤ - ١٩٢) = ١٣$$

∴ م٢ = $\int_{٣}^{٤} |ق(س)|\,دس$ = ١٣ وحدة مربعة

∴ المساحة الكلية = م١ + م٢ = ١١ + ١٣ = ٢٤ وحدة مربعة

د) ق (س) = - س^{٢} – ٤ ، على الفترة [-١ ، ١]

- س^{٢} – ٤ = ٠ عبارة تربيعية لا تحلل

$$\int_{-١}^{١} (-س^{٢} - ٤)\,دس = (-\frac{س^{٣}}{٣} - ٤س)\Big]_{-١}^{١} = (-\frac{(١)^{٣}}{٣} - ٤ \times ١) - (-\frac{(-١)^{٣}}{٣} - ٤ \times -١)$$

$$= -\frac{١}{٣} - ٤ - (٤ + \frac{١}{٣}) = -\frac{٢}{٣} - ٨ = -\frac{٢٦}{٣}$$

∴ م = $\int_{-١}^{١} |ق(س)|\,دس = \frac{٢٦}{٣}$ وحدة مربعة

٣) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) ، ومحور السينات في كل مما يأتي :-

أ) ق (س) = ٤س – س^{٢}

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

ب) ق (س) = ٤س^{٣} – ١٢س^{٢}

الحل :

أ) ق (س) = ٤س – س^{٢}

تعتبر حدود التكامل

٤س – س^{٢} = ٠ ⟸ س (٤ – س) = ٠ ⟸ س = ٠ ، س = ٤

$$\int_{٠}^{٤} (٤س - س^{٢})\,دس = [٢س^{٢} - \frac{س^{٣}}{٣}] = (٢ \times (٤)^{٢} - \frac{(٤)^{٣}}{٣}) - صفر = ٣٢ - \frac{٦٤}{٣} = \frac{٣٢}{٣}$$

∴ م = $\int_{٠}^{٤} |ق(س)|\,دس$ = $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

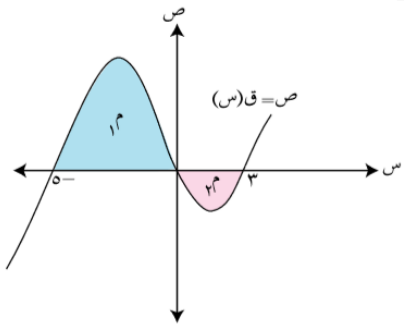
ب) ق (س) = ٤س^{٣} – ١٢س^{٢}

٤س^{٣} – ١٢س^{٢} = ٠ ⟸ ٤س^{٢}(س – ٣) = ٠ ⟸ س = ٠ ، س = ٣

$$\int_{٠}^{٣} (٤س^{٣} - ١٢س^{٢})\,دس = [س^{٤} - ٤س^{٣}] = ((٣)^{٤} - ٤ \times (٣)^{٣}) - صفر = ٨١ - ١٠٨ = -٢٧$$

∴ م = $\int_{٠}^{٣} |ق(س)|\,دس$ = ٢٧ وحدة مربعة

٤) يمثل الشكل منحنى الاقتران ص = ق (س) ، فإذا كانت المساحة م$_{١}$ = ١٣ وحدة مربعة ، والمساحة م$_{٢}$ = ٣ وحدات مربعة ، فجد قيمة $\int_{-٥}^{٣} ق(س)\,دس$ ، مبررا إجابتك.



الحل :

$$\int_{-٥}^{٣} ق(س)\,دس = \int_{-٥}^{٠} ق(س)\,دس + \int_{٠}^{٣} ق(س)\,دس$$

* $\int_{-٥}^{٠} ق(س)\,دس$ = +١٣ لأن منحنى الاقتران ق فوق محور السينات

* $\int_{٠}^{٣} ق(س)\,دس$ = -٣ لأن منحنى الاقتران ق تحت محور السينات

$\int_{-٥}^{٣}$

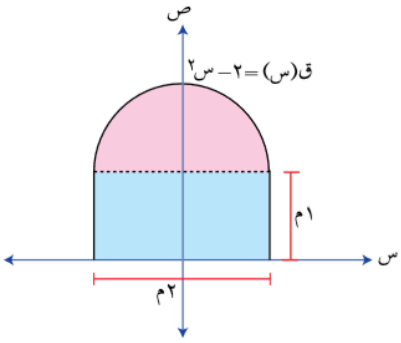
ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

