الفاتح | خاص جداً

لطلاب الأدبي والفندقي

حل تمارين وأسئلة الكتاب الوزاري

إحدى إصدارات

مدرسة مروان ابوديه الافتراضية

أضع بين يديكم كورس الفاتح في حل أسئلة وتمارين الكتاب الوزاري لمادة الرياضيات "التخصص الأدبي والفندقي" – طبعة الكتاب ٢٠١٨

الفصل الدراسي الأول والثاني

اعتمدت في هذا الكورس على حل جميع تدريبات وأسئلة الكتاب الوزاري المعتمد مع مراعاة وضع الحل التفصيلي لجميع التمارين والتدريبات وأسئلة نهاية كل درس وأسئلة نهاية كل وحدة.

كورس الفاتح في حل أسئلة الكتاب متوفر ورقياً في جميع مكتبات المملكة، وبذلك تستطيع الحصول على النسخة الأصلية بسعر (٤) دنانير، وبذلك تحصل على عضوية طالب لدى مدرسة مروان ابوديه الافتراضية. للتفاصيل أكثر حول الموضوع التواصل معي على رقمي الخاص الموضح أدناه.

ولا تنسى أيضاً الحصول على الكورس الخاص بحل أسئلة الوزارة السابقة للفترة (٢٠٠٨-٢٠١٩) والمرتبة حسب المواضيع في الكتاب الوزاري.

أرجوا لكم التوفيق والنجاح والحصول على العلامة الكاملة ان شاء لله ،،،

مروان ابوديـــــه
مدرسة افتراضية
٠٧٩٧٥٥٢٧٢٧

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School" 0797-55-27-27

الوحدة الأولى: النهايات والاتصال
حل جميع أسئلة وتدريبات الكتاب
لطلاب التخصص الأدبي والفندقي

إعداد/ مروان ابوديه

الفصل الأول: النهايات (مفهوم النهاية)

تدريب (١): ص١٦

١) هـ(٣) = غير معرفة

٢) $\lim_{س \to ٣^-}$ هـ(س) = ٦

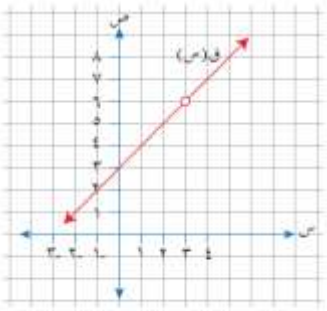
٣) $\lim_{س \to ٣^+}$ هـ(س) = ٦

٤) $\lim_{س \to ٣}$ هـ(س) = ٦

تدريب ١

اعتمادًا على الشكل (١-٤) الذي يمثل منحنى الاقتران

$$ق(س) = \frac{س^2 - ٩}{س - ٣}$$



الشكل (١-٤)

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

١) ق(٣)

٢) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

٣) $\lim_{س \to ٣^+}$ ق(س)

٤) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

تدريب (٢): ص١٨

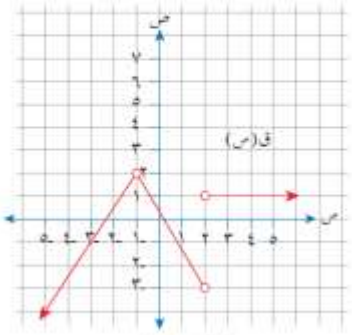
١) $\lim_{س \to -١}$ هـ(س) = ٢

٢) $\lim_{س \to ٢}$ هـ(س) = غير موجودة

٣) $\lim_{س \to ٣}$ هـ(س) = ١

تدريب ٢

اعتمادًا على الشكل (١-٦) الذي يمثل منحنى الاقتران ق،



الشكل (١-٦)

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

١) $\lim_{س \to -١}$ ق(س)

٢) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

٣) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

تدريب (٣): ص١٩

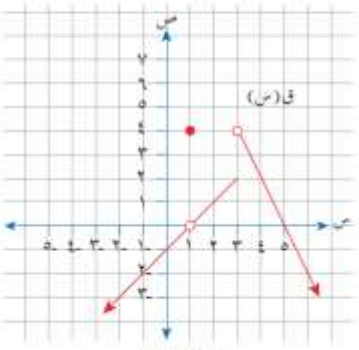
١) $\lim_{س \to ٢}$ هـ(س) = ١

٢) أ = ١،٥

٣) ب = ٣

تدريب ٣

اعتمادًا على الشكل (١-٨) الذي يمثل منحنى الاقتران ق،



الشكل (١-٨)

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

١) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

٢) الثابت أ، حيث $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ٠

٣) الثابت ب، حيث $\lim_{س \to ب}$ ق(س) غير موجودة.

الفصل الأول: النهايات (مفهوم النهاية)

حل أسئلة نهاية الدرس (ص٢٠)

السؤال الأول: ص٢٠

أ) $و(٢)$ = غير معرفة

ب) $\lim_{س \to ٢} و(س) = ٤$

ج) $و(٣) = ٥$

د) $\lim_{س \to ٣} و(س) = ٥$

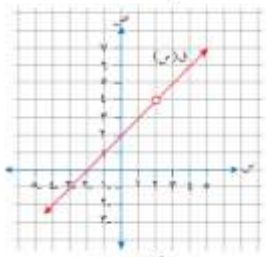
١) اعتمادًا على الشكل (١-٩) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$، جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) ق(٢)

ب) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

جـ) ق(٣)

د) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)



الشكل (١-٩).

السؤال الثاني: ص٢٠

أ) $\lim_{س \to ٠.٥} و(س) = ١$

ب) $\lim_{س \to ٢^+} و(س) = ٣$

ج) $\lim_{س \to ٢^-} و(س) = ٢$

د) $\lim_{س \to ٢} و(س)$ = غير موجودة

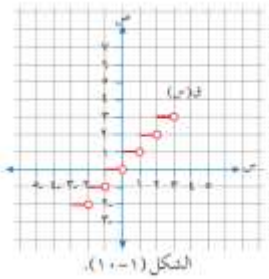
٢) اعتمادًا على الشكل (١-١٠) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) $\lim_{س \to ٠.٥}$ ق(س)

ب) $\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س)

جـ) $\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س)

د) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)



الشكل (١-١٠).

السؤال الثالث: ص٢٠

أ) $\lim_{س \to ٢} و(س) = ٢$

ب) $\lim_{س \to ١} و(س) = ٢$

ج) أ = -١

د) ب = $-٣،٢$

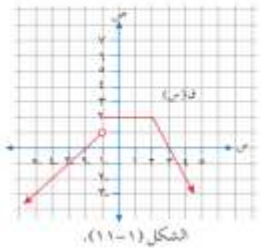
٣) اعتمادًا على الشكل (١-١١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

ب) $\lim_{س \to ١}$ ق(س)

جـ) قيمة أ، حيث $\lim_{س \to أ}$ ق(س) غير موجودة.

د) قيم ب، حيث $\lim_{س \to ب}$ ق(س) = صفرًا.



الشكل (١-١١).

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School"

الفصل الأول: النهايات (نظريات النهايات)

تدريب (١): ص٢٧

١) $= \lim_{س\to-١} س^{٦} - \lim_{س\to-١} ٥س^{٢} + \lim_{س\to-١} ٤س + \lim_{س\to-١} ٩$

$= -١ - ٥ + ٤ + ٩ = ١٠ - ٩ = ١$

٢) $= (-٧)(٥) = -٢ \times ١٠ = -٢٠$

٣) $= (-١)^{٣}(٥) = -٤^{٣} = -٦٤$

تدريب (٢): ص٢٧

$= \lim_{س\to-١} هـ(س) + \lim_{س\to-١} س^{٣} - \lim_{س\to-١} ٣ = ٥$

$= \lim_{س\to-١} هـ(س) - ١ - ٣ = ٥$

$= \lim_{س\to-١} هـ(س) - ٤ = ٥$

$= \lim_{س\to-١} هـ(س) = ٩$

$٣ \lim_{س\to-١} (هـ(س))^{٢} = ٣ \times ٩^{٢} = ٣ \times ٨١ = ٢٤٣$

تدريب (٣): ص٢٩

١)

أ) $هـ(٢) = ٤ + ١ = ٥$

ب) $\lim_{س\to١} هـ(س) = ١ + ١ = ٢$

ج) $\lim_{س\to٤} هـ(س) = ١٦ - ٢ = ١٤$

د) $\lim_{س\to٣} هـ(س) = ٩ + ١ = ١٠$

$\lim_{س\to٣} هـ(س) = ١٠$

٢) $\lim_{س\to٣} (٤س + ١) = ١٢ + ١ = ١٣$

تدريب ١

جد قيمة كل مما يأتي:

١) $\lim_{س\to-١} (س^{٦} - ٥س^{٢} + ٤س + ٩)$

٢) $\lim_{س\to-١} (٧س^{٢} + ٥س)(س^{٢} + س - ١٠)$

٣) $\lim_{س\to-١} (س^{٢} + ٥س)^{٣}$

تدريب ٢

إذا كانت $\lim_{س\to-١} (ق(س) + س^{٢} - ٣) = ٥$ ، فجد قيمة $\lim_{س\to-١} ٣(ق(س))^{٢}$

تدريب ٣

١) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & ، س \geq ٣ \\ ٤س - ٢ & ، س < ٣ \end{cases}$

فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) ق(٢)

ب) $\lim_{س\to١} ق(س)$

جـ) $\lim_{س\to٤} ق(س)$

د) $\lim_{س\to٣} ق(س)$

٢) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س + ٦ & ، س \in ص \\ ٤س + ١ & ، س \notin ص \end{cases}$

حيث ص = مجموعة الأعداد الصحيحة،

فجد $\lim_{س\to٣} ق(س)$ (إن وجدت).

الفصل الأول: النهايات (نظريات النهايات)

تدريب (٤): ص٣٠

١)

$$\lim_{س\to ٣} \text{اقتران}(س) = ١٦$$

$$٩ب + ٧ = ١٦$$

$$٩ب = ٩$$

$$ب = ١$$

$$\lim_{س\to ١} \text{اقتران}(س) = \text{موجودة}$$

$$\lim_{س\to ١^+} \text{اقتران}(س) = \lim_{س\to ١^-} \text{اقتران}(س)$$

$$١ + ٧ = ٥ - أ$$

$$٨ = ٥ - أ$$

$$أ = -٣$$

٢)

$$\lim_{س\to أ} \text{اقتران}(س) = \text{موجودة}$$

$$\lim_{س\to أ^+} \text{اقتران}(س) = \lim_{س\to أ^-} \text{اقتران}(س)$$

$$٤٠ = ٥ أ^٣$$

$$٨ = أ^٣$$

$$أ = ٢$$

تدريب ٤

١) إذا كان ق(س) = { ٥س − أ ، س < ١ ؛ ب س^٢ + ٧ ، س ≥ ١ }

وكانت $\lim_{س\to ٣} ق(س) = ١٦$، $\lim_{س\to ١} ق(س)$ موجودة، فما قيمة كل من الثابتين: أ، ب؟

٢) إذا كان ق(س) = { ٥س^٢ ، س ≠ أ ؛ ٤٠ ، س = أ }

وكانت $\lim_{س\to أ} ق(س)$ موجودة، فما قيمة الثابت أ؟

الفصل الأول: النهايات (نظريات النهايات)

حل أسئلة نهاية الدرس (ص٣١)

السؤال الأول: ص٣١

١) إذا علمت أن $\lim_{س\to٣} ق(س) = ٨$، $\lim_{س\to٣} هـ(س) = -٢$، فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) $\lim_{س\to٣} (٤ق(س) + ٢هـ(س))$

ب) $\lim_{س\to٣} (ق(س) - ٢هـ(س))$

جـ) $\lim_{س\to٣} (ق(س) \times هـ(س))$

د) $\lim_{س\to٣} ٥ق(س)$

هـ) $\lim_{س\to٣} (٢ق(س) + ١)$

و) $\lim_{س\to٣} ((هـ(س))^{٢} + ٣س - ٧)$

ز) $\lim_{س\to٣} (٢ق(س) + ٣هـ(س) + ٢س + ٤)$

أ) $= ٤ \lim_{س\to٣} ق(س) + ٢ \lim_{س\to٣} هـ(س)$

$= ٤ \times ٨ + ٢ \times -٢ = ٣٢ - ٤ = ٢٨$

ب) $= \lim_{س\to٣} ق(س) - ٢ \lim_{س\to٣} هـ(س)$

$= ٨ - ٢ \times -٢ = ٨ + ٤ = ١٢$

ج) $= \lim_{س\to٣} ق(س) \times \lim_{س\to٣} هـ(س)$

$= ٨ \times -٢ = -١٦$

د) $= ٥ \lim_{س\to٣} ق(س)$

$= ٥ \times ٨ = ٤٠$

هـ) $= ٢ \lim_{س\to٣} ق(س) + \lim_{س\to٣} ١$

$= ٢ \times ٨ + ١ = ١٦ + ١ = ١٧$

و) $= \left(\lim_{س\to٣} هـ(س)\right)^{٣} + \lim_{س\to٣} ٣س - \lim_{س\to٣} ٧$

$= -٨ + ٩ - ٧ = -١٥ + ٩ = -٦$

ز) $= ٢ \lim_{س\to٣} ق(س) + ٣ \lim_{س\to٣} هـ(س) + \lim_{س\to٣} ٢س + \lim_{س\to٣} ٤$

$= ٢ \times ٨ + ٣ \times -٢ + ٢ \times ٣ + ٤$

$= ١٦ - ٦ + ٦ + ٤ = ١٦ + ٤ = ٢٠$

الفصل الأول: النهايات (نظريات النهايات)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص٣١)

السؤال الثاني: ص٣١

٢) جد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\lim_{س\to-٢}(٣س^٤ - ٥س^٣ + ٦س - ٧)$

ب) $\lim_{س\to١}(س^٢ + ١)(س^٣ + ٥س - ٢)$

جـ) $\lim_{س\to-١}(س^٣ + ٢)^٣$

أ) $= ٤٨ + ٤٠ - ١٢ - ٧$

$= ٨٨ - ١٩ = ٦٩$

ب) $= (١+١) \times (١+٥-٢)$

$= ٢ \times ٤ = ٨$

ج) $= (-١+٢)^{٥} = ١^{٥} = ١$

السؤال الثالث: ص٣١

٣) إذا كانت $\lim_{س\to-٢}(٣ق(س) + ٢س + ١) = ٢٧$، فجد $\lim_{س\to-٢}(ق(س))^٣$

$٣ \lim_{س\to-٢} ه(س) + \lim_{س\to-٢} ٢س + \lim_{س\to-٢} ١ = ٢٧$

$٣ \lim_{س\to-٢} ه(س) - ٤ + ١ = ٢٧$

$٣ \lim_{س\to-٢} ه(س) - ٣ = ٢٧$

$٣ \lim_{س\to-٢} ه(س) = ٣٠$

$\lim_{س\to-٢} ه(س) = ١٠$

$\left(\lim_{س\to-٢} ه(س)\right)^{٣} = ١٠٠٠$

السؤال الرابع: ص٣١

٤) إذا كانت $\lim_{س\to٣}(م س^٢ + ٥س + ١) = ٢٥$، فما قيمة الثابت م؟

$\lim_{س\to٣} م س^{٢} + \lim_{س\to٣} ٥س + \lim_{س\to٣} ١ = ٢٥$

$م ٩ + ١٥ + ١ = ٢٥$

$م ٩ + ١٦ = ٢٥$

$م ٩ = ٩$

$م = ١$

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School"

الفصل الأول: النهايات (نظريات النهايات)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص٣١)

السؤال الخامس: ص٣١

أ) $\lim_{س \to ١} هـ(س) = ٥ - ١ = ٤$

ب) $\lim_{س \to -٢} هـ(س) = -٨ + ١ = -٧$

ج) $\lim_{س \to ٠} هـ(س) =$ غير موجودة

السؤال السادس: ص٣٢

أ) $\lim_{س \to ٥} هـ(س) = ٢٥ + ١ = ٢٦$

ب) $\lim_{س \to ٣} هـ(س) = ٩ + ١ = ١٠$

ج) $هـ(٣) = ٨$

السؤال السابع: ص٣٢

$$\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٢^-} هـ(س)$$

$$٢٠ + أ٢ = ٤ + أ٢$$
$$٢٠ - ٤ = أ٢ - أ$$
$$أ = ١٦$$

السؤال الثامن: ص٣٢

أ) $\lim_{س \to ٠} هـ(س) = ٠ + ١ = ١$

ب) $\lim_{س \to ٢} هـ(س) =$ غير موجودة

ج) $\lim_{س \to ٤} هـ(س) = ٥ \times ٤ = ٢٠$

د) $\lim_{س \to ٦} هـ(س) = ٣٠$

٥) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٤س + ١ & ، س < ٠ \\ ٥ - س^٢ & ، س \geq ٠ \end{cases}$ ، فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\lim_{س \to ١} ق(س)$ ب) $\lim_{س \to -٢} ق(س)$ ج) $\lim_{س \to ٠} ق(س)$

٦) إذا كان $هـ(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & ، س \neq ٣ \\ ٨ & ، س = ٣ \end{cases}$

فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\lim_{س \to ٥} هـ(س)$ ب) $\lim_{س \to ٣} هـ(س)$ ج) $هـ(٣)$

٧) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} أ س + ٤ & ، س < ٢ \\ ٥س^٢ + أ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ موجودة، فما قيمة الثابت أ ؟

٨) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & ، س < ٢ \\ ٥س & ، ٢ \geq س \geq ٦ \\ س^٢ - ٦ & ، س > ٦ \end{cases}$

فجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن وجدت):

أ) $\lim_{س \to ٠} ق(س)$ ب) $\lim_{س \to ٢} ق(س)$

جـ) $\lim_{س \to ٤} ق(س)$ د) $\lim_{س \to ٦} ق(س)$

الفصل الأول: النهايات (نظريات النهايات)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص٣٢)

السؤال التاسع: ص٣٢

٩) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣س - أ & ، س > ٢ \\ ١٠ & ، س < ٢ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) موجودة، فجد قيمة الثابت أ؟

$\lim_{س \to ٢}$ ه(س) = موجودة

$\lim_{س \to ٢^+}$ ه(س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ ه(س)

١٠ = ٦ − أ

أ = ٦ − ١٠

أ = −٤

الفصل الأول: النهايات (نهاية خارج قسمة اقترانين)

تدريب (١): ص٣٥

١) $= \frac{١-٢٥}{٥+١} = \frac{-٢٤}{٦} = -٤$

٢) $= \frac{٤-٤}{٥} = \frac{٠}{٥} =$ صفر

٣) $= \frac{٣+٢}{٤-٤} = \frac{٥}{٠} =$ غير موجودة

٤) $= \frac{١-٩}{٣+٣} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$

تدريب ١

جد قيمة النهاية لكل مما يأتي (إن وجدت):

١) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - ٢٥}{س + ٥}$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س - ٤}{س + ٣}$

٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{س + ٣}{س^٢ - ٤}$

٤) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ١}{س + ٣}$

تدريب (٢): ص٣٦

١) من التعويض المباشر نحصل على $\left(\frac{٠}{٠}\right)$

$$\lim_{س \to -٣} \frac{س(س+٣)}{س+٣} = -٣$$

٢) من التعويض المباشر نحصل على $\left(\frac{٠}{٠}\right)$

$$\lim_{س \to ٢} \frac{س(س-٢)}{٥(س-٢)} = \frac{٢}{٥}$$

٣) من التعويض المباشر نحصل على $\left(\frac{٠}{٠}\right)$

$$\lim_{س \to -٣} \frac{س(س^٣ + ٢٧)}{س+٣}$$

$$\lim_{س \to -٣} \frac{س(س+٣)(س^٢ - ٣س + ٩)}{س+٣} = -٣ \times (٩+٩+٩) = -٣ \times ٢٧ = -٨١$$

٤) من التعويض المباشر نحصل على $\left(\frac{٠}{٠}\right)$

$$\lim_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(س-٣)}{(س+٣)(س-٣)} = \lim_{س \to ٣} \frac{(س-٣)}{(س+٣)} = \frac{٠}{٦} =$$ صفر

تدريب ٢

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

١) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^٢ + ٣س}{س+٣}$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٢س}{٥س - ١٠}$

٣) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^٤ + ٢٧س}{س+٣}$

٤) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٦س + ٩}{س^٢ - ٩}$

الفصل الأول: النهايات (نهاية خارج قسمة اقترانين)

تدريب (٣): ص٣٧

تدريب ٣

جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

١) $\lim_{س\to ٥} \frac{٣س - ١٥}{\sqrt{س + ٢٠} - ٥}$

٢) $\lim_{س\to ٢} \frac{\sqrt{س + ٢} - ٢}{س - ٢}$

١) من التعويض المباشر نحصل على $\left(\frac{٠}{٠}\right)$

$$\lim_{س\to ٥} \frac{٣س - ١٥}{\sqrt{س + ٢٠} - ٥} \times \frac{\sqrt{س + ٢٠} + ٥}{\sqrt{س + ٢٠} + ٥}$$

$$= \lim_{س\to ٥} \frac{(٣س - ١٥)\left(\sqrt{س + ٢٠} + ٥\right)}{س + ٢٠ - ٢٥}$$

$$= \lim_{س\to ٥} \frac{٣(س - ٥)\left(\sqrt{س + ٢٠} + ٥\right)}{س - ٥}$$

$$= ٣ \times (٥ + ٥) = ٣ \times ١٠ = ٣٠$$

٢) من التعويض المباشر نحصل على $\left(\frac{٠}{٠}\right)$

$$\lim_{س\to ٢} \frac{\sqrt{س + ٢} - ٢}{س - ٢} \times \frac{\sqrt{س + ٢} + ٢}{\sqrt{س + ٢} + ٢}$$

$$= \lim_{س\to ٢} \frac{س + ٢ - ٤}{(س - ٢)\left(\sqrt{س + ٢} + ٢\right)} = \lim_{س\to ٢} \frac{س - ٢}{(س - ٢)\left(\sqrt{س + ٢} + ٢\right)}$$

$$= \frac{١}{٢ + ٢} = \frac{١}{٤}$$

تدريب (٤): ص٣٨

تدريب ٤

جد $\lim_{س\to ٢} \frac{\frac{١}{س + ١} - \frac{١}{٣}}{س - ٢}$

من التعويض المباشر نحصل على $\left(\frac{٠}{٠}\right)$

$$= \lim_{س\to ٢} \frac{٣ - (س + ١)}{(س - ٢)(س + ١)(٣)}$$

$$= \lim_{س\to ٢} \frac{٣ - س - ١}{(س - ٢)(س + ١)(٣)}$$

$$= \lim_{س\to ٢} \frac{-(س - ٢)}{(س - ٢)(س + ١)(٣)} = \frac{-١}{٣ \times ٣} = \frac{-١}{٩}$$

الفصل الأول: النهايات (نهاية خارج قسمة اقترانين)

حل أسئلة نهاية الدرس (ص٣٩)

السؤال الأول: ص٣٩

١) إذا كانت $\lim_{س\to٢} ق(س) = ٣$، $\lim_{س\to٢} هـ(س) = ٩$، فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) $\lim_{س\to٢} \frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ب) $\lim_{س\to٢} \frac{هـ(س)+١}{ق(س)+س-٥}$

أ) $= \frac{\lim_{س\to٢} ق(س)}{\lim_{س\to٢} هـ(س)} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

ب) $= \frac{\lim_{س\to٢} هـ(س) + \lim_{س\to٢} ١}{\lim_{س\to٢} ق(س) + \lim_{س\to٢} س - \lim_{س\to٢} ٥} = \frac{٩+١}{٣-٢-٥} = \frac{١٠}{٠}$ = غير موجودة

السؤال الثاني: ص٣٩

٢) جد قيمة النهاية في كل مما يأتي عند النقطة المبينة إزاء كل منها (إن وجدت):

أ) $ق(س) = \frac{س^٢+١}{س+٨}$ ، $س \to$ صفر

ب) $هـ(س) = \frac{س^٢+٥س}{س-١}$ ، $س \to ١$

جـ) $ل(س) = \frac{س^٢-٣س-٤}{١٢-٣س}$ ، $س \to ٤$

د) $م(س) = \frac{س^٢-٢٧}{٣س^٢-٩س}$ ، $س \to ٣$

هـ) $ك(س) = \frac{\frac{١}{س-٢} - \frac{١}{٥}}{٢س-١٤}$ ، $س \to ٧$

أ) $= \frac{٠+١}{٨+٠} = \frac{١}{٨}$

ب) $= \frac{١+٥}{٠} = \frac{٦}{٠}$ = غير موجودة

ج) من التعويض المباشر نحصل على $\left(\frac{٠}{٠}\right)$

$$\lim_{س\to٤} \frac{(س-٤)(س+١)}{٣(٤-س)}$$

$$\lim_{س\to٤} \frac{-(س+١)}{٣} = \frac{-٥}{٣}$$

د) من التعويض المباشر نحصل على $\left(\frac{٠}{٠}\right)$

$$\lim_{س\to٣} \frac{(س-٣)(س^٢+٣س+٩)}{٣س(س-٣)}$$

$$\lim_{س\to٣} \frac{(س^٢+٣س+٩)}{٣س} = \frac{٩+٩+٩}{٩} = ٣$$

ه) من التعويض المباشر نحصل على $\left(\frac{٠}{٠}\right)$

$$\lim_{س\to٧} \frac{-س+٥+٢}{(٢س-١٤)(س-٢)(٥)}$$

$$\lim_{س\to٧} \frac{-(س-٧)}{٢(س-٧)(س-٢)(٥)} = \frac{-١}{٥\times٥\times٢} = \frac{-١}{٥٠}$$

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School"

الفصل الأول: النهايات (نهاية خارج قسمة اقترانين)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص٣٩)

السؤال الثاني: ص٣٩

٢) جد قيمة النهاية في كل مما يأتي عند النقطة المبينة إزاء كل منها (إن وجدت):

و) د(س) = $\frac{٣ - \sqrt{١ + س}}{٨ - س}$ ، س ← ٨

ز) و(س) = $\frac{س - ٧}{\sqrt{٢ + س} - ٣}$ ، س ← ٧

و) من التعويض المباشر نحصل على $\left(\frac{٠}{٠}\right)$

$$\lim_{س \to ٨} \frac{٣ - \sqrt{١ + س}}{٨ - س} \times \frac{٣ + \sqrt{١ + س}}{٣ + \sqrt{١ + س}}$$

$$\lim_{س \to ٨} \frac{٩ - ١ + س}{(٨ - س)\left(٣ + \sqrt{١ + س}\right)}$$

$$\lim_{س \to ٨} \frac{٨ - س}{(٨ - س)\left(٣ + \sqrt{١ + س}\right)} = \frac{١}{٣ + ٣} = \frac{١}{٦}$$

ز) من التعويض المباشر نحصل على $\left(\frac{٠}{٠}\right)$

$$\lim_{س \to ٧} \frac{س - ٧}{\sqrt{٢ + س} - ٣} \times \frac{\sqrt{٢ + س} + ٣}{\sqrt{٢ + س} + ٣}$$

$$\lim_{س \to ٧} \frac{(س - ٧)\left(\sqrt{٢ + س} + ٣\right)}{٩ - (٢ + س)}$$

$$\lim_{س \to ٧} \frac{(س - ٧)\left(\sqrt{٢ + س} + ٣\right)}{٧ - س} = -(٣ + ٣) = -٦$$

السؤال الثالث: ص٤٠

٣) إذا كان ق(س) = س، فجد نهـــا $\lim_{س \to -٣}$ $\frac{ق^{٢}(س) - ق(٩)}{س + ٣}$

$$\lim_{س \to -٣} \frac{س^{٢} - ٩}{س + ٣}$$

$$\lim_{س \to -٣} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س + ٣} = -٣ - ٣ = -٦$$

الفصل الأول: النهايات (نهاية خارج قسمة اقترانين)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص٤٠)

السؤال الرابع: ص٤٠

٤) إذا علمت أن $\lim_{س\to ٥} ق(س) = -٧$، $\lim_{س\to ٥} هـ(س) = ٢$، فبيّن أن:

$$\lim_{س\to ٥} \frac{٢ق(س) - ٣هـ(س)}{ق(س) + س + ٧} = -٤$$

$$= \frac{٢\lim_{س\to ٥} ه(س) - ٣\lim_{س\to ٥} هـ(س)}{\lim_{س\to ٥} ه(س) + \lim_{س\to ٥} س + \lim_{س\to ٥} ٧}$$

$$= \frac{٢\times -٧ - ٣\times ٢}{-٧ + ٥ + ٧} = \frac{-١٤ - ٦}{٥} = \frac{-٢٠}{٥} = -٤$$

السؤال الخامس: ص٤٠

٥) إذا كان $ق(س) = \frac{١}{س - ٢}$، فجد $\lim_{هـ\to ٠} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$

$$\lim_{هـ\to ٠} \frac{\frac{١}{س - ٢ + هـ} - \frac{١}{س - ٢}}{هـ}$$

$$\lim_{هـ\to ٠} \frac{س - ٢ - س + ٢ - هـ}{(هـ)(س - ٢ + هـ)(س - ٢)}$$

$$\lim_{هـ\to ٠} \frac{-هـ}{(هـ)(س - ٢ + هـ)(س - ٢)} = \frac{-١}{(س - ٢)(س - ٢)} = \frac{-١}{(س - ٢)^{٢}}$$

السؤال السادس: ص٤٠

٦) جد $\lim_{س\to ١} \frac{س^{٢} + س - ٢}{س^{٢} - ١}$

$$\lim_{س\to ١} \frac{(س - ١)(س + ٢)}{(س - ١)(س + ١)} = \frac{٣}{٢}$$

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الأول: النهايات (نهاية اقتران الجذر النوني)

تدريب (١): ص٤٢

$$\sqrt{\lim_{س\to٣} ق(س)} - \lim_{س\to٣} هـ(س) + \lim_{س\to٣} س هـ(س)$$

$$\sqrt{٢٤ - ٨} + ٣ \times ٨ = \sqrt{١٦} + ٢٤$$

$$٤ + ٢٤ = ٢٨$$

تدريب (٢): ص٤٤

١) $\lim_{س\to٤} \sqrt{٢س + ١} = \sqrt{٨ + ١} = \sqrt{٩} = ٣$

٢) $\lim_{س\to-١} \sqrt{س^{٢}} = \sqrt{١} = ١$

٣) (محذوف)
٤) (محذوف)
٥) (محذوف)
٦) (محذوف)

تدريب ١

إذا كانت $\lim_{س\to٣} ق(س) = ٢٤$، $\lim_{س\to٣} هـ(س) = ٨$، فجد قيمة ما يأتي (إن وجدت):

$\lim_{س\to٣} (\sqrt{ق(س)} - هـ(س) + س هـ(س))$

تدريب ٢

جد نهاية كل اقتران من الاقترانات الآتية (إن وجدت):

١) $\lim_{س\to٤} \sqrt{٢س + ١}$

٢) $\lim_{س\to-١} \sqrt{س^{٣}}$

٣) $\lim_{س\to-١} \sqrt[٤]{س - ١}$

٤) $\lim_{س\to٠} \sqrt{س - ١}$

٥) $\lim_{س\to١} \sqrt[٥]{س - ١}$

٦) $\lim_{س\to٠} \sqrt{٢س}$

حل أسئلة نهاية الدرس (ص٤٥)

السؤال الأول: ص٤٥

أ) $\sqrt[٣]{\lim_{س\to٣} ق(س)} = \sqrt[٣]{-٦٤} = -٤$

ب) $\sqrt{\lim_{س\to٣} ق(س)} = \sqrt{-٦٤}$ = غير موجودة

ج) $\sqrt[٣]{\lim_{س\to٣} ق(س)} + \lim_{س\to٣} س^{٢} + \lim_{س\to٣} ٥س - \lim_{س\to٣} ٣$

$$= -٤ + ٩ + ١٥ - ٣ = ٢٤ - ٧ = ١٧$$

د) $\sqrt[٥]{-٣٢} + ٣ - ٥ = -٢ - ٢ = -٤$

السؤال الثاني: ص٤٥

أ) (محذوف)

ب) $\sqrt[٣]{٨} + ٢٥ - ٤ = ٢ + ٢٥ - ٤ = ٢٣$

ج) $\sqrt[٣]{-٤} = \sqrt[٣]{٠} =$ صفر

د) (محذوف)

١) إذا علمت أن $\lim_{س\to٣} ق(س) = -٦٤$، فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) $\lim_{س\to٣} \sqrt{ق(س)}$

ب) $\lim_{س\to٣} \sqrt[٣]{ق(س)}$

ج) $\lim_{س\to٣} (\sqrt[٣]{ق(س)} + س^{٢} + ٥س - ٣)$

د) $\lim_{س\to٣} (\sqrt[٥]{\frac{ق(س)}{٢}} + س - ٥)$

٢) جد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ) $\lim_{س\to٣^{+}} \sqrt{س - ٣}$

ب) $\lim_{س\to٥} (\sqrt[٣]{٣ - س} + س^{٢} - ٤)$

جـ) $\lim_{س\to-٢} \sqrt[٣]{٤ - س^{٢}}$

د) $\lim_{س\to٢} \sqrt[٤]{٤ - س^{٢}}$

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الثاني: الاتصال (الاتصال عند نقطة)

تدريب (١): ص٤٩

١) س = ٠

هـ(س) متصل عند (س = ٠)
لأن الصفر ليس نقطة تشعب،
الاقتران دائماً متصل لأنه كثير حدود.

٢) س = ١

هـ(١) = ٣ × ١ = ٣

$$\text{نهـا}_{س \to ١^+} (٣س) = ٣ \times ١ = ٣$$

$$\text{نهـا}_{س \to ١^-} (س^٢ + ٢) = ١ + ٢ = ٣$$

$$\text{نهـا}_{س \to ١} هـ(س) = ٣$$

$$\text{نهـا}_{س \to ١} هـ(س) = هـ(١) = ٣$$

هـ(س) متصل عند (س = ١) لأن $\text{نهـا}_{س \to ١} هـ(س) = هـ(١) = ٣$

٣) س = ٣

هـ(٣) = غير معرفة، إذاً هـ(س) غير متصل عند (س = ٣)

تدريب ١

إذا كان ق(س) = { س^٢ + ٢ ، س > ١ ؛ ٣س ، ١ ≤ س < ٣ ؛ س^٢ − ١٨ ، س < ٣ }

فابحث اتصال الاقتران ق عند كل مما يأتي:

١) س = ٠ ٢) س = ١ ٣) س = ٣

تدريب (٢): ص٤٩

نبسط المقدار الجبري أولاً

$$\frac{س^٢ - ٢س}{س - ٢} = \frac{س(س - ٢)}{س - ٢} = س$$

هـ(٢) = ٤

$$\text{نهـا}_{س \to ٢} هـ(س) = ٢$$

هـ(س) غير متصل عند (س = ٢) لأن $\text{نهـا}_{س \to ٢} هـ(س) \neq هـ(٢)$

تدريب ٢

إذا كان ق(س) = { (س^٢ − ٢س)/(س − ٢) ، س ≠ ٢ ؛ ٤ ، س = ٢ }

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٢

الفصل الثاني: الاتصال (الاتصال عند نقطة)

تدريب (٣): ص٥٢

١)

بما أن الاقتران متصلاً عند (س = −٢)، فإن:

$$\text{نهـــا}_{س\to -٢^+} \text{ ه}(س) = \text{نهـــا}_{س\to -٢^-} \text{ ه}(س)$$

$$\text{نهـــا}_{س\to -٢^+} (أس + ٦) = \text{نهـــا}_{س\to -٢^-} (٢س^{٣} + ٤)$$

$$-٢أ + ٦ = -١٦ + ٤$$

$$-٢أ + ٦ = -١٢$$

$$-٢أ = -١٨$$

$$أ = ٩$$

٢)

بما أن الاقتران متصلاً عند (س = ١)، فإن:

$$\text{نهـــا}_{س\to ١^+} \text{ ه}(س) = \text{نهـــا}_{س\to ١^-} \text{ ه}(س) = \text{ه}(١)$$

$$\text{نهـــا}_{س\to ١^+} (س - ب) = \text{نهـــا}_{س\to ١^-} (أس + ٣) = ٧$$

إيجاد قيمة (أ):

$$أ + ٣ = ٧$$

$$أ = ٤$$

إيجاد قيمة (ب):

$$١ - ب = ٧$$

$$-ب = ٦$$

$$ب = -٦$$

تدريب ٣

١) إذا كان ق (س) = $\begin{cases} ٢س^{٢} + ٤ & ، س > -٢ \\ أس + ٦ & ، س \le -٢ \end{cases}$

وكان الاقتران ق متصلًا عندما س = −٢، فجد قيمة الثابت أ.

٢) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} أس + ٣ & ، س > ١ \\ ٧ & ، س = ١ \\ س - ب & ، س < ١ \end{cases}$

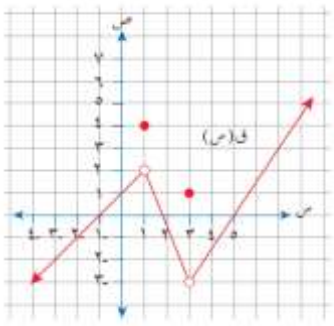
وكان ق متصلًا عندما س = ١، فجد قيمة كل من الثابتين: أ، ب.

الفصل الثاني: الاتصال (الاتصال عند نقطة)

حل أسئلة نهاية الدرس (ص٥٣)

السؤال الأول: ص٥٣

١) اعتمادًا على الشكل (١-١٥) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية، حدد قيم س التي يكون الاقتران ق عندها غير متصل.



الشكل (١-١٥).

س = {١، ٣}

السؤال الثاني: ص٥٣

٢) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ١ & ، س > ١ \\ ٢س & ، س \leq ١ \end{cases}$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ١

هـ(١) = ٢ × ١ = ٢

$\lim_{س \to ١^{+}}$ (٣س) = ٢ × ١ = ٢

$\lim_{س \to ١^{-}}$ (س^{٢} + ٢) = ١ − ١ = صفر

$\lim_{س \to ١}$ هـ(س) = غير موجودة

هـ(س) غير متصل عند (س = ١) لأن $\lim_{س \to ١}$ هـ(س) غير موجودة

السؤال الثالث: ص٥٣

٣) إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} \frac{٥}{س + ١} & ، س \neq ١ \\ ٣ & ، س = ١ \end{cases}$

فابحث اتصال الاقتران هـ عندما س = ١

هـ(١) = ٣

$\lim_{س \to ١}$ هـ(س) = $\frac{٥}{٢}$

هـ(س) غير متصل عند (س = ١) لأن $\lim_{س \to ١}$ هـ(س) ≠ هـ(١)

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School"

الفصل الثاني: الاتصال (الاتصال عند نقطة)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص٥٣)

السؤال الرابع: ص٥٣

٤) إذا علمت أن ق(س) = $\begin{cases} س^{٢}+٣ & ، س<-١ \\ ٥-س & ، -١ \geq س<١ \\ س^{٣}+٣ & ، س \leq ١ \end{cases}$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما:

أ) س = ١ ب) س = −١

أ) س = ١

هـ(١) = ١ + ٣ = ٤

$\lim_{س \to ١^{+}}$ (س ^{٣} + ٣) = ١ + ٣ = ٤

$\lim_{س \to ١^{-}}$ (٥ − س) = ٥ − ١ = ٤

$\lim_{س \to ١}$ هـ(س) = ٤

هـ(س) متصل عند (س = ١) لأن $\lim_{س \to ١}$ هـ(س) = هـ(١) = ٤

ب) س = −١

هـ(−١) = ٥ − −١ = ٦

$\lim_{س \to -١^{+}}$ (٥ − س) = ٥ − −١ = ٦

$\lim_{س \to -١^{-}}$ (س ^{٢} + ٣) = ١ + ٣ = ٤

$\lim_{س \to -١}$ هـ(س) = غير موجودة

هـ(س) غير متصل عند (س = −١) لأن $\lim_{س \to -١}$ هـ(س) غير موجودة

السؤال الخامس: ص٥٣

٥) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{٣-س}{س-٣} & ، س \neq ٣ \\ م س + ٢ & ، س = ٣ \end{cases}$

وكان الاقتران ق متصلاً عندما س = ٣، فجد قيمة الثابت م.

بما أن الاقتران متصلاً عند (س = ٣)، فإن:

$\lim_{س \to ٣}$ هـ(س) = هـ(٣)

−١ = ٣م + ٢

٣م = −٣

م = −١

الفصل الثاني: الاتصال (الاتصال عند نقطة)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص٥٤)

السؤال السادس: ص٥٤

٦) إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} س + أ & ، س > ٢ \\ ٨ & ، س = ٢ \\ ب س + ٦ & ، س < ٢ \end{cases}$

وكان الاقتران هـ متصلاً عندما س = ٢، فجد قيمة كل من الثابتين: أ، ب.

بما أن الاقتران متصلاً عند (س = ٢)، فإن:

$$\text{نهـا}_{س \to ٢^+} \text{هـ}(س) = \text{نهـا}_{س \to ٢^-} \text{هـ}(س) = \text{هـ}(٢)$$

$$\text{نهـا}_{س \to ٢^+} (ب س + ٦) = \text{نهـا}_{س \to ٢^-} (س + أ) = ٨$$

إيجاد قيمة (ب):

$$٢ب + ٦ = ٨$$
$$٢ب = ٢$$
$$ب = ١$$

إيجاد قيمة (أ):

$$٢ + أ = ٨$$
$$أ = ٦$$

السؤال السابع: ص٥٤

٧) إذا كان ل(س) = $\begin{cases} أس - ب & ، س > ١ \\ ٤ & ، س = ١ \\ أس^٣ + ب + ٢ & ، س < ١ \end{cases}$

وكان الاقتران ل متصلاً عندما س = ١، فجد قيمة كل من الثابتين: أ، ب.

بما أن الاقتران متصلاً عند (س = ١)، فإن:

$$\text{نهـا}_{س \to ١^+} \text{ل}(س) = \text{نهـا}_{س \to ١^-} \text{ل}(س) = \text{ل}(١)$$

$$\text{نهـا}_{س \to ١^+} (أس^٣ + ب + ٢) = \text{نهـا}_{س \to ١^-} (أس - ب) = ٤$$

إيجاد قيمة (أ):

حل معادلتين بطريقة الحذف

$$أ + ب = ٢$$
$$أ - ب = ٤$$
$$٢أ = ٦$$
$$أ = ٣$$

إيجاد قيمة (ب):

$$٣ + ب = ٢$$
$$ب = -١$$

الفصل الثاني: الاتصال (الاتصال عند نقطة)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص٥٤)

السؤال الثامن: ص٥٤

٨) إذا كان الاقتران ق متصلاً عندما س = ٢، وكانت $\lim_{س \to ٢}$ ٢ق(س) + س = ٦ ، فجد قيمة ق(٢).