∴ ق(س) دس = ١٣ + ٣- = ١٠

٥) يمثل الشكل نافذة على شكل مستطيل طول قاعدته ٢م ، وارتفاعه ١م ، يعلوه منحنى يعطى بالقاعدة

ص = ق(س) = ٢ – س^{٢}

إذا أردنا وضع زجاج على النافذة ، وكانت تكلفة المتر المربع الواحد منه خمسة دنانير ، فما التكلفة الكلية لزجاج النافذة ؟



الحل :

* التكلفة الكلية للنافذة = مساحة النافذة × تكلفة المتر المربع الواحد

= م$_{\text{النافذة}}$ × ٥

* م$_{\text{النافذة}}$ = المساحة تحت المنحنى

- المساحة تحت المنحنى = $\int_{-١}^{١}$ | ق(س) | دس = $\int_{-١}^{١}$ | (٢ – س^{٢}) | دس = $\left[(٢س - \frac{س^{٣}}{٣})\right]_{-١}^{١}$

= $(٢ \times ١ - \frac{(١)^{٣}}{٣}) - (٢ \times ١- - \frac{(١-)^{٣}}{٣}) = (٢ - \frac{١}{٣}) - (٢- - \frac{١-}{٣})$

= ٢ – $\frac{١}{٣}$ + ٢ – $\frac{١}{٣}$ = ٤ – $\frac{٢}{٣}$ = $\frac{١٠}{٣}$ وحدة مربعة

∴ التكلفة الكلية = $\frac{١٠}{٣}$ × ٥ = $\frac{٥٠}{٣}$ دينار.

الفصل الثالث : الاقتران (اللوغاريتمي الطبيعي والأسي الطبيعي وتطبيقاتيهما)

أولا الاقترانان : اللوغاريتمي الطبيعي والأسي الطبيعي
Natural Logarithmic and Natural Exponential Functions

>> تدريب (١) صفحة ٢٠٣

إذا كان ق (س) = لو م(س) ، م(س) > ٠ ، وكان م اقترانا قابلا للاشتقاق ، فأثبت أن

ق′(س) = $\frac{م′(س)}{م(س)}$

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

ق (س) = مستخدما قاعدة السلسلة.

الحل :

افرض ع = م (س) $\Longleftarrow$ $\frac{د ع}{د س}$ = م′(س)

ص = ق(س) = لو م(س) = لو ع $\Longleftarrow$ $\frac{د ص}{د ع}$ = $\frac{١}{ع}$

$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س} = \frac{١}{ع} \times م'(س) = \frac{١}{م(س)} \times م'(س) = \frac{م'(س)}{م(س)}$

>> تدريب (٢) صفحة ٢٠٤

جد ق′ (س) في كل مما يأتي :-

١) ق(س) = لو جتا س

٢) ق(س) = لو $\frac{٢}{س}$ ، س > ٠

٣) ق(س) = لو (س^{٣} + ٨) ، س > -٢

الحل :

١) ق(س) = لو جتا س ،،،،، ق′ (س) = $\frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

٢) ق(س) = لو $\frac{٢}{س}$ ، س > ٠ ،،،،، ق′ (س) = $\frac{\frac{-٢}{س^{٢}}}{\frac{٢}{س}} = \frac{-٢}{٢ \times س^{٢}} \times س = \frac{-١}{س}$

٣) ق(س) = لو (س^{٣} + ٨) ، س > -٢ ،،،،، ق′ (س) = $\frac{٣س^{٢}}{س^{٣} + ٨}$

>> تدريب (٣) صفحة ٢٠٤

إذا كان ق(س) = لو (أس + ٣) ، حيثُ أ ثابت ، وكان ق′ (-٢) = ١ ، فجد قيمة الثابت أ.

الحل :

ق′ (س) = $\frac{أ}{أس + ٣}$ $\Longleftarrow$ ق (-٢) = $\frac{أ}{أ \times -٢ + ٣}$ = ١

أ = -٢أ + ٣ $\Longleftarrow$ ٣أ = ٣ $\Longleftarrow$ أ = ١

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

تم تحميل الملف من شبكة منهاجي التعليمية

>> تدريب (٣) صفحة ٢٠٤

إذا كان ق(س) = لو$_{هـ}$ | س | (حيثُ س ≠ ٠) ، فجد قَ(س).