بما أن الاقتران متصلاً عند (س = ٢)، فإن:

$$\lim_{س \to ٢} هـ(س) = هـ(٢)$$

$$٢ \lim_{س \to ٢} هـ(س) + \lim_{س \to ٢} س = ٦$$

$$٢ \lim_{س \to ٢} هـ(س) + ٢ = ٦$$

$$٢ \lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٤$$

$$\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٢$$

هـ(٢) = ٢ ، لأن الاقتران متصل

الفصل الثاني: الاتصال (نظريات الاتصال)

تدريب (١): ص٥٦

تدريب ١

إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٢ ، هـ(س) = $\begin{cases} س - ١ & ، س \geq ٣ \\ ٥ - س & ، س < ٣ \end{cases}$

فابحث اتصال (ق + هـ) عندما س = ٣

١) ق + هـ (س) متصل عند (س = ٠) لانه كثير حدود.

٢) هـ(٣) = ٣ − ١ = ٢

٣) $\lim_{س \to ٣}$ هـ(س) = ٢

$\lim_{س \to ٣^{+}}$ (٥ − س) = ٥ − ٣ = ٢

$\lim_{س \to ٣^{-}}$ (س − ١) = ٣ − ١ = ٢

$\lim_{س \to ٣}$ هـ(س) = هـ(٣) = ٢

الاقترانين متصلين عند (س = ٣) لأنه حاصل جمع اقترانين متصلين

تدريب (٢): ص٥٩

تدريب ٢

إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٥ ، هـ(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٦ & ، س \geq -١ \\ ٣٥ - س & ، س < -١ \end{cases}$

فابحث اتصال الاقتران م(س) = ق(س) × هـ(س) عندما س = −١

١) ق + هـ (س) متصل عند (س = −١) لأنه كثير حدود.

٢) هـ(−١) = ١ + ٦ = ٧

٣) $\lim_{س \to -١}$ هـ(س) = غير موجودة

$\lim_{س \to -١^{+}}$ (٣٥ − س) = ٣٥ − −١ = ٣٦

$\lim_{س \to -١^{-}}$ (س^{٢} + ٦) = ١ + ٦ = ٧

نقوم بخطوة التأكد (اجراء العملية الحسابية على الاقترانين)

م(س) = $\begin{cases} (س^{٢} + ٥)(س^{٢} + ٦) & ، س \geq -١ \\ (س^{٢} + ٥)(٣٥ - س) & ، س < -١ \end{cases}$

$\lim_{س \to -١^{+}}$ (س^{٢} + ٥)(٣٥ − س) = ٦ × ٣٦ = ٢١٦

$\lim_{س \to -١^{-}}$ (س^{٢} + ٥)(س^{٢} + ٦) = ٦ × ٧ = ٤٢

الاقترانين غير متصلين عند (س = −١)

الفصل الثاني: الاتصال (نظريات الاتصال)

تدريب (٣): ص٦٠

١) لا يوجد نقاط عدم اتصال لأنه كثير حدود.

٢) $هـ(س) = \frac{س - ١}{(س + ٣)(س + ٢)}$

$س + ٢ = ٠$ $س + ٣ = ٠$

$س = -٢$ $س = -٣$

نقاط عدم الاتصال $س = \{-٢، -٣\}$

٣) $س^{٣} - ١ = ٠$

$(س - ١)(س^{٢} + س + ١) = ٠$

$س - ١ = ٠$ $س = ١$

نقاط عدم الاتصال $س = \{١\}$

تدريب ٣

جد قيم س (إن وجدت) التي يكون عندها كل اقتران مما يأتي غير متصل:

١) $ق(س) = س^{٢} - ٣س + ٨$

٢) $هـ(س) = \frac{س - ١}{س^{٢} + ٥س + ٦}$

٣) $ل(س) = \frac{٥ - س}{س^{٢} - ١}$

حل أسئلة نهاية الدرس (ص٦١)

السؤال الأول: ص٦١

١) $وهـ(س)$ متصل عند $(س = ٢)$ لأنه كثير حدود.

٢) $هـ(٢) = ٢ + ٩ = ١١$

٣) $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ١١$

$\lim_{س \to ٢^{+}} (٥س + ١) = ١٠ + ١ = ١١$

$\lim_{س \to ٢^{-}} (س + ٩) = ٢ + ٩ = ١١$

$\lim_{س \to ٢} هـ(س) = هـ(٢) = ١١$

الاقترانين متصلين عند $(س = ٢)$ لأنه حاصل جمع اقترانين متصلين

١) إذا كان $ق(س) = ٥س^{٢} + ٥س - ١$ ، $هـ(س) = \begin{cases} س + ٩ & ، س \geq ٢ \\ ٥س + ١ & ، س < ٢ \end{cases}$

وكان $ل(س) = ٢ق(س) + هـ(س)$، فابحث اتصال الاقتران ل عندما $س = ٢$

الفصل الثاني: الاتصال (نظريات الاتصال)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص٦١)

السؤال الثاني: ص٦١

٢) إذا كان ق(س) = ٥ س^{٢} + ٤ ، هـ(س) = $\begin{cases} س + ٤ & ، س > ٠ \\ ٤ - س^{٢} & ، س \leq ٠ \end{cases}$

وكان ل(س) = (ق × هـ)(س)، فابحث اتصال الاقتران ل عندما س = ٠

١) هـ(س) متصل عند (س = ٠) لأنه كثير حدود.

٢) هـ(٠) = ٤ − ٠ = ٤

٣) $\lim_{س \to ٠} هـ(س) = ٤$

$\lim_{س \to ٠^{+}} (٤ - ٠) = ٤$

$\lim_{س \to ٠^{-}} (٠ + ٤) = ٤$

$\lim_{س \to ٠} هـ(س) = هـ(٠) = ٤$

الاقترانين متصلين عند (س = ٠) لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين

السؤال الثالث: ص٦١

٣) إذا كان ق(س) = س^{٢} − ٩ ، هـ(س) = $\begin{cases} س & ، س > ٣ \\ ٠ & ، س = ٣ \\ -س & ، س < ٣ \end{cases}$

وكان ل(س) = ق(س) × هـ(س)، فبين أن ل(س) متصل عندما س = ٣

١) هـ(س) متصل عند (س = ٣) لأنه كثير حدود.

٢) هـ(٣) = صفر

٣) $\lim_{س \to ٣} هـ(س)$ = غير موجودة

$\lim_{س \to ٣^{+}} (-س) = -٣$ $\quad$ $\lim_{س \to ٣^{-}} (س) = ٣$

نقوم بخطوة التأكد (اجراء العملية الحسابية على الاقترانين)

$$ل(س) = \begin{cases} (س^{٢} - ٩)(س) & ، س > ٣ \\ (س^{٢} - ٩)(٠) & ، س = ٣ \\ (س^{٢} - ٩)(-س) & ، س < ٣ \end{cases}$$

$\lim_{س \to ٣^{+}} (س^{٢} - ٩)(-س) = ٠ \times -٣ = ٠$

$\lim_{س \to ٣^{-}} (س^{٢} - ٩)(س) = ٠ \times ٣ = ٠$ $\quad$ $\lim_{س \to ٣} ل(س) = ٠$

الاقترانين متصلين عند (س = ٣) لأنه حاصل ضرب اقترانين متصلين

الفصل الثاني: الاتصال (نظريات الاتصال)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص٦١)

السؤال الرابع: ص٦١

٤) إذا كان (ق + هـ)(س) متصلاً عندما س = أ، فهل تستنتج أن كلاً من ق، هـ متصل عندما س = أ؟ برّر إجابتك.

لا ليس بالضرورة، واليك المثال التالي:

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} -٥ & ، \ س < ١ \\ ٤ & ، \ س = ١ \\ ١ & ، \ س > ١ \end{cases} \qquad \text{هـ}(س) = \begin{cases} ٧ & ، \ س < ١ \\ -٢ & ، \ س = ١ \\ ١ & ، \ س > ١ \end{cases}$$

$$(\text{ق} + \text{هـ})(س) = \begin{cases} ٢ & ، \ س < ١ \\ ٢ & ، \ س = ١ \\ ٢ & ، \ س > ١ \end{cases}$$

ق(س) و هـ(س) غير متصلين عند (س = ١)، ولكن (ق + هـ)(س) متصل عند (س = ١)

السؤال الخامس: ص٦٢

٥) جد قيم س (إن وجدت) التي لا يكون عندها كل اقتران مما يأتي متصلاً:

أ) ق(س) = س^{٢} + ١

أ) لا يوجد نقاط عدم اتصال لأنه كثير حدود.

ب) هـ(س) = $\frac{س - ٣}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

ب) س^{٢} − ٥س + ٦ = ٠

س − ٣ = ٠ س − ٢ = ٠

س = ٣ س = ٢

نقاط عدم الاتصال س = {٣، ٢}

جـ) ل(س) = $\frac{س + ٢}{س^{٢} - ١} + \frac{٥}{س}$

جـ) $\left(س^{٢} - ١\right) = (س + ١)(س - ١)$

س = ±١

س = ٠

نقاط عدم الاتصال س = {±١، ٠}

د) م(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٣ & ، \ س > ٢ \\ ٦ - س & ، \ س \leq ٢ \end{cases}$

د)

م(٢) = ٦ − ٢ = ٤

$\lim_{س \to ٢}$ م(س) = غير موجودة

$\lim_{س \to ٢^{+}}$ م(س) = ٦ − ٢ = ٤ $\lim_{س \to ٢^{-}}$ م(س) = ٨ + ٣ = ١١

$\lim_{س \to ٢}$ م(س) ≠ م(٢)

نقاط عدم الاتصال س = {٢}

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

حل أسئلة نهاية الوحدة الأولى (النهايات والاتصال)

السؤال الأول: ص٦٣

١) اعتمادًا على الشكل (١-١٦) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، جد قيمة كل مما يأتي:

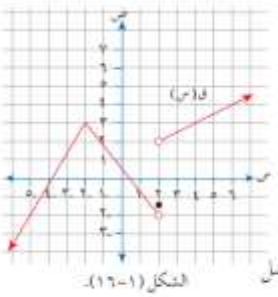
أ) ق(٢)

ب) $\lim_{س \to -١}$ ق(س)

جـ) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

د) قيم س التي يكون عندها منحنى الاقتران ق غير متصل

هـ) $\lim_{س \to ٠}$ ((ق(س))^{٢} - س + ٢)



الشكل (١-١٦)

أ) هـ(٢) = -١.٥

ب) $\lim_{س \to -١}$ هـ(س) = ٢

ج) $\lim_{س \to ٢}$ هـ(س) = غير موجودة

د) س = {٢}

هـ) $\left(\lim_{س \to ٠} هـ(س)\right)^{٢} - \lim_{س \to ٠} س + \lim_{س \to ٠} ٢$

$= (\frac{١}{٢})^{٢} - ٠ + ٢ = \frac{١}{٤} + ٢ = \frac{٩}{٤}$

السؤال الثاني: ص٦٣

٢) إذا كانت $\lim_{س \to ١}$ (ق(س))^{٣} + ٢ = ٢٩، $\lim_{س \to ١}$ هـ(س) = -٣، فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\lim_{س \to ١}$ (ق(س) + ٢هـ(س) + س)

ب) $\lim_{س \to ١}$ (ق(س) × هـ(س))

$\left(\lim_{س \to ١} هـ(س)\right)^{٣} + ٢ = ٢٩$

$\left(\lim_{س \to ١} هـ(س)\right)^{٣} = ٢٧$ $\lim_{س \to ١} هـ(س) = ٣$

أ) $\lim_{س \to ١} هـ(س) + ٢ \lim_{س \to ١} هـ(س) + \lim_{س \to ١} س$

$= ٣ + ٢ \times ٣ - ٦ + ١ = ٣ - ٢$

ب) $\lim_{س \to ١} هـ(س) \times \lim_{س \to ١} هـ(س)$

$= ٣ \times -٣ = -٩$

تابع حل أسئلة نهاية الوحدة الأولى (النهايات والاتصال)

السؤال الثالث: ص٦٣

٣) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢أس^{٢}+ب & ، س > ١ \\ ٧ & ، س = ١ \\ س^{٢}-٤ب-٦ & ، س < ١ \end{cases}$

وكان الاقتران ق متصلاً عندما س = ١، فجد قيمة كل من الثابتين: أ، ب.

بما أن الاقتران متصلاً عند (س = ١)، فإن:

$$\text{نهـا}_{س\to ١^{+}} \text{ه}(س) = \text{نهـا}_{س\to ١^{-}} \text{ه}(س) = \text{ه}(١)$$

$$\text{نهـا}_{س\to ١^{+}} (س^{٢}-٤ب-٦) = \text{نهـا}_{س\to ١^{-}} (٢أس^{٢}+ب) = ٧$$

$$١-٤ب-٦ = ٢أ+ب = ٧$$

إيجاد قيمة (ب):

$$-٤ب-٥ = ٧$$

$$-٤ب = ١٢$$

$$ب = -٣$$

إيجاد قيمة (أ):

$$٢أ-٣ = ٧$$

$$٢أ = ١٠$$

$$أ = ٥$$

السؤال الرابع: ص٦٣

٤) جد قيمة النهاية (إن وجدت) في كل مما يأتي عند قيم س المبينة إزاء كل منها:

أ) ق(س) = $\frac{س+١}{س^{٢}+١} + \sqrt{٣-س}$ ، س ← -١

ب) هـ(س) = $\frac{س^{٢}-٥س}{٢س-١٠}$ ، س ← ٥

أ) $$\text{نهـا}_{س\to -١} \sqrt{٣-س} + \frac{\text{نهـا}_{س\to -١}(س+١)}{\text{نهـا}_{س\to -١}(س^{٢}+١)}$$

$$= \sqrt{٤} + \frac{٠}{٢} = ٢+٠ = ٢$$

ب) من التعويض المباشر نحصل على $\left(\frac{٠}{٠}\right)$

$$\text{نهـا}_{س\to ٥} \frac{س(س-٥)}{٢(س-٥)} = \frac{٥}{٢}$$

تابع حل أسئلة نهاية الوحدة الأولى (النهايات والاتصال)

تابع السؤال الرابع: ص٦٤

٤) جد قيمة النهاية (إن وجدت) في كل مما يأتي عند قيم س المبينة إزاء كل منها:

جـ) $\frac{س^{٢}-٢س+١}{١٢-٣س}=(س)$ ل ، $س \leftarrow ١$

د) $م(س)=\frac{س^{٣}-٢٧}{س-٣}$ ، $س \leftarrow ٣$

هـ) $ك(س)=\frac{\frac{١}{٢}-\frac{١}{س-٢}}{٨-٢س}$ ، $س \leftarrow ٤$

و) $د(س)=\frac{\sqrt{٣س+٤}-٥}{٤٩-س^{٢}}$ ، $س \leftarrow ٧$

جـ) $\frac{١+٢-١}{٣-١٢}=\frac{٠}{٩}=$ صفر

د) من التعويض المباشر نحصل على $\left(\frac{٠}{٠}\right)$

$$\lim_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(س^{٢}+٣س+٩)}{س-٣}$$

$$=٩+٩+٩=٢٧$$

هـ) من التعويض المباشر نحصل على $\left(\frac{٠}{٠}\right)$

$$\lim_{س \to ٤} \frac{٢+س-٢}{(٢س-٨)(س-٢)(٢)}$$

$$\lim_{س \to ٤} \frac{س-٤}{(٢)(س-٤)(س-٢)(٢)}=\frac{١-}{٢\times٢\times٢}=\frac{١-}{٨}$$

و) من التعويض المباشر نحصل على $\left(\frac{٠}{٠}\right)$

$$\lim_{س \to ٧} \frac{\sqrt{٣س+٤}-٥}{س^{٢}-٤٩} \times \frac{\sqrt{٣س+٤}+٥}{\sqrt{٣س+٤}+٥}$$

$$\lim_{س \to ٧} \frac{٣س+٤-٢٥}{(س^{٢}-٤٩)(\sqrt{٣س+٤}+٥)}$$

$$\lim_{س \to ٧} \frac{٣س-٢١}{(س^{٢}-٤٩)(\sqrt{٣س+٤}+٥)}$$

$$\lim_{س \to ٧} \frac{٣(س-٧)}{(س-٧)(س+٧)(\sqrt{٣س+٤}+٥)}=\frac{٣}{١٠\times١٤}=\frac{٣}{١٤٠}$$

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

تابع حل أسئلة نهاية الوحدة الأولى (النهايات والاتصال)

السؤال الخامس: ص٦٤

٥) إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٥س ، هـ(س) = $\begin{cases} ٥س + ٤ & ، س \geq ١ \\ ٨ + س^{٢} & ، س < ١ \end{cases}$

وكان ل(س) = (ق + هـ) (س) ، فابحث اتصال الاقتران ل عندما س = ١

١) ه(س) متصل عند (س = ١) لأنه كثير حدود.

٢) هـ(١) = ٥ + ٤ = ٩

٣) $\lim_{س \to ١}$ هـ(س) = ٩

$\lim_{س \to ١^{+}}$ (٨ + س^{٢}) = ١ + ٨ = ٩

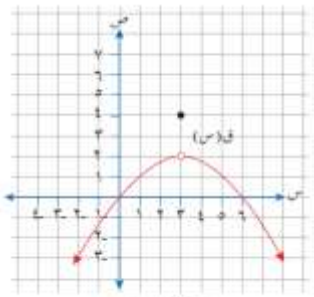
$\lim_{س \to ١^{-}}$ (٥س + ٤) = ٥ + ٤ = ٩

$\lim_{س \to ١}$ هـ(س) = هـ(١) = ٩

الاقترانين متصلين عند (س = ١) لأنه حاصل جمع اقترانين متصلين

السؤال السادس: ص٦٤

٦) اعتمادًا على الشكل (١-١٧) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، ابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٣



الشكل (١-١٧).

ه(س) غير متصل عند (س = ٣)،

لأن $\lim_{س \to ٣}$ ه(س) ≠ ه(٣)

السؤال السابع: ص٦٤

٧) إذا كان كل من الاقترانين: ق ، هـ متصلًا عندما س = ٥، وكان هـ(٥) = ٤،

$\lim_{س \to ٥}$ $\frac{ق(س) + س}{٣ هـ(س)}$ = ١، فجد ق(٥).

$$١ = \frac{ه(٥) + ٥}{٣ \times هـ(٥)}$$

$$١ = \frac{ه(٥) + ٥}{١٢}$$

$$ه(٥) + ٥ = ١٢$$

$$ه(٥) = ٧$$

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School"

تابع حل أسئلة نهاية الوحدة الأولى (النهايات والاتصال)

السؤال الثامن: ص٦٥

٨) إذا كان ق (س) = $\frac{١}{س} + \frac{س - ٣}{س^{٢} - ٣س}$ ، فما قيم س التي **لا** يكون عندها الاقتران ق متصلاً؟

$س^{٢} - ٣س = ٠$ $س = ٠$

$س(س - ٣) = ٠$

$س = ٠$ $س = ٣$

نقاط عدم الاتصال س = {٣،٠}

السؤال التاسع: ص٦٥

٩) يتكون هذا السؤال من خمس فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربعة بدائل، واحد منها فقط صحيح. ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) إذا كان م عددًا ثابتًا، وكان $\lim_{س \to ١}$ (م $س^{٢}$ – ٤س + ٥) = ٥ ، فإن قيمة م هي:

أ) ١ ب) –١ جـ) ٤ د) –٤

(٢) $\lim_{س \to -١}$ $(س^{٣} - ٤)^{٣}$ تساوي :

أ) –١٢٥ ب) –٢٧ جـ) ١٢٥ د) ٢٧

(٣) إذا كان ق (س) = $\frac{س^{٣} - ٥س}{س^{٣} - ٣س + ٢}$ ، فإن قيم س التي **لا يكون** عندها الاقتران ق متصلاً هي:

أ) {٠،٥} ب) {–٥، ٠} جـ) {٢،١} د) {–١،–٢}

(٤) إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} س - ١ & ، س < ٢ \\ ٣ & ، س = ٢ \\ س^{٢} & ، س > ٢ \end{cases}$ ، فإن $\lim_{س \to ٢}$ هـ(س) =

أ) ٣ ب) ٤ جـ) ١ د) غير موجودة

(٥) إذا كانت $\lim_{س \to ٢}$ (٣ ق(س)) – ٩ = ٠، فإن قيمة $\lim_{س \to ٢}$ $(ق(س))^{٢}$:

أ) ٩ ب) ٨١ جـ) ٢٧ د) ٢

١)

$\lim_{س \to ١}$ م $س^{٢}$ – $\lim_{س \to ١}$ ٤س + $\lim_{س \to ١}$ ٥ = ٥

م – ٤ + ٥ = ٥

م + ١ = ٥

م = ٤ **(الجواب فرع ج)**

٢)

$= (١ - ٤)^{٣} = -٣^{٣} = -٢٧$ **(الجواب فرع ب)**

٣)

$س^{٢} - ٣س + ٢ = (س - ٢)(س - ١)$

$س = ٢$ $س = ١$

نقاط عدم الاتصال س = {٢،١} **(الجواب فرع ج)**

٤)

$\lim_{س \to ٢^{+}}$ هـ(س) = ٤

$\lim_{س \to ٢^{-}}$ هـ(س) = ٢ – ١ = ١

$\lim_{س \to ٢}$ هـ(س) = غير موجودة **(الجواب فرع د)**

٥)

$\lim_{س \to ٢}$ وهـ(س) = ٣

$\left(\lim_{س \to ٢} وهـ(س)\right)^{٢}$ = ٩ **(الجواب فرع أ)**

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School"

الوحدة الثانية: التفاضل (الاشتقاق)
حل جميع أسئلة وتدريبات الكتاب
لطلاب التخصص الأدبي والفندقي

إعداد/ مروان ابوديه

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School"
0797-55-27-27

الفصل الأول: المشتقة (معدل التغير)

تدريب (١): ص٧٢

تدريب ١

جد قيمة معدل التغير في الاقتران ق لكل مما يأتي:

١) ق(س) = $\sqrt{س}$ عندما تتغير س من ٨١ إلى ٣٦

٢) ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٥ ، ١ \geq س \geq ٣ \\ ٦س + ٤ ، ٣ < س \geq ٧ \end{cases}$ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤

٣) ق(س) = -٢ عندما تتغير س من ١ إلى ٦، ماذا تلاحظ؟

٤) ق(س) = $٢س + ١$ عندما تتغير س من س = ٠ إلى س = ٣، ماذا تلاحظ؟

١) $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(س_{٢}) - هـ(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$

$= \frac{هـ(٣٦) - هـ(٨١)}{٣٦ - ٨١} = \frac{٦ - ٩}{٤٥ -} = \frac{٣ -}{٤٥ -} = \frac{١}{١٥}$

٢) $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(س_{٢}) - هـ(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$

$= \frac{هـ(٤) - هـ(٢)}{٤ - ٢} = \frac{٢٨ - ٣}{٢}$

$= \frac{٢٥}{٢}$

٣) $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(س_{٢}) - هـ(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$

$= \frac{هـ(٦) - هـ(١)}{٦ - ١} = \frac{٢ - - ٢ -}{٥} = \frac{٢ + ٢ -}{٥}$

$= \frac{٠}{٥} =$ صفر (عندما يكون الاقتران عدد ثابت، فإن معدل التغير يساوي صفر) – مشتقة الثابت دائما تساوي صفر

٤) $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(س_{٢}) - هـ(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$

$= \frac{هـ(٣) - هـ(٠)}{٣ - ٠} = \frac{٧ - ١}{٣} = \frac{٦}{٣} = ٢$

تدريب (٢): ص٧٣

تدريب ٢

إذا كان ق(س) = $٨س^{٢}$، فجد ميل القاطع المار بالنقطتين: (٠، ق(٠))، (٣، ق(٣)).

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(س_{٢}) - هـ(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$

$= \frac{هـ(٣) - هـ(٠)}{٣ - ٠} = \frac{٧٢ - ٠}{٣} = \frac{٧٢}{٣} = ٢٤$

الفصل الأول: المشتقة (معدل التغير)

تدريب (٣): ص٧٦

تدريب ٣

إذا كان معدل التغير في الاقتران ق في الفترة [−١، ٢] يساوي −٣ ، وكان هـ (س) = ٢ق(س) + ٥س ، فجد معدل التغير في الاقتران هـ في الفترة [−١، ٢].

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} \text{ هـ }(س) = \frac{\text{هـ}(٢) - \text{هـ}(-١)}{٣} = -٣$$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} \text{ هـ }(س) = \frac{\text{هـ}(٢) - \text{هـ}(-١)}{٣} = \frac{(٥ - (-١)\text{ق}٢) - (١٠ + (٢)\text{ق}٢)}{٣}$$

$$= \frac{(٢)\text{ق}٢ - (-١)\text{ق}٢ + ١٠ + ٥}{٣} = \frac{(١)\text{ق}٢ - (٢)\text{ق}٢}{٣} + \frac{١٥}{٣}$$

$$= ٢ \times \frac{\text{هـ}(٢) - \text{هـ}(-١)}{٣} + ٥ = ٢ \times ٣ + ٥ = ٦ - + ٥ = -١$$

تدريب (٤): ص٧٦

تدريب ٤

في عام ٢٠٠٥ م بلغت أرباح شركة أجهزة كهربائية (٢٠٠٠٠) دينار، وفي عام ٢٠١٢م حققت الشركة أرباحا قدرها (٣٤٠٠٠) دينار. ما قيمة التغير في ربح الشركة في أثناء هذه المدة؟ وما معدل التغير السنوي في أرباحها؟

التغير في الربح = ٣٤٠٠٠ − ٢٠٠٠٠ = ١٤٠٠٠ **دينار**

التغير في الزمن = ٢٠١٢ − ٢٠٠٥ = ٧ **سنوات**

متوسط الربح السنوي $= \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{١٤٠٠٠}{٧} =$ ٢٠٠٠ **دينار**

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الأول: المشتقة (معدل التغير)

حل أسئلة نهاية الدرس (ص٧٧)

السؤال الأول: ص٧٧

١) إذا كان ق(س) = ٣س – س٢، وتغيرت س من –١ إلى ٤، فجد:
أ) مقدار التغير في س.
ب) معدل تغير الاقتران ق(س).

أ)

$$\Delta س = س_٢ - س_١ = ٤ + ١ = ٥$$

ب)

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(٤) - ق(-١)}{٥}$$

$$= \frac{(١٢ - ١٦) - (-٣ - ١)}{٥} = \frac{-٤ + ٤}{٥} = \frac{٠}{٥} = \text{صفر}$$

السؤال الثاني: ص٧٧

٢) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ - ٢ & ، ٠ \le س \le ٣ \\ ٢س + ١ & ، ٣ < س \le ٧ \end{cases}$
فجد معدل تغير الاقتران ق عندما تتغير س من ١ إلى ٥.

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١} = \frac{ق(٥) - ق(١)}{٥ - ١}$$

$$= \frac{١١ - -١}{٤} = \frac{١٢}{٤} = ٣$$

السؤال الثالث: ص٧٧

٣) ما قيمة تغير الاقتران ص = ٣ س٢ عندما تتغير س من س١ = ٢ بمقدار Δ س = –١؟

$$\Delta ص = ق(١) - ق(٢)$$
$$= ٣ - ٢٤ = -٢١$$

$$\Delta س = س_٢ - س_١$$
$$-١ = س_٢ - ٢$$
$$س_٢ = -١ + ٢ = ١$$

السؤال الرابع: ص٧٧

٤) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ & ، ١ \le س \le ٣ \\ أس & ، ٣ < س \le ٥ \end{cases}$
وكان معدل تغير الاقتران ق عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ يساوي ٤، فجد قيمة الثابت أ.

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

$$٤ = \frac{ق(٥) - ق(٢)}{٥ - ٢}$$

$$٤ = \frac{١٥أ - ٤}{٣}$$

$$١٢ = ١٥أ - ٤$$

$$١٦ = ١٥أ$$

$$أ = \frac{١٦}{١٥}$$

الفصل الأول: المشتقة (معدل التغير)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص٧٧)

السؤال الخامس: ص٧٧

٥) إذا كان معدل التغير للاقتران ق في الفترة [١، ٣] يساوي ٤، وكان هـ(س) = ق(س) – س، فجد معدل التغير للاقتران هـ في الفترة [١، ٣].

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} \text{ وهـ}(س) = \frac{\text{وهـ}(٣) - \text{وهـ}(١)}{٢} = ٤$$

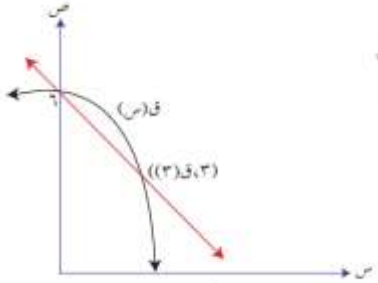
$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} \text{ هـ}(س) = \frac{\text{هـ}(٣) - \text{هـ}(١)}{٢} = \frac{[\text{وهـ}(٣) - ٣] - [\text{وهـ}(١) - ١]}{٢}$$

$$= \frac{\text{وهـ}(٣) - \text{وهـ}(١)}{٢} + \frac{٣ + ١-}{٢}$$

$$= ٤ - \frac{٢}{٢} = ٤ - ١ = ٣$$

السؤال السادس: ص٧٧

٦) إذا كان ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق في الشكل (٢-٣) يساوي (-١)، فجد قيمة ق(٣).



الشكل (٢-٣).

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\text{وهـ}(س_٢) - \text{وهـ}(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\text{وهـ}(٣) - \text{وهـ}(٠)}{٣ - ٠}$$

$$١- = \frac{\text{وهـ}(٣) - ٦}{٣}$$

$$\text{وهـ}(٣) - ٦ = ٣-$$

$$\text{وهـ}(٣) = ٣$$

السؤال السابع: ص٧٨

٧) إذا كان ق(س) = ٣س٢، فجد ميل القاطع المار بالنقطتين: (٠، ق(٠)) ، (٢، ق(٢)).

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\text{وهـ}(س_٢) - \text{وهـ}(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\text{وهـ}(٢) - \text{وهـ}(٠)}{٢ - ٠} = \frac{١٢ - ٠}{٢ - ٠} = \frac{١٢}{٢} = ٦$$

الفصل الأول: المشتقة (معدل التغير)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص٧٨)

السؤال الثامن: ص٧٨

٨) مكعب معدني تعرض للحرارة بحيث تغير طول ضلعه من (١) سم إلى (٣) سم. جد مقدار التغير في حجم هذا المكعب.

قانون حجم المكعب = $ع(س) = س^{٣}$

$$\Delta ص = ع(٣) - ع(١) = ٢٧ - ١ = ٢٦$$

السؤال التاسع: ص٧٨

٩) إذا كانت المسافة التي يقطعها جسيم في أثناء سقوطه رأسيًا إلى أسفل تعطى بالعلاقة ف(ن) = ١٠ن + ٥ن^{٢}، حيث ف المسافة المقطوعة بالأمتار، ن الزمن بالثواني، فاحسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [١، ٣].

$$\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_{٢}) - ف(ن_{١})}{ن_{٢} - ن_{١}}$$

$$\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(٣) - ف(١)}{٣ - ١} = \frac{(٣٠ - ٤٥) - (١٠ - ٥)}{٢}$$

$$= \frac{-١٥ - ٥}{٢} = \frac{-٢٠}{٢} = -١٠$$

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School"

الفصل الأول: المشتقة (المشتقة الأولى)

تدريب (١): ص٨٢

تدريب ١

إذا كان ق(س) = ٣ + ٤س ، فجد قَ(٢) باستخدام التعريف.

$$هـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٣ + ٤ع - (٣ + ٤س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٣ + ٤ع - ٣ - ٤س}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{٤ع - ٤س}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٤(ع - س)}{ع - س} = ٤ \qquad هـ'(٢) = ٤$$

تدريب (٢): ص٨٢

تدريب ٢

إذا كان ق(س) = ٤س^{٢} – ٣، فجد قَ(٣) باستخدام التعريف.

$$هـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(٤ع^{٢} - ٣) - (٤س^{٢} - ٣)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٤ع^{٢} - ٣ - ٤س^{٢} + ٣}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{٤ع^{٢} - ٤س^{٢}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٤(ع^{٢} - س^{٢})}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{٤(ع - س)(ع + س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} ٤(ع + س) = ٨س \qquad هـ'(٣) = ٢٤$$

تدريب (٣): ص٨٣

تدريب ٣

إذا كان ق(س) = س^{٣} ، فجد قَ(س) باستخدام التعريف.

$$هـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع^{٣} - س^{٣})}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع^{٢} + عس + س^{٢})}{ع - س}$$

$$= س^{٢} + س^{٢} + س^{٢} = ٣س^{٢}$$

الفصل الأول: المشتقة (المشتقة الأولى)

تدريب (٤): ص٨٥

تدريب ٤

إذا كان ق(س) = $\sqrt{٢س}$ ، س > ٠ ، فجد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة، ثم جد قَ(٨).

$$هـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{٢ع} - \sqrt{٢س}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{٢ع} - \sqrt{٢س}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{٢ع} + \sqrt{٢س}}{\sqrt{٢ع} + \sqrt{٢س}}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٢ع - ٢س}{(ع - س)\left(\sqrt{٢ع} + \sqrt{٢س}\right)} = \lim_{ع \to س} \frac{٢(ع - س)}{(ع - س)\left(\sqrt{٢ع} + \sqrt{٢س}\right)}$$

$$= \frac{٢}{\left(\sqrt{٢س} + \sqrt{٢س}\right)} = \frac{٢}{٢\sqrt{٢س}} = \frac{١}{\sqrt{٢س}}$$

$$هـ'(٨) = \frac{١}{\sqrt{١٦}} = \frac{١}{٤}$$

تدريب (٥): ص٨٥

تدريب ٥

إذا كان ق(س) = $\frac{١}{١ - ٣س}$ ، س ≠ $\frac{١}{٣}$ ، فجد قَ(س) باستخدام التعريف، ثم جد قَ($\frac{١}{٢}$).

$$هـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\frac{١}{١ - ٣ع} - \frac{١}{١ - ٣س}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{١ - ٣س - ١ + ٣ع}{(ع - س)(١ - ٣ع)(١ - ٣س)} = \lim_{ع \to س} \frac{٣ع - ٣س}{(ع - س)(١ - ٣ع)(١ - ٣س)}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٣(ع - س)}{(ع - س)(١ - ٣ع)(١ - ٣س)} = \lim_{ع \to س} \frac{٣}{(١ - ٣ع)(١ - ٣س)}$$

$$= \frac{٣}{(١ - ٣س)^{٢}}$$

$$هـ'(\frac{١}{٢}) = \frac{٣}{(١ - \frac{٣}{٢})^{٢}} = \frac{٣}{(-\frac{١}{٢})^{٢}} = \frac{٣}{\frac{١}{٤}}$$

$$= ٣ \times ٤ = ١٢$$

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الأول: المشتقة (المشتقة الأولى)

حل أسئلة نهاية الدرس (ص٨٦)

السؤال الأول: ص٨٦

١) إذا كان ص = ق(س)، وكان مقدار تغير الاقتران ق(س) هو س٢ هـ – ٢س هـ٢، فجد قَ(س).

$$\text{وهـ}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{وهـ}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{وهـ}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{س}^{2}\,\text{هـ} - 2\text{س}\text{هـ}^{2}}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{هـ}(\text{س}^{2} - 2\text{س}\text{هـ})}{\text{هـ}} = \text{س}^{2}$$

السؤال الثاني: ص٨٦

٢) إذا كان ص = ق(س)، وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران ق عندما تتغير س من س١ إلى س١ + هـ هو Δص = ٤س١ هـ + ٢هـ٢، فجد قيمة قَ(س١).

$$\text{وهـ}'(\text{س}) = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{وهـ}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{وهـ}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{4\text{س}\,\text{هـ} - 2\text{هـ}^{2}}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{هـ}(4\text{س} + 2\text{هـ})}{\text{هـ}} = 4\text{س}$$

السؤال الثالث: ص٨٦

٣) باستخدام تعريف المشتقة، جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

أ) ق(س) = ٦ ب) ق(س) = ٤ – ٥س

أ) $\text{وهـ}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{وهـ}(\text{ع}) - \text{وهـ}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{6 - 6}{\text{ع} - \text{س}} = \text{صفر}$$

ب) $\text{وهـ}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{وهـ}(\text{ع}) - \text{وهـ}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{4 - 5\text{ع} - (4 - 5\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{4 - 5\text{ع} - 4 + 5\text{س}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{5\text{س} - 5\text{ع}}{\text{ع} - \text{س}} = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{5(\text{س} - \text{ع})}{\text{ع} - \text{س}} = -5$$

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School"

الفصل الأول: المشتقة (المشتقة الأولى)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص٨٦)

السؤال الثالث: ص٨٦

٣) باستخدام تعريف المشتقة، جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

جـ) ص = س^{٢} − ٢س د) ق(س) = $\sqrt{٤س+٣}$

ج) $هـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^{٢} - ٢ع - (س^{٢} - ٢س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع^{٢} - ٢ع - س^{٢} + ٢س}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^{٢} - س^{٢} - ٢ع + ٢س}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع^{٢} - س^{٢}}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{٢س - ٢ع}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{٢(س - ع)}{ع - س} = ٢س - ٢$$

د) $هـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{٤ع+٣} - \sqrt{٤س+٣}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{٤ع+٣} - \sqrt{٤س+٣}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{٤ع+٣} + \sqrt{٤س+٣}}{\sqrt{٤ع+٣} + \sqrt{٤س+٣}}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٤ع + ٣ - (٤س + ٣)}{(ع - س)\left(\sqrt{٤ع+٣} + \sqrt{٤س+٣}\right)}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٤ع + ٣ - ٤س - ٣}{(ع - س)\left(\sqrt{٤ع+٣} + \sqrt{٤س+٣}\right)} = \lim_{ع \to س} \frac{٤ع - ٤س}{(ع - س)\left(\sqrt{٤ع+٣} + \sqrt{٤س+٣}\right)}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٤(ع - س)}{(ع - س)\left(\sqrt{٤ع+٣} + \sqrt{٤س+٣}\right)} = \frac{٤}{٢\sqrt{٤س+٣}}$$

$$= \frac{٢}{\sqrt{٤س+٣}}$$

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الأول: المشتقة (المشتقة الأولى)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص٨٦)

السؤال الثالث: ص٨٦

٣) باستخدام تعريف المشتقة، جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

هـ) ق(س) = $\frac{١}{-٢س}$ و) ص = $\frac{٢}{٣+٢س}$

ه) $ه'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ه(ع) - ه(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{\frac{-١}{ع٢} - \frac{-١}{٢س}}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{-٢س + ٢ع}{(ع - س)(ع٢)(٢س)} = \lim_{ع \to س} \frac{٢(ع - س)}{(ع - س)(ع٢)(٢س)}$

$= \frac{٢}{ع٤س^{٢}} = \frac{١}{٢س^{٢}}$

و) $ه'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ه(ع) - ه(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{\frac{٢}{٣+ع٢} - \frac{٢}{٣+٢س}}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{٤س - ٦ - ٤ع + ٦}{(ع - س)(ع٢ + ٣)(٢س + ٣)} = \lim_{ع \to س} \frac{٤س - ٤ع}{(ع - س)(ع٢ + ٣)(٢س + ٣)}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{٤(س - ع)}{(ع - س)(ع٢ + ٣)(٢س + ٣)} = \frac{-٤}{(٢س + ٣)(٢س + ٣)}$

$= \frac{-٤}{(٢س + ٣)^{٢}}$

السؤال الرابع: ص٨٦

٤) استخدم تعريف المشتقة الأولى عند نقطة في حساب مشتقة كل مما يأتي عند قيمة س المبينة إزاء كل منها:

أ) ق(س) = ٣س + ٦ ، س = -٢

أ) $ه'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ه(ع) - ه(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{٣ع + ٦ - (٣س + ٦)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{٣ع + ٦ - ٣س - ٦}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{٣ع - ٣س}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{٣(ع - س)}{ع - س} = ٣$ $ه'(-٢) = ٣$

الفصل الأول: المشتقة (المشتقة الأولى)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص٨٦)

السؤال الرابع: ص٨٦

٤) استخدم تعريف المشتقة الأولى عند نقطة في حساب مشتقة كل مما يأتي عند قيمة س المبينة إزاء كل منها:

ب) ص = ١ – س^{٢} ، س = ٤

جـ) ص = ٢س^{٣} – ٥س + ٤ ، س = ٠

ب)

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{١ - ع^{٢} - (١ - س^{٢})}{ع - س}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{١ - ع^{٢} - ١ + س^{٢}}{ع - س} = \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{س^{٢} - ع^{٢}}{ع - س}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{(س - ع)(س + ع)}{ع - س} = -٢س$$

$$\text{ومن}'(٤) = -٢ \times ٤ = -٨$$

ج)

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{٢ع^{٣} - ٥ع + ٤ - (٢س^{٣} - ٥س + ٤)}{ع - س}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{٢ع^{٣} - ٥ع + ٤ - ٢س^{٣} + ٥س - ٤}{ع - س}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{٥س - ٥ع + ٢ع^{٣} - ٢س^{٣}}{ع - س} = \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{٥(س - ع) + ٢(ع^{٣} - س^{٣})}{ع - س}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{٥(س - ع)}{ع - س} + \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{٢(ع^{٣} - س^{٣})}{ع - س}$$

$$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{٥(س - ع)}{ع - س} + \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{٢(ع - س)(ع^{٢} + عس + س^{٢})}{ع - س}$$

$$= -٥ + ٢(٣س^{٢}) \qquad \text{ومن}'(٠) = -٥$$

الفصل الأول: المشتقة (المشتقة الأولى)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص٨٦)

السؤال الرابع: ص٨٦

٤) استخدم تعريف المشتقة الأولى عند نقطة في حساب مشتقة كل مما يأتي عند قيمة س المبينة إزاء كل منها:

د) ص = $\sqrt{٢-٣س}$ ، س = ٢-

هـ) ص = $\frac{٢}{س-١}$ ، س = ٤

و) ق(س) = $\frac{٥}{٤+٣س}$ ، س = ١

د)