الحل :

أعد تعريف الاقتران دون استخدام رمز القيمة المطلقة

$$|\text{س}| = \begin{cases} \text{س} & ، \quad \text{س} > 0 \\ -\text{س} & ، \quad \text{س} < 0 \end{cases}$$

ق (س) = لو$_{هـ}$ س عندما س > ٠ ==> قَ(س) = $\frac{١}{\text{س}}$

ق (س) = لو$_{هـ}$ - س ، عندما س < ٠ ==> قَ(س) = $\frac{-١}{-\text{س}} = \frac{١}{\text{س}}$

>> تدريب (٥) صفحة ٢٠٥

جد قيمة كل تكامل مما يأتي :-

١) $\left[\frac{-٣}{\text{س}} \text{ دس} ، \text{ س} \neq 0 \right]$ ،،،، $\left[\frac{-٣}{\text{س}} \text{ دس} = -٣ \right] \frac{١}{\text{س}}$ دس = -٣ لو$_{هـ}$ | س | + جـ

٢) $\left[(٦\text{س}^{٢} - ٤)(\text{س}^{٣} - ٢\text{س} + ١)^{-١} \text{ دس} = \right] \frac{٦\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س}^{٣} - ٢\text{س} + ١}$ دس

افرض ص = س^{٣} – ٢س + ١

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{س}^{٢} - ٢$ ==> دس = $\frac{\text{دص}}{٣\text{س}^{٢} - ٢}$

$\therefore \left[\frac{٦\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س}^{٣} - ٢\text{س} + ١} \text{ دس} = \right] \frac{٦\text{س}^{١} - ٤}{\text{ص}}$ $\left[= \frac{\text{دص}}{٣\text{س}^{٢} - ٢} \right] \frac{٢}{\text{ص}}$ دص = ٢ $\left[\frac{١}{\text{ص}} \text{ دص} \right]$

= ٢ لو$_{هـ}$ | ص | + جـ = ٢ لو$_{هـ}$ | س^{٣} – ٢س + ١ | + جـ

>> تدريب (٦) صفحة ٢٠٦

إذا كان ق (س) = هـ$^{ل (س)}$ ، وكان ل (س) اقترانا قابلا للاشتقاق ، فأثبت أن

قَ (س) = لَ (س) هـ$^{ل (س)}$ مستخدما قاعدة السلسلة.

الحل :

افرض ع = ل (س) ===> لَ (س) = $\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$

ل (س) ع $\frac{\text{د ص}}{\text{د ع}}$ ع

ص = ق(س) = هـ = هـ ===> = هـ

$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س} = هـ^{ع} \times لـ(س) = هـ^{ل(س)} \times لـ(س) = لـ(س) هـ^{ل(س)}$

>> تدريب (٧) صفحة ٢٠٧

جد صَ في كل مما يأتي :-

١) ص = $هـ^{-س^{٣}}$ ===> صَ = $-٢س هـ^{-س^{٣}}$

٢) ص = $هـ^{جتا ٢س}$ ===> صَ = $-٢جا٢س هـ^{جتا ٢س}$

٣) ص = $هـ^{س}$ لوس (مشتقة ضرب)

صَ = $هـ^{س} \times \frac{١}{س} + لوس_{هـ} \times هـ^{س} = \frac{هـ^{س}}{س} + هـ^{س} لوس_{هـ}$

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

٤) ص = $\frac{هـ^{٣س}}{س^{٢} + ١}$ (مشتقة قسمة)

صَ = $\frac{(س^{٢} + ١) \times ٣هـ^{٣س} - هـ^{٣س} \times ٢س}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

>> تدريب (٨) صفحة ٢٠٧

اثبت أن $\left| هـ^{أس + ب} دس = \frac{هـ^{أس + ب}}{أ} + جـ \right.$ ، حيثُ أ ، ب عددان حقيقيان ، أ ≠ ٠

الحل :

افرض ص = أس + ب ===> $\frac{د ص}{د س} = أ$ ===> $دس = \frac{د ص}{أ}$

$\therefore \left| هـ^{أس + ب} دس = \right| هـ^{ص} \frac{د ص}{أ} \left| = \frac{١}{أ} هـ^{ص} دص = \frac{١}{أ} هـ^{ص} + جـ = \frac{هـ^{ص}}{أ} + جـ = جـ + \frac{هـ^{أس + ب}}{أ} \right.$