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{٢-٣ع} - \sqrt{٢-٣س}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{٢-٣ع} - \sqrt{٢-٣س}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{٢-٣ع} + \sqrt{٢-٣س}}{\sqrt{٢-٣ع} + \sqrt{٢-٣س}}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٢ - ٣ع - (٢ - ٣س)}{(ع - س)\left(\sqrt{٢-٣ع} + \sqrt{٢-٣س}\right)} = \lim_{ع \to س} \frac{٣س - ٣ع}{(ع - س)\left(\sqrt{٢-٣ع} + \sqrt{٢-٣س}\right)}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٣(س - ع)}{(ع - س)\left(\sqrt{٢-٣ع} + \sqrt{٢-٣س}\right)} = \frac{-٣}{٢\sqrt{٢-٣س}}$$

$$\text{فـ}'(-٢) = \frac{-٣}{٢\sqrt{٨}}$$

هـ)

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\frac{٢}{ع-١} - \frac{٢}{س-١}}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{٢س - ٢ - (٢ع - ٢)}{(ع - س)(ع - ١)(س - ١)} = \lim_{ع \to س} \frac{٢س - ٢ - ٢ع + ٢}{(ع - س)(ع - ١)(س - ١)}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٢(س - ع)}{(ع - س)(ع - ١)(س - ١)} = \frac{-٢}{(س - ١)^{٢}}$$

$$\text{فـ}'(٤) = \frac{-٢}{٩}$$

و)

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\frac{٥}{٤+٣ع} - \frac{٥}{٤+٣س}}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{٢٠ + ١٥س - (٢٠ + ١٥ع)}{(ع - س)(٤ + ٣ع)(٤ + ٣س)}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٢٠ + ١٥س - ٢٠ - ١٥ع}{(ع - س)(٤ + ٣ع)(٤ + ٣س)} = \lim_{ع \to س} \frac{١٥س - ١٥ع}{(ع - س)(٤ + ٣ع)(٤ + ٣س)}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{١٥(س - ع)}{(ع - س)(٤ + ٣ع)(٤ + ٣س)} = \frac{-١٥}{(٤ + ٣س)^{٢}}$$

$$\text{فـ}'(١) = \frac{-١٥}{٤٩}$$

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الثاني: قواعد الاشتقاق والمشتقات العليا (قواعد الاشتقاق)

تدريب (١): ص٨٩

١) $\text{هـ}'(س) = \frac{-٢}{٣} س^{\frac{-٥}{٣}}$

٢) $ص = س^{\frac{-١}{٢}}$ $ص' = \frac{-١}{٢} س^{\frac{-٣}{٢}}$

٣) $ص' = \frac{٥}{٣} \times -٦ س^{-٧}$ $ص' = -٣٠ س^{-٧}$

٤) $ص' = ١$

تدريب ١

جد المشتقة الأولى لكل من الاقترانات الآتية:

١) $ق(س) = -س^{\frac{٥}{٣}}$ ٢) $ص = \frac{١}{\sqrt{٧ س}}$

٣) $ص = \frac{٥}{٣} س^{-٦}$ ٤) $ص = س$

تدريب (٢): ص٩٠

١) $ص = ٢س - ٢س^{-١}$ $ص' = ٢ + ٢س^{-٢}$

٢) $ص = ٤س^{٣} - ٥ + س^{-١}$ $ص' = ١٢ س^{٢} - س^{-٢}$

تدريب ٢

جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

١) $ص = ٢س - \frac{٢}{س}$

٢) $ق(س) = ٤س^{٢} - ٥ + \frac{١}{س}$

تدريب (٣): ص٩٢

تدريب ٣

جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

١) $ص = (٣س^{٢} + ٧) \times (س^{-٥} + ٣)$

٢) $ق(س) = (٥ - ٣س)(٤س^{٣} + ١)$ عندما $س = ١$

٣) $ص = (٣س^{٢} - ٤)(س^{٢} - ١)$

١)

$$ص' = (٣س^{٢} + ٧)(-٥س^{-٦}) + (س^{-٥} + ٣)(٦س)$$

٢)

$$\text{هـ}'(س) = (٥ - ٣س)(١٢ س^{٢}) + (٤س^{٣} + ١)(-٣)$$

$$\text{هـ}'(١) = ٢ \times ١٢ + ٥ \times -٣ = ٢٤ - ١٥ = ٩$$

٣)

$$ص' = (٣س^{٢} - ٤)(٢س) + (س^{٢} - ١)(٦س)$$

الفصل الثاني: قواعد الاشتقاق والمشتقات العليا (قواعد الاشتقاق)

تدريب (٤): ص٩٤

تدريب ٤

جد $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$ في كل مما يأتي:

١) $ص = \frac{٢س + ٥}{٣ - س}$ ٢) $ص = \frac{س^{٢} - ٨}{س - ٢}$

٣) $ص = \frac{١ - ٣س}{٢}$ ٤) $ص = \frac{١١}{س^{٢} + ٦}$

١)

$$ص' = \frac{(٣ - س)(٢) - (٢س + ٥)(-١)}{(٣ - س)^{٢}}$$

$$ص' = \frac{٦ - ٢س - (-٢س - ٥)}{(٣ - س)^{٢}}$$

$$ص' = \frac{٦ - ٢س + ٢س + ٥}{(٣ - س)^{٢}} = \frac{١١}{(٣ - س)^{٢}}$$

٢)

$$ص = \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)}{(س - ٢)} \qquad ص = س^{٢} + ٢س + ٤$$

$$ص' = ٢س + ٢$$

٣)

$$ص' = \frac{-٣}{٢}$$

٤)

$$ص' = \frac{-١١ \times ٣س^{٢}}{(س^{٣} + ٦)^{٢}} \qquad ص' = \frac{-٣٣س^{٢}}{(س^{٣} + ٦)^{٢}}$$

تدريب (٥): ص٩٤

تدريب ٥

إذا كان ق(س) = س^{٢}(٢س – ٣) ، فجد قَ(س).

$$هـ(س) = ٢س^{٣} - ٣س^{٢}$$

$$هـ'(س) = ٦س^{٢} - ٦س$$

الفصل الثاني: قواعد الاشتقاق والمشتقات العليا (قواعد الاشتقاق)

حل أسئلة نهاية الدرس (ص٩٥)

السؤال الأول: ص٩٥

١) جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

أ) ق(س) = ٦ – ٢س^{٣}

ب) ق(س) = $-\frac{٣}{س}$

جـ) هـ(س) = ٢س$^{-٠.٥}$ + $\sqrt{س^{٣}}$ + س

د) ص = (س^{٢} – ٢س)(٣ – ٥س^{٤})

هـ) ص = $\frac{س^{٢}+١}{٢س-٣}$

و) ق(س) = $\frac{س}{٤-س^{٢}}$

ز) ق(س) = (س^{٢} + ٣س)(٢ – ٥س)

أ)

هـ$'$(س) = $-٦س^{٢}$

ب)

هـ(س) = $-٣س^{-١}$

هـ$'$(س) = $٣س^{-٢}$

ج)

هـ(س) = $٢س^{-٠.٥} + س^{\frac{٥}{٣}} + س$

هـ$'$(س) = $-س^{-١.٥} + \frac{٥}{٣}س^{\frac{٢}{٣}} + ١$

د)

ص $'$ = $(س^{٣} - ٢س)(-٠ ٢س^{٣}) + (٣ - ٥س^{٤})(٣س^{٢} - ٢)$

هـ)

ص $'$ = $\frac{(٢س-٣)(٢س) - (س^{٢}+١)(٢)}{(٢س-٣)^{٢}}$

ص $'$ = $\frac{٤س^{٢} - ٦س - ٢س^{٢} - ٢}{(٢س-٣)^{٢}}$

ص $'$ = $\frac{(٤س^{٢} - ٦س) - (٢س^{٢} + ٢)}{(٢س-٣)^{٢}}$

ص $'$ = $\frac{٢س^{٢} - ٦س - ٢}{(٢س-٣)^{٢}}$

و)

هـ$'$(س) = $\frac{(٤ - س^{٢})(١) - (س)(-٢س)}{(٤ - س^{٢})^{٢}}$

هـ$'$(س) = $\frac{٤ + س^{٢}}{(٤ - س^{٢})^{٢}}$

هـ$'$(س) = $\frac{(٤ - س^{٢} + ٢س^{٢})}{(٤ - س^{٢})^{٢}}$

ز)

هـ$'$(س) = $(س^{٣} + ٣س)(-٥) + (٢ - ٥س)(٣س^{٢} + ٣)$

الفصل الثاني: قواعد الاشتقاق والمشتقات العليا (قواعد الاشتقاق)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص٩٥)

السؤال الثاني: ص٩٥

٢) جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي عند قيم س المبينة إزاء كل منها:

أ) ص = ٥س^{٣} − ٢س^{٢} + ١ ، عندما س = −٣

ب) ص = س^{٢} + $\sqrt[٣]{س}$ ، عندما س = ١

جـ) ص = $\frac{-٣}{٢-س}$ ، عندما س = −٢

د) ق(س) = $\frac{٢س}{٥-٤س}$ ، عندما س = ١

هـ) ق(س) = (٤ − ٦س^{٢})(٢س + ١) ، عندما س = −٢

و) ق(س) = ٢س × (٣ − س^{٢}) + $\frac{٢}{س}$ ، عندما س = ١

أ)

ص′ = ١٥س^{٢} − ٤س

ص′ $\Big|_{س=-٣}$ = ١٥(−٣)^{٢} − ٤(−٣) = ٩×١٥ + ١٢

= ١٣٥ + ١٢ = ١٤٧

ب)

ص = س^{٣} + س$^{\frac{١}{٣}}$

ص′ = ٣س^{٢} + $\frac{١}{٣}$س$^{\frac{-٢}{٣}}$ ص′ = ٣س^{٢} + $\frac{١}{٣\sqrt{س^{٢}}}$ ص′ $\Big|_{س=١}$ = ٣ + $\frac{١}{٣}$ = $\frac{١٠}{٣}$

جـ)

ص′ = $\frac{-(-٣)\times(١-)}{(٢-س)^{٢}}$ ص′ = $\frac{-٣}{(٢-س)^{٢}}$ ص′ $\Big|_{س=-٢}$ = $\frac{-٣}{١٦}$

د)

هـ′(س) = $\frac{(٥-٤س)(٢)-(٢س)(-٤)}{(٥-٤س)^{٢}}$ هـ′(س) = $\frac{-١٠-٨س+٨س}{(٥-٤س)^{٢}}$

هـ′(س) = $\frac{١٠}{(٥-٤س)^{٢}}$ هـ′(١) = $\frac{١٠}{١}$ = ١٠

هـ)

هـ′(س) = (−٤ − ٦س^{٢})(٢) + (٢س + ١)(−١٢س)

هـ′(−٢) = (−٤ − ٢٤)×(٢) + (−٣)(٢٤)

هـ′(−٢) = −٢×٢٠ − ٧٢ = −٤٠ − ٧٢ = −١١٢

و)

هـ(س) = ٦س − ٢س^{٣} + ٢س$^{-١}$

هـ′(س) = ٦ − ٦س^{٢} − ٢س$^{-٢}$

هـ′(س) = ٦ − ٦س^{٢} − $\frac{٢}{س^{٢}}$ هـ′(١) = ٦ − ٦ − ٢ = −٢

الفصل الثاني: قواعد الاشتقاق والمشتقات العليا (قواعد الاشتقاق)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص٩٥)

السؤال الثالث: ص٩٥

٣) إذا علمت أن ق(س) = $\sqrt[٦]{\text{س}}$ ، فجد قيمة نهـــا $\frac{\text{ق}(١+\text{هـ})-\text{ق}(١)}{\text{هـ}}$.
هـ←٠

$$\text{وه}(\text{س}) = \text{س}^{\frac{١}{٦}}$$

$$\text{وه}'(\text{س}) = \frac{١}{٦}\text{س}^{\frac{-٥}{٦}}$$

$$\text{وه}'(\text{س}) = \frac{١}{٦\sqrt[٦]{\text{س}^{٥}}} \qquad \text{وه}'(١) = \frac{١}{٦}$$

السؤال الرابع: ص٩٥

٤) إذا كان ق(١) = ٤، قَ(١) = −٢، هـ(١) = −٢، هـَ(١) = ١ فجد:

أ) (ق × هـ)َ(١) ب) ((ق × هـ)(١))َ جـ) $(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}})$َ(١)

د) $(\frac{٣}{\text{هـ}})$َ(١) هـ) (ق + هـ)َ(١) و) (٣ق − ٢هـ)َ(١)

أ)

$$(\text{وه} \times \text{هـ})'(١) = \text{وه}(١) \times \text{هـ}'(١) + \text{هـ}(١) \times \text{وه}'(١)$$

$$= ٤ \times ١ + (-٢) \times (-٢) = ٤ + ٤ = ٨$$

ب)

$$((\text{وه} \times \text{هـ})(١))' = \left(\text{وه}(١) \times \text{هـ}'(١) + \text{هـ}(١) \times \text{وه}'(١)\right)'$$

$$= (٨)' = \text{صفر}$$

ج)

$$\left(\frac{\text{وه}}{\text{هـ}}\right)'(١) = \frac{\text{هـ}(١) \times \text{وه}'(١) - \text{وه}(١) \times \text{هـ}'(١)}{(\text{هـ}(١))^{٢}}$$

$$= \frac{-٢ \times -٢ - ٤ \times ١}{٤} = \frac{٤ - ٤}{٤} = \text{صفر}$$

د)

$$\left(\frac{٣}{\text{هـ}}\right)'(١) = \frac{-٣ \times \text{هـ}'(١)}{(\text{هـ}(١))^{٢}} = \frac{-٣ \times ١}{٤} = \frac{-٣}{٤}$$

ه)

$$(\text{وه} + \text{هـ})'(١) = \text{وه}'(١) + \text{هـ}'(١)$$

$$= ٤ + ١ = ٥$$

و)

$$(٣\text{وه} - ٢\text{هـ})'(١) = ٣\text{وه}'(١) - ٢\text{هـ}'(١)$$

$$= ٣ \times ٢ - ٢ \times ١ = ٦ - ٢ = -٨$$

الفصل الثاني: قواعد الاشتقاق والمشتقات العليا (قاعدة السلسلة)

تدريب (١): ص٩٨

تدريب ١

إذا كان ص = ع^{٢} + ٣ع ، ع = ٣ − ٢س^{٢} ، فجد $\left|\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س}=١}$.

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = (٢\text{ع} + ٣) \times (-٤\text{س})$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \left(٢(٣ - ٢\text{س}^{٢}) + ٣\right) \times (-٤\text{س})$$

$$\left|\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س}=١} = ٢ \times ١ + ٣ \times -٤ = ٥ \times -٤ = -٢٠$$

تدريب (٢): ص٩٩

تدريب ٢

إذا كان ص = (س^{٢} + ٤س + ٥)$^{-٢}$ ، فجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$.

ص = ع$^{-٢}$

ع = س^{٢} + ٤س + ٥

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \left(-٢\text{ع}^{-٣}\right) \times (٢\text{س} + ٤)$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \left(-٢(\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٥)^{-٣}\right) \times (٢\text{س} + ٤)$$

تدريب (٣): ص١٠٠

تدريب ٣

١) إذا كان ص = $\sqrt{\text{س}^{٢} - \text{س} + ٣}$ ، فجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$.

١)

ص = $\sqrt{\text{ع}}$

ع = س^{٢} − س + ٣

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{ع}}} \times (٢\text{س} - ١)$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{٢\text{س} - ١}{٢\sqrt{\text{س}^{٢} - \text{س} + ٣}}$$

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School"

الفصل الثاني: قواعد الاشتقاق والمشتقات العليا (قاعدة السلسلة)

تدريب (٣): ص١٠٠

تدريب ٣

٢) إذا كان ص = $\sqrt[٣]{٢-س}$ ، فجد $\frac{ود ص}{ود س}$.

٢)

$$ص = \sqrt[٣]{ع}$$

$$ع = ٢ - س$$

$$\frac{ود ص}{ود س} = \frac{ود ص}{ود ع} \times \frac{ود ع}{ود س}$$

$$\frac{ود ص}{ود س} = \frac{١}{٣\sqrt[٣]{ع^{٢}}} \times (-١)$$

$$\frac{ود ص}{ود س} = \frac{-١}{٣\sqrt[٣]{(٢-س)^{٢}}}$$

تدريب (٤): ص١٠٠

تدريب ٤

إذا كان ق(س) = $(٣س^{٢} + ٥)^{-٥}$ ، فجد قَ(س) .

$$ص = ع^{-٥}$$

$$ع = ٣س^{٢} + ٥$$

$$\frac{ود ص}{ود س} = \frac{ود ص}{ود ع} \times \frac{ود ع}{ود س}$$

$$\frac{ود ص}{ود س} = -٥ع^{-٦} \times (٦س)$$

$$\frac{ود ص}{ود س} = -٥(٣س^{٢} + ٥)^{-٦} \times (٦س)$$

$$\frac{ود ص}{ود س} = (-٣٠س)(٣س^{٢} + ٥)^{-٦}$$

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الثاني: قواعد الاشتقاق والمشتقات العليا (قاعدة السلسلة)

حل أسئلة نهاية الدرس (ص١٠١)

السؤال الأول: ص١٠١

١) جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

أ) $ص = \sqrt{ع + ١}$ ، $ع = ٤س^{٣} - ٩$

ب) $ص = ل^{٣}$ ، $ل = ٨س$ عندما $س = \frac{١}{٤}$

أ) $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{\sqrt{٢ع + ١}} \times (١٢ س^{٢})$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١٢ س^{٢}}{\sqrt{٢ع + ١}}$ $\frac{د ص}{د س} = \frac{٦ س^{٢}}{\sqrt{ع + ١}}$ $\frac{د ص}{د س} = \frac{٦ س^{٢}}{\sqrt{٤ س^{٣} - ٨}}$

ب) $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$\frac{د ص}{د س} = (٣ل^{٢}) \times (٨)$ $\frac{د ص}{د س} = ٢٤ (٨س)^{٢}$

$\frac{د ص}{د س}|_{س = \frac{١}{٤}} = ٢٤ (\frac{٨}{٤})^{٢} = ٢٤ \times ٤ = ٩٦$

السؤال الثاني: ص١٠١

٢) جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

أ) $ص = \sqrt{٢س^{٢} + ١}$

أ)

$ص = \sqrt{ع}$

$ع = ٢س^{٢} + ١$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{\sqrt{ع}} \times (٤س)$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٤س}{\sqrt{ع}}$ $\frac{د ص}{د س} = \frac{٢س}{\sqrt{٢س^{٢} + ١}}$

الفصل الثاني: قواعد الاشتقاق والمشتقات العليا (قاعدة السلسلة)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص١٠١)

السؤال الثاني: ص١٠١

٢) جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

ب) ق(س) = $(٣ + س^{٢})^{-٣}$

جـ) م(س) = $(٤س + ١)^{٢}$

د) ق(س) = $س^{٤}(٥ - ٥س^{٣})^{٢}$

هـ) ص = $(س + ٧س^{-٢})(٩ - ٥س)^{٤}$

ب)

$ص = ع^{-٣}$

$ع = ٣ + س^{٢}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$\frac{د ص}{د س} = (-٣ع^{-٤}) \times (٢س)$

$\frac{د ص}{د س} = -٦س(٣ + س^{٢})^{-٤}$

ج)

$ص = ع^{٣}$

$ع = ١ + ٤س$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

$\frac{د ص}{د س} = (٣ع^{٢}) \times (٤)$

$\frac{د ص}{د س} = ١٢(١ + ٤س)^{٢}$

د)

$هـ'(س) = س^{-٤} \times ٢(٥ - ٥س^{٣}) \times (-١٥س^{٢}) - (٥ - ٥س^{٣})^{٢}(-٤س^{-٥})$

ه)

$ص' = (س + ٧س^{-٢}) \times ٤(٩ - ٥س)^{٣} \times -٥ + (٩ - ٥س)^{٤}(١ - ١٤س^{-٣})$

الفصل الثاني: قواعد الاشتقاق والمشتقات العليا (قاعدة السلسلة)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص١٠١)

السؤال الثالث: ص١٠١

٣) جد صَ لكل مما يأتي عند قيمة س المبينة إزاء كل منها:

أ) ص = $\sqrt{٥ + ٣س^{٢}}$ ، س = ٠

ب) ص = $-٥(١ - ٣س^{٢})^{-٢}$ ، س = -١

جـ) ص = $(س^{٢} - ٣)(٢ - ٤س^{٣})^{٢}$ ، س = ١

د) ص = $م^{٢} + ٣م - ٢$ ، م = $٤س^{٢}$ ، س = ٢

أ)

$$ص = \sqrt[ع]{}$$

$$ع = ٥ + ٣س^{٢}$$

$$\frac{ود ص}{ود س} = \frac{ود ص}{ود ع} \times \frac{ود ع}{ود س}$$

$$\frac{ود ص}{ود س} = \frac{١}{ع\sqrt{٢}} \times (٦س) \qquad \frac{ود ص}{ود س} = \frac{٦س}{ع\sqrt{٢}}$$

$$\frac{ود ص}{ود س} = \frac{٣س}{\sqrt{٥ + ٣س^{٢}}} \qquad \frac{ود ص}{ود س}\Big|_{س=٠} = \frac{٠}{\sqrt{٥}} = \text{صفر}$$

ب)

$$ص = -٥ع^{-٢}$$

$$ع = ١ - ٣س^{٣}$$

$$\frac{ود ص}{ود س} = \frac{ود ص}{ود ع} \times \frac{ود ع}{ود س}$$

$$\frac{ود ص}{ود س} = (١٠ع^{-٣}) \times (٩س^{٢}) \qquad \frac{ود ص}{ود س} = ٩٠س^{٢}(١ - ٣س^{٣})^{-٣}$$

$$\frac{ود ص}{ود س}\Big|_{س=-١} = ٩٠ \times (٤)^{-٣} = \frac{-٩٠}{٦٤}$$

ج)

$$ص' = (س^{٢} - ٣) \times ٢(٢ - ٤س^{٣}) \times -١٢س^{٢} + (٢ - ٤س^{٣})^{٢}(٢س)$$

$$ص'|_{س=١} = -٢ \times -٤ \times -١٢ + ٤ \times ٢ = -٩٦ + ٨ = -٨٨$$

د)

$$ص' = (٢ + ٣) \times (٨س) \qquad ص' = (٢)(٤س^{٢}) + ٣) \times (٨س)$$

$$ص'|_{س=٢} = (٣ + ٣٢) \times ١٦ = ٣٥ \times ١٦ = ٥٦٠$$

الفصل الثاني: قواعد الاشتقاق والمشتقات العليا (مشتقات الاقترانات المثلثية)

تدريب (١): ص١٠٣

١)

$$ص' = \frac{-٢\times-جاس}{جتا^{٢}س} + قا^{٢}س + ٢$$

$$ص' = \frac{٢جاس}{جتا^{٢}س} + قا^{٢}س + ٢$$

٢)

$$ص' = جتاس \times قا^{٢}س + ظاس \times -جاس$$

$$ص' = جتاس قا^{٢}س - جاس ظاس$$

٣)

$$ص' = جاس \times -جاس + جتاس جتاس$$

$$ص' = جتا^{٢}س - جا^{٢}س$$

٤)

$$ص' = س^{٢} قا^{٢}س + ظاس \times ٢س$$

$$ص' = س^{٢} قا^{٢}س + ٢س ظاس$$

تدريب ١

جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

١) $ص = \frac{٢}{جتاس} + ظاس + ٢س$.

٢) $ص = جتاس ظاس$.

٣) $ص = جاس جتاس$.

٤) $ص = س^{٢} ظاس$.

تدريب (٢): ص١٠٥

١)

$$ص = (ظاس)^{٣}$$

$$ص' = ٣(ظاس)^{٢} \times قا^{٢}س$$

$$ص' = ٣ظا^{٢}س قا^{٢}س$$

٢)

$$ص = ٢جتا(٤س) + (جاس)^{٢} - ظا(٥س - ١)$$

$$ص' = ٢\times -جا(٤س)\times ٤ + ٢(جاس)\times جتاس - قا^{٢}(٥س - ١)\times ٥$$

$$ص' = -٨جا٤س + ٢جاس جتاس - ٥قا^{٢}(٥س - ١)$$

تدريب ٢

جد $\frac{ع ص}{ع س}$ لكل مما يأتي:

١) $ص = ظا^{٣}س$.

٢) $ص = ٢جتا٤س + جا^{٢}س - ظا(٥س + ١)$.

الفصل الثاني: قواعد الاشتقاق والمشتقات العليا (مشتقات الاقترانات المثلثية)

تدريب (٣): ص١٠٦

تدريب ٣

إذا كان ق(س) = ظا(س٢ + ٥)، فجد قَ(س).

$$\text{هـ}'(س) = \text{قا}^{٢}(س^{٢}+٥) \times ٢س$$

$$\text{هـ}'(س) = ٢س\,\text{قا}^{٢}(س^{٢}+٥)$$

حل أسئلة نهاية الدرس (ص١٠٧)

السؤال الأول: ص١٠٧

جد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يأتي:

أ) ص = س٢جاس.

ب) ص = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}+١}$.

جـ) ص = ٥س٢ جتاس – ظاس.

د) ص = س ظاس + (س٢ + ١).

أ)

$$ص' = س^{٢} \times \text{جتاس} + \text{جاس} \times ٢س$$

$$ص' = س^{٢}\,\text{جتاس} + ٢س\,\text{جاس}$$

ب)

$$ص' = \frac{(\text{جتاس}+١) \times \text{جتاس} - \text{جاس} \times -\text{جاس}}{(\text{جتاس}+١)^{٢}}$$

$$ص' = \frac{\text{جتا}^{٢}س + \text{جتاس} - \text{جا}^{٢}س}{(\text{جتاس}+١)^{٢}}$$

ج)

$$ص' = ٥س^{٢} \times -\text{جاس} + \text{جتاس} \times ١٠س - \text{قا}^{٢}س$$

$$ص' = ١٠س\,\text{جتاس} - ٥س^{٢}\,\text{جاس} - \text{قا}^{٢}س$$

د)

$$ص' = س \times \text{قا}^{٢}س + \text{ظاس} \times ١ + ٢(س^{٢}+١) \times ٢س$$

$$ص' = س\,\text{قا}^{٢}س + \text{ظاس} + ٤س(س^{٢}+١)$$

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الثاني: قواعد الاشتقاق والمشتقات العليا (مشتقات الاقترانات المثلثية)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص١٠٧)

جد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يأتي:

هـ) هـ(س) = ظا^{٣} ٣س + جتاس.

و) ص = (جتا٢س)^{٦}.

ز) ص = جا(٣س + ٥).

ح) ص = ٣جا٤س – جتا^{٣}س – ظا٢س^{٢}.

السؤال الأول: ص١٠٧

ه)

$$هـ(س) = ظا(٣س)^{٢} + جتاس$$

$$هـ'(س) = ٢ظا(٣س) \times قا^{٢}(٣س) \times ٣ + -جاس$$

$$هـ'(س) = ٦ظا٣س قا^{٢}٣س - جاس$$

و)

$$ص = (جتا(٢س))^{٦}$$

$$ص' = ٦(جتا(٢س))^{٥} \times -جا(٢س) \times ٢$$

$$ص' = -٢ ١جتا^{٥}٢س جا٢س$$

ز)

$$ص' = جتا(٣س + ٥) \times ٣$$

$$ص' = ٣جتا(٣س + ٥)$$

ح)

$$ص = ٣جا(٤س) - (جتاس)^{٣} - ظا(٢س^{٢})$$

$$ص' = ٣ \times جتا(٤س) \times ٤ - ٣(جتاس)^{٢} \times -جاس - قا^{٢}(٢س^{٢}) \times ٤س$$

$$ص' = ٢ ١جتا٤س + ٣جتا^{٢}س جاس - ٤س قا^{٢}٢س^{٢}$$

الفصل الثاني: قواعد الاشتقاق والمشتقات العليا (مشتقات الاقترانات المثلثية)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص١٠٧)

جد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يأتي:

ط) ص = (جاس – جتاس)$^{-٢}$.

ي) ص = جا^{٢}س (١ – جتاس).

ك) ص = (س جاس)^{٣} ظاس.

السؤال الأول: ص١٠٧

ط)

$$ص' = -٢(جاس - جتاس)^{-٣} \times (جتاس - -جاس)$$

$$ص' = -٢(جاس - جتاس)^{-٣} \times (جتاس + جاس)$$

ي)

$$ص = (جاس)^{٢}(١ - جتاس)$$

$$ص' = (جا^{٢}س) \times جاس + (١ - جتاس) \times ٢(جاس) \times جتاس$$

$$ص' = جا^{٣}س + ٢جاس جتاس(١ - جتاس)$$

ك)

$$ص' = (س جاس)^{٣} \times قا^{٢}س + ظاس \times ٣(س جاس)^{٢}(س جتاس + جاس)$$

$$ص' = قا^{٢}س(س جاس)^{٣} + ٣ظاس(س جاس)^{٢}(س جتاس + جاس)$$

حل أسئلة نهاية الوحدة الثانية (التفاضل)

السؤال الأول: ص١١٢

١) إذا كان ق(س) = $\frac{١}{س^{٢}}$، وتغيرت س من $س_{١}$ = ١ إلى $س_{٢}$ = ٢، فجد:

أ) مقدار التغير في الاقتران ق.

ب) معدل التغير في الاقتران ق.

أ)

$$\Delta ص = ق(س_{٢}) - ق(س_{١})$$

$$\Delta ص = ق(٢) - ق(١) = \frac{١}{٤} - ١ = \frac{-٣}{٤}$$

ب)

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_{٢}) - ق(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{ق(٢) - ق(١)}{٢ - ١} = \frac{\frac{-٣}{٤}}{١} = \frac{-٣}{٤}$$

السؤال الثاني: ص١١٢

٢) إذا كان ق(س) = $\frac{أ}{س + ٢}$ ، وكان معدل تغير الاقتران ق يساوي (−١) عندما تتغير س من صفر إلى ٣ ، فجد قيمة الثابت أ.

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_{٢}) - ق(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}}$$

$$-١ = \frac{ق(٣) - ق(٠)}{٣ - ٠} \qquad -١ = \frac{\frac{أ}{٥} - \frac{أ}{٢}}{٣}$$

$$-١ = \frac{أ٥ - أ٢}{٣ \times ٥ \times ٢} \qquad -١ = \frac{-أ٣}{٣٠} \qquad -٣٠ = -أ٣ \qquad أ = ١٠$$

السؤال الثالث: ص١١٢

٣) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = $ن^{٢}$ + ٤ن. احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [١، ٥].

$$\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_{٢}) - ف(ن_{١})}{ن_{٢} - ن_{١}} = \frac{ف(٥) - ف(١)}{٤} = \frac{٤٥ - ٥}{٤} = \frac{٤٠}{٤} = ١٠ \text{ م/ث}$$

السؤال الرابع: ص١١٢

٤) إذا كان ص = ق(س)، وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران ق عندما تتغير س من (س) إلى (س + هـ) هو: Δ ص = ٥$س^{٢}$ هـ + ٨س $هـ^{٢}$، فجد قَ(٢).

$$ق'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٥س^{٢} هـ + ٨س هـ^{٢}}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(٥س^{٢} + ٨س هـ)}{هـ} = ٥س^{٢}$$

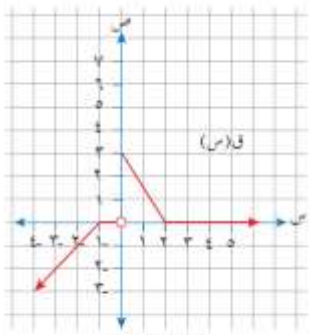
$$ق'(٢) = ٥ \times ٤ = ٢٠$$

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School"

تابع حل أسئلة نهاية الوحدة الثانية (التفاضل)

السؤال الخامس: ص١١٢

٥) اعتمادًا على الشكل (٢-٥) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، جد كلًّا مما يأتي:
أ) قيم س التي تجعل الاقتران ق غير متصل.
ب) معدل التغير للاقتران ق في الفترة [٢، ٤].



الشكل (٢-٥).

أ) س = ٠

ب)

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(س_٢) - هـ(س_١)}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{هـ(٤) - هـ(٢)}{٤ - ٢} = \frac{٠}{٢} = \text{صفر}$$

السؤال السادس: ص١١٢

٦) جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي باستخدام تعريف المشتقة:
أ) ق(س) = ٣ – ٥س
ب) هـ(س) = ٢س^{٢} + ١

أ) $هـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٣ - ٥ع - (٣ - ٥س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٣ - ٥ع + ٣ ٥س}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{٥س - ٥ع}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٥(س - ع)}{ع - س} = -٥$$

ب) $هـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٢ع^{٢} + ١ - (٢س^{٢} + ١)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٢ع^{٢} + ١ - ٢س^{٢} - ١}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{٢ع^{٢} - ٢س^{٢}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٢(ع^{٢} - س^{٢})}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{٢(ع - س)(ع + س)}{ع - س} = ٢(٢س) = ٤س$$

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School"

تابع حل أسئلة نهاية الوحدة الثانية (التفاضل)

السؤال السادس: ص١١٢ + ص١١٣

٦) جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي باستخدام تعريف المشتقة:

جـ) ل(س) = $\frac{١}{س+٢}$ ، حيث س ≠ −٢

د) م(س) = $\sqrt{٢س+٤}$ ، حيث س ≤ −٢

هـ) ق(س) = س٢ − ٤س ، عندما س = ٣

ج) $ل'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ه(ع) - ه(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{\frac{١}{ع+٢} - \frac{١}{س+٢}}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{س + ٢ - ع - ٢}{(ع - س)(ع + ٢)(س + ٢)} = \lim_{ع \to س} \frac{س - ع}{(ع - س)(ع + ٢)(س + ٢)}$

$= \frac{-١}{(س + ٢)^{٢}}$

د) $م'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ه(ع) - ه(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{٢ع + ٤} - \sqrt{٢س + ٤}}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{٢ع + ٤} - \sqrt{٢س + ٤}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{٢ع + ٤} + \sqrt{٢س + ٤}}{\sqrt{٢ع + ٤} + \sqrt{٢س + ٤}}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{(٢ع + ٤) - (٢س + ٤)}{(ع - س)\left(\sqrt{٢ع + ٤} + \sqrt{٢س + ٤}\right)} = \lim_{ع \to س} \frac{٢ع + ٤ - ٢س - ٤}{(ع - س)\left(\sqrt{٢ع + ٤} + \sqrt{٢س + ٤}\right)}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{٢(ع - س)}{(ع - س)\left(\sqrt{٢ع + ٤} + \sqrt{٢س + ٤}\right)} = \frac{٢}{\sqrt{٢س + ٤} \cdot ٢} = \frac{١}{\sqrt{٢س + ٤}}$

هـ) $ه'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ه(ع) - ه(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^{٢} - ٤ع - (س^{٢} - ٤س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^{٢} - ٤ع - س^{٢} + ٤س}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع^{٢} - س^{٢} + ٤س - ٤ع}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{٤(س - ع)}{ع - س} = ٢س - ٤$

$ه'(٣) = ٢ \times ٣ - ٤ = ٦ - ٤ = ٢$

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

تابع حل أسئلة نهاية الوحدة الثانية (التفاضل)

السؤال السادس: ص١١٣

٦) جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي باستخدام تعريف المشتقة:

و) ق(س) = $\sqrt{٢س - ٣}$ ، حيث س ≤ $\frac{٣}{٢}$ ، عندما س = ٢

و) $هـ'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{٢ع - ٣} - \sqrt{٢س - ٣}}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{٢ع - ٣} - \sqrt{٢س - ٣}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{٢ع - ٣} + \sqrt{٢س - ٣}}{\sqrt{٢ع - ٣} + \sqrt{٢س - ٣}}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{(٢ع - ٣) - (٢س - ٣)}{(ع - س)\left(\sqrt{٢ع - ٣} + \sqrt{٢س - ٣}\right)}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{٢ع - ٣ - ٢س + ٣}{(ع - س)\left(\sqrt{٢ع - ٣} + \sqrt{٢س - ٣}\right)}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{٢(ع - س)}{(ع - س)\left(\sqrt{٢ع - ٣} + \sqrt{٢س - ٣}\right)} = \frac{٢}{٢\sqrt{٢س - ٣}} = \frac{١}{\sqrt{٢س - ٣}}$

$هـ'(٢) = \frac{١}{\sqrt{٤ - ٣}} = \frac{١}{١} = ١$

السؤال السابع: ص١١٣

٧) جد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يأتي:

أ) ص = $\sqrt{س^٣ + ٥س^٢}$

ب) ص = $\sqrt{ع + ١}$ ، ع = ١ − ٢س ، حيث ع ≤ −١

أ)

$ص' = \frac{٣س^٢ + ١٠س}{٢\sqrt{س^٣ + ٥س^٢}}$

ب)

$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س}$

$\frac{ص}{س} = -٢ \times \frac{١}{٢\sqrt{ع + ١}}$

$\frac{ص}{س} = \frac{-١}{\sqrt{ع + ١}}$

$\frac{ص}{س} = \frac{-١}{\sqrt{-٢س + ١}}$

$\frac{ص}{س} = \frac{-٢}{٢\sqrt{ع + ١}}$

$\frac{ص}{س} = \frac{-١}{\sqrt{-١ - ٢س + ١}}$

تابع حل أسئلة نهاية الوحدة الثانية (التفاضل)

السؤال السابع: ص١١٣

٧) جد $\frac{ص}{س}$ لكل مما يأتي:

جـ) ص = س^{٢} جا٣س

د) ص = $\frac{٨}{٢س-٣}$ − جا^{٥}٢س

هـ) ص = م^{٣} − ٢م + ١ ، م = ٢س + ٣ ، عندما س = ٠

و) ص = $\sqrt[٤]{٢ + ٣جتاس}$

ج)

$$ص = س^{٢} جا(٣س)$$

$$ص' = س^{٢} \times جتا(٣س) \times ٣ + جا٣س \times ٢س$$

$$ص' = ٣س^{٢} جتا٣س + ٢س جا٣س$$

د)

$$ص = \frac{٨}{٢س-٣} - (جا(٢س))^{٥}$$

$$ص' = \frac{-٨ \times ٢}{(٢س-٣)^{٢}} - ٥(جا(٢س))^{٤} \times جتا(٢س) \times ٢$$

$$ص' = \frac{-١٦}{(٢س-٣)^{٢}} - ١٠ جا^{٤}٢س جتا٢س$$

ه)

$$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{م} \times \frac{م}{س}$$

$$\frac{ص}{س} = ٦(م-٢) \times ٢$$

$$\frac{ص}{س} = ٦[(٢س+٣)-٢] \times ٢$$

$$\frac{ص}{س}\Big|_{س=٠} = ٦[٣ \times ٠ - ٢] \times ٢ = ١٦ \times ٢ = ٣٢$$

و)

$$ص' = \frac{٣ \times -جاس}{\sqrt[٤]{٢ + ٣جتاس}} = \frac{-٣جاس}{\sqrt[٤]{٢ + ٣جتاس}}$$

السؤال الثامن: ص١١٣(محذوف)

السؤال التاسع: ص١١٣

٩) إذا كان ق(س) = (٥س − ١)^{٣}، فجد نهـــا $_{هـ \to ٠}$ $\frac{ق(هـ+١) - ق(١)}{هـ}$.

$$ق(س) = (٥س-١)^{٣}$$

$$ق'(س) = ٣(٥س-١)^{٢} \times ٥$$

$$= ١٥(٥س-١)^{٢}$$

$$ق'(١) = ١٥ \times ١٦ = ٢٤٠$$

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School"

تابع حل أسئلة نهاية الوحدة الثانية (التفاضل)

السؤال العاشر: ص١١٣(محذوف)

السؤال الحادي عشر: ص١١٣(محذوف)

السؤال الثاني عشر: ص١١٤(محذوف)

السؤال الثالث عشر: ص١١٤

١٣) إذا كان هـ اقترانًا قابلًا للاشتقاق عندما س = −٢، هـ(−٢) = ١ ، هـ′(−٢) = ٢، فجد ق′(−٢) في كل مما يأتي:

أ) ق(س) = $\sqrt{س+٦}$ × هـ(س).

ب) ق(س) = هـ(س) − $\frac{هـ(س)}{س}$.