>> تدريب (٩) صفحة ٢٠٨

جد قيمة كل من التكاملات الآتية :-

١) $\left| \frac{١}{٢} هـ^{س} دس = \frac{١}{٢} هـ^{س} + جـ \right.$

$\left| \frac{١}{٣} \right.^{١ - ٦س}$ $\frac{١}{٣}$ $\frac{هـ^{١ - ٦س}}{-٦}$ $\frac{هـ^{١ - ٦س}}{-١٨}$

منهاجي
متعة التعليم الهادف
تم تحميل الملف من شبكة منهاجي التعليمية
ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

٢) هـ دس = × + جـ = + جـ

٣) ∫ (٢ + ٣س^{٢}) هـ$^{س^{٣} + ٢س - ١}$ دس

افرض ص = س^{٣} + ٢س − ١ ⟸ $\frac{د ص}{د س}$ = ٣س^{٢} + ٢ ⟸ د س = $\frac{د ص}{٣س^{٢} + ٢}$

∴ ∫ (٢ + ٣س^{٢}) هـ$^{س^{٣} + ٢س - ١}$ دس = ∫ (٢ + ٣س^{٢}) هـ^{ص} $\frac{د ص}{٣س^{٢} + ٢}$ = ∫ هـ^{ص} دص = هـ^{ص} + جـ

= هـ$^{س^{٣} + ٢س - ١}$ + جـ

٤) ∫ $\frac{٦ دس}{هـ^{١ - ٢س}}$ = ∫ $\frac{٦}{هـ^{١ - ٢س}}$ د س = ∫ ٦ هـ$^{١ + ٢س}$ دس ((حسب قوانين الأسس $\frac{١}{هـ^{س}}$ = هـ$^{-س}$))

= ٦ $\frac{هـ^{-١ + ٢س}}{٢}$ + جـ = ٣ هـ$^{-١ + ٢س}$ + جـ

الأسئلة

١) جد قَ (س) في كل مما يأتي :-

أ) ق (س) = $\frac{١}{س}$ + لو$_{هـ}$ س + ٧ هـ^{٢س} + ٦ ، س > ٠

ب) ق (س) = ٣ لو$_{هـ}$ س − ٢ هـ$^{٣-٢س}$ − س^{٢} ، س > ٠

جـ) ق (س) = هـ^{جاس} − ٢ لو$_{هـ}$ (جتا س)

الحل :

أ) قَ (س) = − $\frac{١}{س^{٢}}$ + $\frac{١}{س}$ + ٧ × ٢ هـ^{٢س} = − $\frac{١}{س^{٢}}$ + $\frac{١}{س}$ + ١٤ هـ^{٢س}

ب) قَ (س) = ٣ × $\frac{١}{س}$ − ٢ × −٢ هـ$^{٣-٢س}$ − ٢س = $\frac{٣}{س}$ + ٤ هـ$^{٣-٢س}$ − ٢س

جـ) قَ (س) = جتاس هـ^{جاس} − ٢ × $\frac{- جاس}{جتاس}$ = جتاس هـ^{جاس} + ٢ظاس

٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية :-

أ) ∫ (٢هـ^{س} − $\frac{١}{س}$ + ٣س^{٢}) دس = ٢هـ^{س} − لو$_{هـ}$ | س | + س^{٣} + جـ

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

ب) $\int ٢٤ هـ^{١+٢س}$ دس $= ٢٤ \times \frac{هـ^{١+٢س}}{٢} + جـ = ١٢ هـ^{١+٢س} + جـ$

جـ) $\int ٢س هـ^{١-س^{٢}}$ دس

افرض ص $= ١ - س^{٢}$ $\Longleftarrow$ $\frac{دص}{دس} = -٢س$ $\Longleftarrow$ دس $= \frac{دص}{-٢س}$

$\therefore \int ٢س هـ^{١-س^{٢}}$ دس $= \int ٢س هـ^{ص} \frac{دص}{-٢س} = \int -هـ^{ص}$ دص $= -هـ^{ص} + جـ = -هـ^{١-س^{٢}} + جـ$

د) $\int (\frac{٥}{س} - ٣ هـ^{٣س} - ٤)$ دس $= ٥$ لو$_{هـ}$ $|س| - ٣ \times \frac{هـ^{٣س}}{٣} - ٤س + جـ = ٥$ لو$_{هـ}$ $|س| - هـ^{٣س} - ٤س + جـ$

هـ) $\int \frac{٨س}{س^{٢} + ٤}$ دس

افرض ص $= س^{٢} + ٤$ $\Longleftarrow$ $\frac{دص}{دس} = ٢س$ $\Longleftarrow$ دس $= \frac{دص}{٢س}$