أ)

$$ه'(س) = \sqrt{س+٦} \times هـ'(س) + هـ(س) \times \frac{١}{٢\sqrt{س+٦}}$$

$$ه'(-٢) = ٢ \times هـ'(-٢) + \frac{١}{٤} \times (-٢)$$

$$= ٢ \times ٢ + \frac{١}{٤} \times ١ + = ٤ + \frac{١}{٤} = \frac{١٧}{٤}$$

ب)

$$ه'(س) = هـ'(س) - \frac{س \times هـ'(س) - هـ(س) \times ١}{س^{٢}}$$

$$ه'(-٢) = هـ'(-٢) - \frac{-٢ \times ٢ - ١ \times ١}{٤}$$

$$= -٢ - \frac{-٤-١}{٤} = -٢ - \frac{-٥}{٤}$$

$$= ٢ + \frac{٥}{٤} = \frac{٨+٥}{٤} = \frac{١٣}{٤}$$

السؤال الرابع عشر: ص١١٤

١٤) يتكون هذا السؤال من تسع فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربعة بدائل، واحد منها فقط صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) إذا علمت أن ق(س) = ٤ − ٣س، وتغيرت قيمة س من ٣ إلى ٥، فإن Δس هي:

أ) −٦ ب) −٢ جـ) ٢ د) ٣

(٢) إذا كان ص = ق(س) = س٢، وتغيرت قيمة س من س١ = ٢ إلى س٢ = ٤، فإن مقدار التغير في ص يساوي:

أ) −١٢ ب) ٢ جـ) ٦ د) ١٢

(٣) إذا كان ق(س) = جا٣س، فإن نهـــا $_{هـ \to ٠}$ $\frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$ تساوي:

أ) −جتا٣س ب) ٣جتا٣س جـ) ٣جا٣س د) جتا٣س

١)

$$\Delta س = س_{٢} - س_{١} = ٥ - ٣ = ٢$$ **(الجواب الفرع ج)**

٢)

$$\Delta ص = ه(س_{٢}) - ه(س_{١})$$

$$\Delta ص = ه(٤) - ه(٢) = ١٦ - ٤ = ١٢$$ **(الجواب الفرع د)**

٣)

$$ه'(س) = جتا(٣س) \times ٣$$ $$ه'(س) = ٣جتا٣س$$ **(الجواب الفرع ب)**

تابع حل أسئلة نهاية الوحدة الثانية (التفاضل)

السؤال الرابع عشر: ص١١٤+ ص١١٥

٤)

$$\text{هـ}'(س) = \frac{-٣ \times ١}{س^{٢}}$$

$$\text{هـ}'(٣) = \frac{-٣}{٩} = \frac{-١}{٣}$$ **(الجواب الفرع ب)**

٥)

$$\text{هـ}'(س) = ٣س^{٢}$$

$$\text{هـ}'(٢) = ٣ \times ٤ = ١٢$$ **(الجواب الفرع أ)**

٦)

$$\text{هـ}'(س) = جـ^{٢}$$ **(الجواب الفرع ج)**

٧)

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{\text{هـ}(س_{٢}) - \text{هـ}(س_{١})}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{\text{هـ}(٢) - \text{هـ}(-١)}{٢ - -١}$$

$$= \frac{١٢ - ٣}{٣} = \frac{٩}{٣} = ٣$$ **(الجواب الفرع ب)**

٨)

$$(\text{هـ} \times \text{ه})'(١) = \text{هـ}(١) \times \text{ه}'(١) + \text{ه}(١) \times \text{هـ}'(١)$$

$$= ٢ \times ١ + ٣ \times -٢ = ٢ - ٦ = -٤$$ **(الجواب الفرع د)**

٩)

$$\text{هـ}'(س) = س^{٢} \times \text{ه}'(س) + \text{ه}(س) \times ٢س$$

$$= ٩ \times ٥ + ٦ \times ٦ = ٤٥ + ٣٦ = ٨١$$ **(الجواب الفرع أ)**

١٤) يتكون هذا السؤال من تسع فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربعة بدائل، واحد منها فقط صحيح. ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(٤) إذا كان ق(س) = $\frac{٣}{س}$، فإن قَ(٣) تساوي:

أ) -١ ب) $\frac{-١}{٣}$ جـ) $\frac{-١}{٩}$ د) ١

(٥) إذا كان ق (س) = $س^{٢} + ٨$، فإن $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٢+هـ) - ق(٢)}{هـ}$ تساوي:

أ) ١٢ ب) ٨ جـ) ١٦ د) ٢٠

(٦) إذا كان ق (س) = $جـ^{٣}س$، وكان جـ عددًا ثابتًا، فإن قَ(س) تساوي:

أ) $٢جـ^{٣}س$ ب) $٢جـ$ جـ) $جـ^{٣}$ د) ٢س

(٧) إذا كان ق (س) = $٣س^{٢}$، فإن ميل القاطع المار بالنقطتين: (-٣،١)، (١٢،٢) يساوي:

أ) $\frac{-١}{٣}$ ب) ٣ جـ) -٣ د) $\frac{١}{٣}$

(٨) إذا كان ق(١) = ٢، هـ(١) = ٣، قَ(١) = -٢، هـَ(١) = ١، فإن (ق × هـ)َ(١) يساوي:

أ) ٨ ب) ٤ جـ) -٨ د) -٤

(٩) إذا كان هـ(س) = $س^{٢}$ × ق(س)، ق(٣) = ٦، قَ(٣) = ٥، فإن هـَ(٣) تساوي:

أ) ٨١ ب) ١١ جـ) ٤٥ د) ٣٦

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School"

الوحدة الثالثة: تطبيقات التفاضل
حل جميع أسئلة وتدريبات الكتاب
لطلاب التخصص الأدبي والفندقي

إعداد/ مروان ابوديه

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School" 0797-55-27-27

الفصل الأول: التفسير الهندسي والفيزيائي للمشتقة (التفسير الهندسي)

تدريب (١): ص١١٩

تدريب ١

إذا كان ق(س) = س^{٢} – ٣س، فجد ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (٢، –٢).

$$\text{ه}'(\text{س}) = ٢\text{س} - ٣$$
$$\text{ه}'(٢) = ٢ \times ٢ - ٣ = ٤ - ٣ = ١$$

تدريب (٢): ص١٢٠

تدريب ٢

إذا كان ق(س) = (س^{٢} + ١)^{٢}، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = ١

$$\text{س}_{١} = ١$$
$$\text{ص}_{١} = \text{ه}(١) = ٢^{٢} = ٤$$
$$\text{ه}'(\text{س}) = ٢(\text{س}^{٢} + ١) \times ٢\text{س}$$
$$\text{ه}'(١) = ٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$$

معادلة المماس هي ص – ص$_{١}$ = م(س – س$_{١}$)

ص – ٤ = ٨(س – ١)

ص – ٤ = ٨س – ٨

ص = ٨س – ٤

حل أسئلة نهاية الدرس (ص١٢١)

السؤال الأول: ص١٢١

١) جد معادلة المماس لكل من المنحنيات الآتية عند قيم س المبينة إزاء كل منها:

أ) ق(س) = ٣س + ٥ ، س = ٢

أ)

$$\text{س}_{١} = ٢$$
$$\text{ص}_{١} = \text{ه}(٢) = ٣ \times ٢ + ٥ = ١١$$
$$\text{ه}'(\text{س}) = ٣$$
$$\text{ه}'(٢) = ٣$$

معادلة المماس هي ص – ص$_{١}$ = م(س – س$_{١}$)

ص – ١١ = ٣(س – ٢)

ص = ٣س – ٦ + ١١

ص = ٣س + ٥

الفصل الأول: التفسير الهندسي والفيزيائي للمشتقة (التفسير الهندسي)

حل أسئلة نهاية الدرس (ص١٢١)

السؤال الأول: ص١٢١

١) جد معادلة المماس لكل من المنحنيات الآتية عند قيم س المبينة إزاء كل منها:

ب) ق(س) = س^{٢} + ٣س – ١ ، س = ١

جـ) ق(س) = (٢س – ٤)(س^{٢} + ١) ، س = صفرًا

ب)

$س_{١} = ١$

$ص_{١} = ه(١) = ١ + ٣ - ١ = ٣$

$ه'(س) = ٢س + ٣$

$ه'(١) = ٢ + ٣ = ٥$

معادلة المماس هي $ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$ص - ٣ = ٥(س - ١)$

$ص = ٥س - ٥ + ٣$

$ص = ٣س - ٢$

ج)

$س_{١} = ٠$

$ص_{١} = ه(٠) = -٤ \times ١ = -٤$

$ه'(س) = (٢س - ٤) \times ٢س + (س^{٢} + ١) \times ٢$

$ه'(٠) = -٤ \times ٠ + ١ \times ٢ = ٠ + ٢ = ٢$

معادلة المماس هي $ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$ص + ٤ = ٢(س - ٠)$

$ص = ٢س - ٤$

الفصل الأول: التفسير الهندسي والفيزيائي للمشتقة (التفسير الهندسي)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص١٢١)

السؤال الثاني: ص١٢١

٢) إذا كان ق(س) = $\frac{٢س+٢}{س^{٢}+١}$ ، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = ١

$س_{١} = ١$

$ص_{١} = هـ(١) = \frac{٢+٢}{٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$

$$هـ'(س) = \frac{(٢س)\times(٢+٢س)-٢\times(س^{٢}+١)}{(س^{٢}+١)^{٢}}$$

$$هـ'(١) = \frac{٢\times٤-٢\times٢}{٤} = \frac{٨-٤}{٤} = \frac{-٤}{٤} = -١$$

معادلة المماس هي $ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$ص - ٢ = -١(س - ١)$

$ص = -س + ١ + ٢$

$ص = ٣ - س$

السؤال الثالث: ص١٢١

٣) إذا كان ق(س) = أس^{٢} + ٤س – ٣، حيث أ عدد ثابت، وكان ميل المنحنى عندما س = ٣ يساوي ٢٢، فجد قيمة الثابت أ.

$هـ'(س) = ٢أس + ٤$

$هـ'(٣) = ٦أ + ٤$

$٦أ + ٤ = ٢٢ \qquad ٦أ = ١٨ \qquad أ = ٣$

السؤال الرابع: ص١٢١

٤) إذا كان ق(س) = س^{٥} + ٤س^{٢}، فجد ميل المنحنى للاقتران ق عندما س = ١

$هـ'(س) = ٥س^{٤} + ٨س$

$هـ'(١) = ٥ + ٨ = ١٣$

الفصل الأول: التفسير الهندسي والفيزيائي للمشتقة (التفسير الهندسي)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص١٢١)

السؤال الخامس: ص١٢١

٥) إذا كان ق(س) = (٣س^{٢} – ٢)^{٤}، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (–١، ق(–١)).

$س_{١} = -١$

$ص_{١} = ق(-١) = ١$

$ق'(س) = ٤(٣س^{٢} - ٢)^{٣} \times ٦س$

$ق'(س) = ٢٤س(٣س^{٢} - ٢)^{٣}$

$ق'(-١) = -٢٤ \times ١ = -٢٤$

معادلة المماس هي $ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$ص - ١ = -٢٤(س + ١)$

$ص = -٢٤س - ٢٥$

الفصل الأول: التفسير الهندسي والفيزيائي للمشتقة (التفسير الفيزيائي)

تدريب (١): ص١٢٣

تدريب ١

إذا تحرك جسيم بحيث كان بُعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية معطى بالعلاقة: ف(ن) = ٣ن^{٢} − ٣ن + ٢، فاحسب سرعة الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

ف(ن) = ٣ن^{٢} − ٣ن + ٢

ع(ن) = ٦ن − ٣

ت(ن) = ٦

ع(٢) = ٦×٢ − ٣ = ١٢ − ٣ = ٩ م/ث

تدريب (٢): ص١٢٣

تدريب ٢

يتحرك جسيم وفق العلاقة: ف(ن) = ٢ن^{٣} + ٤ن^{٢} + ٦، حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار، ن الزمن بالثواني. جد تسارع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

ف(ن) = ٢ن^{٣} + ٤ن^{٢} + ٦

ع(ن) = ٦ن^{٢} + ٨ن

ت(ن) = ١٢ن + ٨

ت(٢) = ١٢×٢ + ٨ = ٢٤ + ٨ = ٣٢ م/ث^{٢}

تدريب (٣): ص١٢٤

تدريب ٣

يتحرك جسيم وفقًا للعلاقة: ف(ن) = ٢ن^{٣} − ٣ن^{٢} + ٢. احسب سرعة الجسيم عندما ينعدم تسارعه.

ف(ن) = ٢ن^{٣} − ٣ن^{٢} + ٢

ع(ن) = ٦ن^{٢} − ٦ن

ت(ن) = ١٢ن − ٦

ت(ن) = ٠ ١٢ن − ٦ = ٠ ١٢ن = ٦ ن = $\frac{١}{٢}$

ع($\frac{١}{٢}$) = ٦×($\frac{١}{٢}$)^{٢} − ٦×$\frac{١}{٢}$

ع($\frac{١}{٢}$) = ٦×$\frac{١}{٤}$ − ٣

ع($\frac{١}{٢}$) = $\frac{٦}{٤}$ − ٣ = $\frac{٣}{٢}$ − ٣ = $\frac{٦-٣}{٢}$ = $\frac{-٣}{٢}$ م/ث

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الأول: التفسير الهندسي والفيزيائي للمشتقة (التفسير الفيزيائي)

حل أسئلة نهاية الدرس (ص١٢٥)

السؤال الأول: ص١٢٥

١) إذا كانت ف(ن) = ن^{٣} + ٣ن^{٢} هي المسافة التي يقطعها جسيم بالأمتار بعد ن ثانية، فجد:

أ) السرعة بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

ب) التسارع عندما تكون السرعة ٩م/ث.

$ف(ن) = ن^{٣} + ٣ن^{٢}$

$ع(ن) = ٣ن^{٢} + ٦ن$

$ت(ن) = ٦ن + ٦$

أ)

$ع(٢) = ٣ \times ٤ + ٦ \times ٢ = ١٢ + ١٢ = ٢٤$ م/ث

ب)

$ع(ن) = ٩$

$٣ن^{٢} + ٦ن = ٩$

$٣ن^{٢} + ٦ن - ٩ = ٠$

$ن^{٢} + ٢ن - ٣ = ٠$ (بعد القسمة على ٣)

$(ن + ٣)(ن - ١) = ٠$

$(ن + ٣) = ٠$

$ن = -٣$ (تهمل)

$(ن - ١) = ٠$

$ن = ١$

$ت(١) = ٦ + ٦ = ١٢$ م/ث^{٢}

السؤال الثاني: ص١٢٥ (محذوف)

الفصل الأول: التفسير الهندسي والفيزيائي للمشتقة (التفسير الفيزيائي)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص١٢٥)

السؤال الثالث: ص١٢٥

٣) إذا كان ف(ن) = (٢ن − ٢)^{٣} + ٤ يمثل المسافة التي يقطعها جسيم بالأمتار بعد ن ثانية، فجد السرعة المقطوعة بعد مرور ٤ ثوانٍ من بدء الحركة.

ف(ن) = (٢ن − ٢)^{٣} + ٤

ع(ن) = ٣(٢ن − ٢)^{٢} × ٢

= ٦(٢ن − ٢)^{٢}

ع(٤) = ٦(٦)^{٢} = ٦ × ٣٦ = ٢١٦ م/ث

السؤال الرابع: ص١٢٥

٤) إذا مثّل الاقتران ف(ن) المسافة التي يقطعها جسيم بالأمتار بعد ن ثانية من بدء حركته، وكان ف(ن) = ن^{٣} − ن^{٢} + ٥، فما سرعة هذا الجسيم عندما يكون تسارعه ٤ م/ث^{٢}؟

ف(ن) = ن^{٣} − ن^{٢} + ٥

ع(ن) = ٣ن^{٢} − ٢ن

ت(ن) = ٦ن − ٢

ت(ن) = ٤

٦ن − ٢ = ٤ ٦ن = ٦ ن = ١

ع(١) = ٣ − ٢ = ١ م/ث

السؤال الخامس: ص١٢٥

٥) إذا تحركت سيارة، وكان موقعها في اللحظة ن مُعرّفًا بالاقتران: ف(ن) = ٣٠ن^{٢} − ٤ن + ٦، حيث ف المسافة التي تقطعها السيارة بالأمتار، ن الزمن بالثواني، فجد سرعة السيارة بعد مرور ٤ ثوانٍ من بدء الحركة.

ف(ن) = ٣٠ن^{٢} − ٤ن + ٦

ع(ن) = ٦٠ن − ٤

ت(ن) = ٦٠

ع(٤) = ٦٠ × ٤ − ٤ = ٢٤٠ − ٤ = ٢٣٦ م/ث

Marwan Abu Dalyeh
"Virtual School"

الفصل الثاني: تطبيقات الاشتقاق (التزايد والتناقص)

تدريب (١): ص١٣١

تدريب ١
جد فترات التزايد والتناقص لكل اقتران مما يأتي:
١) هـ(س) = ٧ + س. ٢) ق(س) = (٢س − ٤)٢.

١)

هـ′(س) = ١ هـ′(س) = ٠

١ = ٠ **(لا يوجد نقاط حرجة)**

+ + + + +

الاقتران دائماً متزايد على الفترة $(-\infty، \infty)$

٢)

$و'(س) = ٢(٢س - ٤) \times ٢$

$و'(س) = ٤(٢س - ٤)$

$و'(س) = ٨س - ١٦$ $و'(س) = ٠$

$٨س - ١٦ = ٠$ $٨س = ١٦$ $س = ٢$

الاقتران متزايد على الفترة $[٢، \infty)$

الاقتران متناقص على الفترة $(-\infty، ٢]$

-- ++

٢

حل أسئلة نهاية الدرس (ص١٣٢)

السؤال الأول: ص١٣٢

١) جد فترات التزايد والتناقص لكل مما يأتي:

أ) ق(س) = ٣ − ٤س

أ)

هـ′(س) = −٤ هـ′(س) = ٠

−٤ = ٠ **(لا يوجد نقاط حرجة)**

- - - - -

الاقتران دائماً متناقص على الفترة $(-\infty، \infty)$

الفصل الثاني: تطبيقات الاشتقاق (التزايد والتناقص)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص١٣٢)

السؤال الأول: ص١٣٢

١) جد فترات التزايد والتناقص لكل مما يأتي:

ب) ق(س) = ٨س − س^{٢}

جـ) ق(س) = ٤س^{٣} − ٦س^{٢} + ٢

د) ق(س) = (س + ٢)(س + ٣)

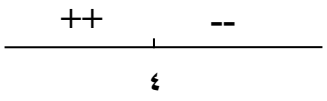
ب)

$هـ'(س) = ٨ - ٢س$ $هـ'(س) = ٠$

$٨ - ٢س = ٠$ $٢س = ٨$ $س = ٤$

الاقتران متزايد على الفترة $(-\infty، ٤]$

الاقتران متناقص على الفترة $[٤، \infty)$



ج)

$هـ'(س) = ١٢س^{٢} - ١٢س$ $هـ'(س) = ٠$

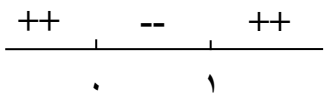
$١٢س^{٢} - ١٢س = ٠$ $١٢س(س - ١) = ٠$

$١٢س = ٠$ $س - ١ = ٠$

$س = ٠$ $س = ١$

الاقتران متزايد على الفترة $(-\infty، ٠] \cup [١، \infty)$

الاقتران متناقص على الفترة $[٠، ١]$



د)

$هـ'(س) = (س + ٢) \times ١ + (س + ٣) \times ١$

$هـ'(س) = (س + ٢) + (س + ٣)$

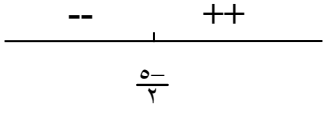
$هـ'(س) = س + ٢ + س + ٣$

$هـ'(س) = ٢س + ٥$ $هـ'(س) = ٠$

$٢س + ٥ = ٠$ $٢س = -٥$ $س = -\frac{٥}{٢}$

الاقتران متزايد على الفترة $\left[-\frac{٥}{٢}، \infty\right)$

الاقتران متناقص على الفترة $\left(-\infty، -\frac{٥}{٢}\right]$

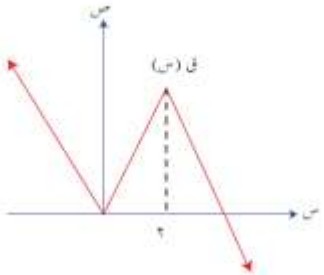


الفصل الثاني: تطبيقات الاشتقاق (التزايد والتناقص)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص١٣٢)

السؤال الثاني: ص١٣٢

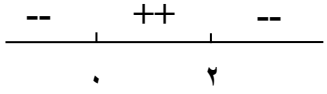
٢) اعتمادًا على الشكل (٣-٨) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية ح، جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق.



الشكل (٣-٨).

الاقتران متزايد على الفترة $[٢،٠]$

الاقتران متناقص على الفترة $(-\infty،٠] \cup [٢،\infty)$



السؤال الثالث: ص١٣٢

٣) بيّن أن الاقتران ق(س) = س^{٣} + ٢س + ٥ يكون متزايدًا لقيم س جميعها.

$$\text{فـ}'(س) = ٣س^{٢} + ٢ \qquad \text{فـ}'(س) = ٠$$

$$٣س^{٢} + ٢ = ٠$$

$$٣س^{٢} = -٢$$

$$س^{٢} = \frac{-٢}{٣}$$

$$س = \sqrt{\frac{-٢}{٣}}$$ **(لا يوجد نقاط حرجة)**

+ + + + +

الاقتران دائماً متزايد على الفترة $(-\infty،\infty)$

الفصل الثاني: تطبيقات الاشتقاق (القيم القصوى)

تدريب (١): ص١٣٦

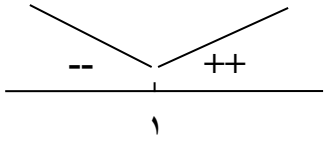
تدريب ١

جد النقط والأعداد الحرجة والقيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران

ق(س) = س^{٢} – ٢س + ١

$هـ'(س) = ٢س - ٢$ $هـ'(س) = ٠$

$٢س - ٢ = ٠$ $٢س = ٢$ $س = ١$



يوجد قيمة صغرى عند (س = ١) وهي $هـ(١) = ١ - ٢ + ١ =$ صفر

تدريب (٢): ص١٣٨

تدريب ٢

إذا كان ق(س) = ٢س (١٢ – س^{٢})، فجد كلًّا مما يأتي:

١) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق.

٢) قيم س الحرجة للاقتران ق.

٣) القيم القصوى للاقتران ق، مُحدِّدًا نوعها.