$\therefore \int \frac{٨س}{س^{٢} + ٤}$ دس $= \int \frac{٨س}{ص} \frac{دص}{٢س} = \int \frac{٤}{ص}$ دص $= ٤$ لو$_{هـ}$ $|ص| + جـ$

$= ٤$ لو$_{هـ}$ $|س^{٢} + ٤| + جـ$

٣) إذا كان ميل المماس للاقتران ص $=$ ق(س) عند النقطة (س ، ص) يعطى بالقاعدة :

قَ(س) $= ٢ هـ^{٢س} + ٢س$ ، فجد قاعدة الاقتران ق ، علما بأن منحناه يمر بالنقطة (٠ ، ٤).

الحل :

ق (س) $= \int$ قَ(س) دس $= \int (٢هـ^{٢س} + ٢س)$ دس $= ٢هـ^{٢س} + س^{٢} + جـ$

ق (٠) $= ٢هـ^{٠} + (٠)^{٢} + جـ = ٤$ $\Longleftarrow$ $٢ + جـ = ٤$ $\Longleftarrow$ $جـ = ٢$

$\therefore$ ق (س) $= ٢هـ^{٢س} + س^{٢} + ٢$

٤) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث إن سرعتها بعد ن ثانية من بدء حركتها تعطى بالقاعدة :

ع (ن) $= هـ^{ن+١} + \frac{٨}{ن}$ ، وإن ، ن > ٠ ، جد الاقتران الذي يمثل موقع النقطة المادية بعد مرور ن ثانية

من بدء حركتها.

الحل :

$$ف(ن) = \int ع(ن)\,دن = (هـ^{ن+١} + \frac{٨}{ن})\,دن = هـ^{ن+١} + ٨\,لو_{هـ}|ن| + جـ$$

أنا مُصمم على بلوغ الهدف ،، فإمّا أن أنجح ... وإمّا ... أن أنجح ♥

ثانيا النمو والاضمحلال Growth and Decay

>> تدريب (١) صفحة ٢١٢

افترض يمان مبلغ ١٠٠٠٠ دينار من مصرف يحسب ربحًا مركبًا وفق قانون النمو ، بنسبة ربح مقدارها ٤% سنويا. جد جملة المبلغ الذي سيسدده يمان للمصرف بعد مرور خمس وعشرين سنة.

الحل :

$$ع_{.} = ١٠٠٠٠ \quad ، \quad أ = \frac{٤}{١٠٠} = ٠,٠٤ \quad ، \quad ن = ٢٥$$

جملة المبلغ = ع(ن) = $ع_{.} \times هـ^{أن}$

$$ع(٢٥) = ١٠٠٠٠ \times (٢,٧)^{\frac{٤}{١٠٠} \times ٢٥} = ١٠٠٠٠ \times (٢,٧)^{١} = ١٠٠٠٠ \times ٢,٧ = ٢٧٠٠٠ \text{ دينار}$$

>> تدريب (٢) صفحة ٢١٢

يتناقص ثمن عقار بمرور الزمن ، وبصورة مستمرة منتظمة وفق قانون الاضمحلال بمعدل ٥% سنويا. فإذا كان ثمنه الأصلي ٨٠٠٠٠ دينار ، فكم يصبح ثمنه بعد مرور ٤٠ سنة؟

الحل :

$$ع_{.} = ٨٠٠٠٠ \quad ، \quad أ = -٠,٠٥ = \frac{-٥}{١٠٠} \quad ، \quad ن = ٤٠$$

ثمن العقار = ع(ن) = $ع_{.} \times هـ^{أن}$

$$ع(٤٠) = ٨٠٠٠٠ \times (٢,٧)^{\frac{-٥}{١٠٠} \times ٤٠} = ٨٠٠٠٠ \times (٢,٧)^{-٢} = ٨٠٠٠٠ \times \frac{١}{(٢,٧)^{٢}} = ١٠٩٧٣,٩ \text{ دينار}$$

الأسئلة

١) تتكاثر البكتيريا بصورة مستمرة ومنتظمة وفق قانون النمو بنسبة ٢٠٠% في الساعة. جد عددها بعد نصف ساعة، علما بأن عددها الابتدائي (٥٠٠٠٠٠).

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

الحل :

ع. = ٥٠٠٠٠٠ ، أ = $\frac{٢٠٠}{١٠٠}$ ، ن = $\frac{١}{٢}$ ساعة

عدد البكتيريا = ع (ن) = ع. × هـ$^{\text{أن}}$

ع ($\frac{١}{٢}$) = ٥٠٠٠٠٠ × (٢,٧)$^{\frac{٢٠٠}{١٠٠} \times \frac{١}{٢}}$ = ٥٠٠٠٠٠ × (٢,٧)^{١} = ١٣٥٠٠٠٠

٢) يتناقص ثمن سيارة بمرور الزمن، وبصورة مستمرة منتظمة وفق قانون الاضمحلال، وبمعدل ٨% سنويا. فإذا كان ثمنها الأصلي ١٢٥٨٠ دينارا، فجد ثمنها بعد مرور ٢٥ سنة.

الحل :

ع. = ١٢٥٨٠ ، أ = $\frac{-٨}{١٠٠}$ = -٠,٠٨ ، ن = ٢٥

ثمن السيارة = ع (ن) = ع. × هـ$^{\text{أن}}$

ع (٢٥) = ١٢٥٨٠ × (٢,٧)$^{٢٥ \times \frac{-٨}{١٠٠}}$ = ١٢٥٨٠ × (٢,٧)$^{-٢}$ = $\frac{١}{(٢,٧)^{٢}}$ × ١٢٥٨٠ = ١٧٢٥,٦٥

٣) يذوب ملح في الماء، وتخضع كتلة الملح المتبقية من دون الذوبان في الماء لقانون الاضمحلال.

إذا وضعت ١٠ كيلوغرامات من الملح في الماء، فذاب نصف الكمية بعد مرور ربع ساعة، فجد كتلة الملح المتبقية من دون الذوبان في الماء بعد ساعة وربع الساعة.

الحل :

ع. = ١٠ ، أ = ؟؟ ، ن$_{١}$ = $\frac{١}{٤}$ ، ع ($\frac{١}{٤}$) = ٥ (كمية الملح دون ذوبان بعد ربع ساعة) معطيات

المطلوب : كتلة الملح المتبقية دون الذوبان في الماء بعد ساعة وربع الساعة ، أي بعد ساعة وربع

$\frac{١}{٤}$ ساعة + ١ ساعة = $\frac{١}{٤}$ + ١ = $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٤}{٤}$ = $\frac{٥}{٤}$ ساعة ؛ أي ع (ن$_{٢}$) = ع ($\frac{٥}{٤}$)

الآن من هذه المعطيات : ع (ن$_{١}$) = ع. × هـ$^{\text{أن}_{١}}$

٥ = ١٠ × هـ$^{أ \times \frac{١}{٤}}$ <== ٥ = ١٠ هـ$^{أ \frac{١}{٤}}$ <== هـ$^{\frac{أ}{٤}}$ = $\frac{١}{٢}$ ✓

$\text{أن}_{٢}$

تم تحميل الملف من شبكة منهاجي التعليمية

المطلوب : ع (ن٢) = ع. × هـ

ع $(\frac{٥}{٤})$ = ١٠ × هـ$^{\frac{٥}{٤} \times أ}$ = ١٠ × $(هـ^{أ})^{\frac{١}{٤}}$ = ١٠ × $(\frac{١}{٢})^{٥}$ = ١٠ × $\frac{١}{٣٢}$ = $\frac{٥}{١٦}$ = ٠,٣١٢٥

٤) يتزايد عدد سكان مدينة ما بصورة مستمرة منتظمة وفق قانون النمو، بنسبة مقدارها ٠,٨% سنويا. فإذا بلغ عدد سكانها ٦٠٠٠٠٠ نسمة عام ٢٠١٠م ، فكم سيبلغ عدد سكانها عام ٢١٣٥م؟

الحل :

ع. = ٦٠٠٠٠٠ ، أ = ٠,٨% = $\frac{٨}{١٠٠٠}$ ، ن = ٢١٣٥ ـ ٢٠١٠ = ١٢٥ سنة

عدد السكان = ع (ن) = ع. × هـ^{أن} = ٦٠٠٠٠٠ × (٢,٧)$^{\frac{٨}{١٠٠٠} \times ١٢٥}$ = ٦٠٠٠٠٠ × ٢,٧ = ١٦٢٠٠٠٠

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق : المعلمة سلسبيل الخطيب

للاستفسار : واتسب فقط ٠٧٨٨٢٠٧٤٧٢