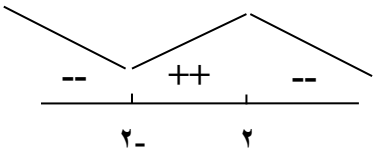
أ)

$هـ(س) = ٤ ٢س - ٢س^{٣}$

$هـ'(س) = ٢٤ - ٦س^{٢}$ $هـ'(س) = ٠$

$٢٤ - ٦س^{٢} = ٠$ $٦س^{٢} = ٢٤$

$س^{٢} = ٤$ $س = \pm ٢$



ب)

الاقتران متزايد على الفترة $[-٢، ٢]$

الاقتران متناقص على الفترة $(-\infty، -٢] \cup [٢، \infty)$

ج)

يوجد قيمة صغرى عند (س = –٢) وهي $هـ(-٢) = -٤ \times ٨ = -٣٢$

يوجد قيمة عظمى عند (س = ٢) وهي $هـ(٢) = ٤ \times ٨ = ٣٢$

تدريب (٣): ص١٤٠ (محذوف)

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School"

الفصل الثاني: تطبيقات الاشتقاق (القيم القصوى)

حل أسئلة نهاية الدرس (ص١٤١)

السؤال الأول: ص١٤١

١) جد القيم القصوى (العظمى والصغرى) المحلية (إن وجدت) لكل مما يأتي:

أ) ق(س) = س^{٣} − ٣س + ١

ب) ل(س) = ٤س^{٣} − ٦س^{٢} + ٢

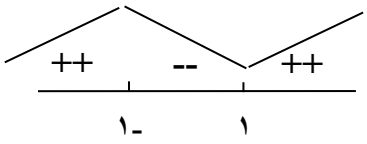
جـ) هـ(س) = − س^{٣} + ٤

أ)

$ه'(س) = ٣س^{٢} - ٣$ $ه'(س) = ٠$

$٣س^{٢} - ٣ = ٠$ $٣س^{٢} = ٣$

$س^{٢} = ١$ $س = \pm ١$



يوجد قيمة صغرى عند (س = ١) وهي ه(١) = ١ − ٣ + ١ = − ٣

يوجد قيمة عظمى عند (س = − ١) وهي ه(− ١) = − ١ + ٣ + ١ = ٣

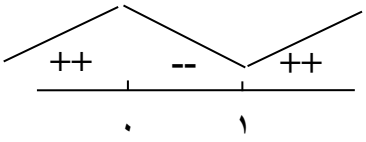
ب)

$ل'(س) = ١٢س^{٢} - ١٢س$ $ل'(س) = ٠$

$١٢س^{٢} - ١٢س = ٠$ $١٢س(س - ١) = ٠$

$١٢س = ٠$ $س - ١ = ٠$

$س = ٠$ $س = ١$



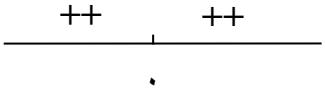
يوجد قيمة صغرى عند (س = ١) وهي ه(١) = ٤ − ٦ + ٢ = صفر

يوجد قيمة عظمى عند (س = ٠) وهي ه(٠) = ٢

جـ)

$هـ'(س) = ٣س^{٢}$ $هـ'(٨) = ٠$

$٣س^{٢} = ٠$ $س = ٠$



لا يوجد قيم قصوى لهذا الاقتران، لأن الاقتران دائماً متزايد على (ع)

الفصل الثاني: تطبيقات الاشتقاق (القيم القصوى)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص١٤١)

السؤال الأول: ص١٤١

١) جد القيم القصوى (العظمى والصغرى) المحلية (إن وجدت) لكل مما يأتي:

د) ك(س) = س^{٣} − ٢س^{٢} − ٤س + ٨

د)

ك$'$(س) = ٣س^{٢} − ٤س − ٤ ك$'$(س) = ٠

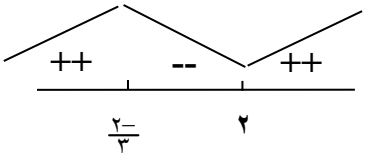
٣س^{٢} − ٤س − ٤ = ٠

(٣س + ٢)(س − ٢) = ٠

٣س + ٢ = ٠ س − ٢ = ٠

٣س = −٢ س = ٢

س = $\frac{-٢}{٣}$



يوجد قيمة صغرى عند (س = ٢) وهي ق(٢)

يوجد قيمة عظمى عند (س = $\frac{-٢}{٣}$) وهي ق($\frac{-٢}{٣}$)

السؤال الثاني: ص١٤١(محذوف)

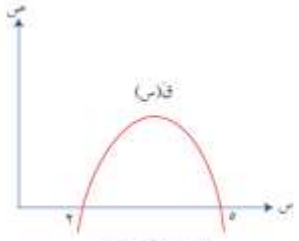
السؤال الثالث: ص١٤١

٣) اعتمادًا على الشكل (٣-١٢) الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق،
حيث ق$'$(٢) = ق$'$(٥) = صفرًا، جد كلًّا مما يأتي:

أ) قيم س الحرجة للاقتران ق.

ب) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق.

جـ) نقط القيم القصوى المحلية للاقتران ق مُحدِّدًا نوعها.



الشكل (٣-١٢).

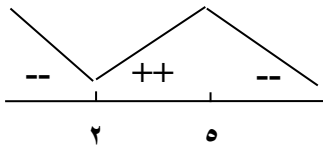
أ)

س = {٢، ٥}

ب)

الاقتران متزايد على الفترة [٢، ٥]

الاقتران متناقص على الفترة (−∞، ٢] ∪ [٥، ∞)



ج)

يوجد قيمة صغرى عند (س = ٢) وهي ق(٢)

يوجد قيمة عظمى عند (س = ٥) وهي ق(٥)

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School"

الفصل الثاني: تطبيقات الاشتقاق (القيم القصوى)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص١٤١)

السؤال الرابع: ص١٤١

٤) إذا كان للاقتران ق(س) = ٣س٢ – أس + ٤ قيمة حرجة عندما س = ٢، فجد قيمة الثابت أ.

$$هـ'(س) = ٦س - أ$$

$$هـ'(٢) = ١٢ - أ$$

$$١٢ - أ = ٠ \qquad أ = ١٢$$

الفصل الثاني: تطبيقات الاشتقاق (تطبيقات اقتصادية على التفاضل)

تدريب (١): ص١٥١

تدريب ١

إذا كان اقتران الإيراد الكلي لأحد المبيعات هو ﻫ(س) = ٥٠س + ٢س^{٢} دينار، واقتران التكلفة الكلية ك(س) = ٣٠س + ٤س^{٢} + ٢٠٠ دينار، حيث س عدد الوحدات المبيعة، فجد قيمة س التي تجعل الربح أكبر ما يمكن.

ر(س) = ﻫ(س) − ك(س)

= ٥٠س + ٢س^{٢} − (٣٠س + ٤س^{٢} + ٢٠٠)

= ٥٠س + ٢س^{٢} − ٣٠س − ٤س^{٢} − ٢٠٠

= ٢٠س − ٢س^{٢} − ٢٠٠

ر′(س) = ٢٠ − ٤س ر′(س) = ٠

٢٠ − ٤س = ٠

٤س = ٢٠

س = ٥ يمكن تحقيق أكبر ربح عندما (س = ٥)

تدريب (٢): ص١٥٢

تدريب ٢

وجد مصنع لإنتاج أجهزة إلكترونية أن التكلفة الكلية بالدينار لإنتاج س من الأجهزة أسبوعيًا تعطى بالاقتران ك(س) = ٥٠س + ٣٠٠. إذا بيع الجهاز الواحد بمبلغ (٢٠٠ − س) دينار، فجد قيمة س التي تجعل الربح الأسبوعي أكبر ما يمكن.

ﻫ(س) = س × (٢٠٠ − س)

ﻫ(س) = ٢٠٠س − س^{٢}

ر(س) = ﻫ(س) − ك(س)

= ٢٠٠س − س^{٢} − (٥٠س + ٣٠٠)

= ٢٠٠س − س^{٢} − ٥٠س − ٣٠٠

= ١٥٠س − س^{٢} − ٣٠٠

ر′(س) = ١٥٠ − ٢س ر′(س) = ٠

١٥٠ − ٢س = ٠

٢س = ١٥٠

س = ٧٥ يمكن تحقيق أكبر ربح عندما (س = ٧٥)

الفصل الثاني: تطبيقات الاشتقاق (تطبيقات اقتصادية على التفاضل)

حل أسئلة نهاية الدرس (ص١٥٣)

السؤال الأول: ص١٥٣

١) إذا كان اقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو د(س) = ٨٠س + س^{٢} دينار، واقتران التكلفة الكلية هو ك(س) = ٤٠ + ١٦٠س دينار، حيث س عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما، فجد الربح الحدي.

ر(س) = ع(س) − ك(س)

= ٨٠س + س^{٢} − (٤٠ + ١٦٠س)

= ٨٠س + س^{٢} − ٤٠ − ١٦٠س

= س^{٢} − ٨٠س − ٤٠

ر′(س) = ٢س − ٨٠

السؤال الثاني: ص١٥٣

٢) ينتج مصنع للحواسيب س جهاز أسبوعيًا. فإذا كانت تكلفة الإنتاج الكلي الأسبوعي بالدينار تعطى بالعلاقة ك(س) = ٣٠٠٠ + ٥٠س + س^{٢}، وكان سعر الجهاز الواحد ٢٥٠ دينارًا، فما عدد الأجهزة التي يجب أن يبيعها المصنع أسبوعيًا لتحقيق أكبر ربح ممكن؟

ع(س) = ٢٥٠ × س

ع(س) = ٢٥٠س

ر(س) = ع(س) − ك(س)

= ٢٥٠س − (٣٠٠٠ + ٥٠س + س^{٢})

= ٢٥٠س − ٣٠٠٠ − ٥٠س − س^{٢}

= ٢٠٠س − س^{٢} − ٣٠٠٠

ر′(س) = ٢٠٠ − ٢س ر′(س) = ٠

٢٠٠ − ٢س = ٠

٢س = ٢٠٠

س = ١٠٠ **يمكن تحقيق أكبر ربح عندما (س = ١٠٠)**

السؤال الثالث: ص١٥٣

٣) إذا كان اقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو د(س) = ٦٠س − س^{٢} دينار، واقتران التكلفة الكلية هو ك(س) = ٢٠ + ٨س دينار، حيث س عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما، فجد الربح الحدي.

ر(س) = ع(س) − ك(س)

= ٦٠س − س^{٢} − (٢٠ + ٨س)

= ٦٠س − س^{٢} − ٢٠ − ٨س

= ٥٢س − س^{٢} − ٢٠

ر′(س) = ٥٢ − ٢س

الفصل الثاني: تطبيقات الاشتقاق (تطبيقات اقتصادية على التفاضل)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص١٥٣)

السؤال الرابع: ص١٥٣

٤) إذا كان د(س) = ١٦س – س^{٢} – ٢٠ دينار، ك(س) = ٢س^{٢} – ٨س + ١٥ دينار، هما إيراد س من وحدات سلعة معينة وتكلفتها، فجد قيمة س التي تجعل الربح أكبر ما يمكن.

ر(س) = د(س) – ك(س)

= ١٦س – س^{٢} – ٢٠ – (٢س^{٢} – ٨س + ١٥)

= ١٦س – س^{٢} – ٢٠ – ٢س^{٢} + ٨س – ١٥

= ٢٤س – ٣س^{٢} – ٣٥

ر′(س) = ٢٤ – ٦س ر′(س) = ٠

٢٤ – ٦س = ٠

٦س = ٢٤

س = ٤ يمكن تحقيق أكبر ربح عندما (س = ٤)

السؤال الخامس: ص١٥٣

٥) ينتج مصنع للثلاجات س ثلاجة شهريًا. فإذا كانت تكلفة إنتاجها تعطى بالعلاقة: ك(س) = ٣٦٠٠٠ + ٤٠٠س + س^{٢}، وكان سعر الثلاجة الواحدة ٥٠٠ دينار، فجد عدد الثلاجات التي يجب أن يبيعها المصنع شهريًا لتحقيق أكبر ربح ممكن.

د(س) = ٥٠٠ × س

د(س) = ٥٠٠س

ر(س) = د(س) – ك(س)

= ٥٠٠س – (٣٦٠٠٠ + ٤٠٠س + س^{٢})

= ٥٠٠س – ٣٦٠٠٠ – ٤٠٠س – س^{٢}

= ٩٦٠س – ٣٦٠٠٠ – س^{٢}

ر′(س) = ٩٦٠ – ٢س ر′(س) = ٠

٩٦٠ – ٢س = ٠

٢س = ٩٦٠

س = ٤٨٠ يمكن تحقيق أكبر ربح عندما (س = ٤٨٠)

الفصل الثاني: تطبيقات الاشتقاق (تطبيقات اقتصادية على التفاضل)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (ص١٥٣)

السؤال السادس: ص١٥٣

٦) يبيع أحد المصانع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بمبلغ ٩٠ دينارًا. فإذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج س وحدة من هذه السلعة أسبوعيًا تعطى بالعلاقة:
ك(س) = ٠,٢س^{٢} + ٧٠س + ١٠٠ دينار، فجد الربح الحدي.

$ع(س) = ٩٠ \times س$

$ع(س) = ٩٠س$

$ر(س) = ع(س) - ك(س)$

$= ٩٠س - (٠.٢س^{٢} + ٧٠س + ١٠٠)$

$= ٩٠س - ٠.٢س^{٢} - ٧٠س - ١٠٠$

$= ٢٠س - ٠.٢س^{٢} - ١٠٠$

$ر'(س) = ٢٠ - ٠.٤س$

حل أسئلة نهاية الوحدة الثالثة (تطبيقات التفاضل)

السؤال الأول: ص١٥٤

١) يتحرك جسيم وفق العلاقة: ف(ن) = ٢ن^{٣} − ١٢ن + ٣، حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار، ن الزمن بالثواني. جد تسارع الجسيم عندما تساوي سرعته ٤٢م/ث.

$ف(ن) = ٢ن^{٣} - ١٢ن + ٣$

$ع(ن) = ٦ن^{٢} - ١٢$

$ت(ن) = ١٢ن$

$ع(ن) = ٤٢$

$٦ن^{٢} - ١٢ = ٤٢$

$٦ن^{٢} = ٥٤$

$ن^{٢} = ٩$ $ن = \pm ٣$ **(نهمل الزمن السالب)**

$ت(٣) = ١٢ \times ٣ = ٣٦$ م/ث^{٢}

السؤال الثاني: ص١٥٤

٢) يتحرك جسيم وفق العلاقة: ف(ن) = م (ن −١)^{٢}، حيث ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار، ن الزمن بالثواني. إذا كانت سرعة الجسيم المقطوعة بعد ٤ ثوانٍ تساوي ١٢م/ث، فجد قيمة الثابت م.

$ف(ن) = م(ن-١)^{٢}$

$ع(ن) = ٢م(ن-١)$

$ع(٤) = ٢م(٣)$

$٦م = ١٢$

$م = ٢$

السؤال الثالث: ص١٥٤ (محذوف)

تابع حل أسئلة نهاية الوحدة الثالثة (تطبيقات التفاضل)

السؤال الرابع: ص١٥٤

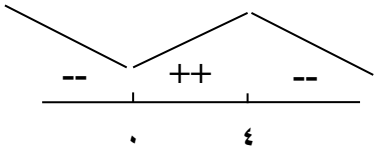
٤) إذا كان ق(س) = س^{٢}(٦ – س)، فجد:
أ) فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران ق.
ب) القيم العظمى والصغرى للاقتران ق (إن وجدت).

أ)

$$\text{هـ}(س) = ٦س^{٢} - س^{٣}$$

$$\text{هـ}'(س) = ١٢س - ٣س^{٢} \qquad \text{هـ}'(س) = ٠$$

$$١٢س - ٣س^{٢} = ٠ \qquad ٣س(٤ - س) = ٠$$
$$٣س = ٠ \qquad ٤ - س = ٠$$
$$س = ٠ \qquad س = ٤$$



الاقتران متزايد على الفترة $[٠، ٤]$
الاقتران متناقص على الفترة $(-\infty، ٠] \cup [٤، \infty)$

ب)

يوجد قيمة صغرى عند $(س = ٠)$ **وهي** $\text{هـ}(٠) = ٠$

يوجد قيمة عظمى عند $(س = ٤)$ **وهي** $\text{هـ}(٤) = ١٦ \times ٢ = ٣٢$

السؤال الخامس: ص١٥٤

٥) يبيع أحد المصانع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بمبلغ ١٠٠ دينار، فإذا كانت التكلفة الكلية بالدنانير لإنتاج س وحدة من هذه السلعة أسبوعيًا تعطى بالعلاقة:
ك(س) = ٠,٣ س^{٢} + ٤٠س + ٧٠ دينارًا، فجد الربح الحدي.

$$ح(س) = ١٠٠ \times س$$
$$ح(س) = ١٠٠س$$

$$ر(س) = ح(س) - ك(س)$$
$$= ١٠٠س - (٠.٣س^{٢} + ٤٠س + ٧٠)$$
$$= ١٠٠س - ٠.٣س^{٢} - ٤٠س - ٧٠$$
$$= ٦٠س - ٠.٣س^{٢} - ٧٠$$

$$ر'(س) = ٦٠ - ٠.٦س$$

السؤال السادس: ص١٥٤ (محذوف)

تابع حل أسئلة نهاية الوحدة الثالثة (تطبيقات التفاضل)

السؤال السابع: ص١٥٤

٧) إذا كان ق(س) = س(٣س – ١)^{٢}، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س = ١

$س_{١} = ١$

$ص_{١} = هـ(١) = ١ \times ٤ = ٤$

$هـ'(س) = س \times ٢(٣س - ١) \times ٣ + (٣س - ١)^{٢} \times ١$

$هـ'(س) = ٦س(٣س - ١) + (٣س - ١)^{٢}$

$هـ'(١) = ٦ \times ٢ + ٤ = ١٢ + ٤ = ١٦$

معادلة المماس هي $ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

$ص - ٤ = ١٦(س - ١)$

$ص = ١٦س - ١٢$

السؤال الثامن: ص١٥٤ (محذوف)

السؤال التاسع: ص١٥٤

٩) إذا كان ك(س) = ٤٠ + ٣س^{٢} دينار اقتران التكلفة الكلية لإنتاج س قطعة من سلعة ما، فجد التكلفة الحدية لإنتاج ٢٠ قطعة من هذه السلعة.

$ك(س) = ٤٠ + ٣س^{٢}$

$ك'(س) = ٦س$ $ك'(٢٠) = ٦ \times ٢٠ = ١٢٠$

السؤال العاشر: ص١٥٥

١٠) إذا كان ق(س) = (٣س – ٤)^{٣}، فجد قيمة س التي تجعل ق$'$(س) = ٣٦

$هـ'(س) = ٣(٣س - ٤)^{٢} \times ٣$

$هـ'(س) = ٩(٣س - ٤)^{٢}$

$٩(٣س - ٤)^{٢} = ٣٦$ $(٣س - ٤)^{٢} = ٤$ $(٣س - ٤) = \pm ٢$

$٣س - ٤ = ٢$ $٣س - ٤ = -٢$

$٣س = ٦$ $٣س = ٢$

$س = ٢$ $س = \frac{٢}{٣}$

$س = \{٢، \frac{٢}{٣}\}$

تابع حل أسئلة نهاية الوحدة الثالثة (تطبيقات التفاضل)

السؤال الحادي عشر: ص١٥٥

١١) يتكون هذا السؤال من ست فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربعة بدائل، واحد منها فقط صحيح . ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) إذا كان للاقتران ق(س) = أس٢ – ١٢س + ١ قيمة حرجة عندما س = ٣، فإن قيمة أ تساوي:

أ) ٢ ب) ٦ جـ) ١٢ د) –٢

(٢) إذا كان ميل المماس للاقتران ص = (٢– س)٤ عند النقطة (س١، ص١) يساوي (٤)، فإن قيمة س١ تساوي:

أ) –٣ ب) –٢ جـ) ٢ د) ٣

(٣) إذا كان ق(س) = س٢ – ٤س، فإن للاقتران ق قيمة صغرى عندما س تساوي:

أ) صفرًا ب) ٢ جـ) –٤ د) ٤

(٤) فترة التزايد للاقتران ق(س) = س٢ – ٢س – ٢ هي:

أ) [٢، ٣] ب) [٠، ١] جـ) [١، ∞) د) (–∞، ١]

١)

$$\text{ه}'(س) = ٢أس - ١٢$$

$$\text{ه}'(٣) = ٦أ - ١٢$$

$$٦أ - ١٢ = ٠ \qquad ٦أ = ١٢$$

$$أ = ٢$$ **(الجواب فرع أ)**

٢)

$$ص' = ٤(٢ - س)^{٣} \times -١ = ٤$$

$$-٤(٢ - س)^{٣} = ٤$$

$$(٢ - س)^{٣} = -١$$

$$٢ - س = -١$$

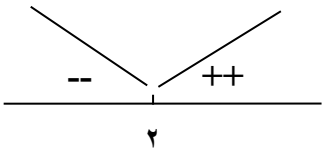
$$س = ٣$$ **(الجواب فرع د)**

٣)

$$\text{ه}'(س) = ٢س - ٤$$

$$٢س - ٤ = ٠$$

$$٢س = ٤ \qquad س = ٢$$ **(الجواب فرع ب)**

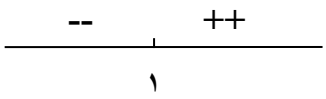


٤)

$$\text{ه}'(س) = ٢س - ٢$$

$$٢س - ٢ = ٠$$

$$٢س = ٢ \qquad س = ١$$



الاقتران متزايد على الفترة $[١، \infty)$ **(الجواب فرع ج)**

تابع حل أسئلة نهاية الوحدة الثالثة (تطبيقات التفاضل)

السؤال الحادي عشر: ص١٥٥

٥)

$$ف(ن) = ٦ن^{٢} - ن^{٣}$$
$$ع(ن) = ١٢ن - ٣ن^{٢}$$
$$ت(ن) = ١٢ - ٦ن$$

$$ت(ن) = ٠$$
$$١٢ - ٦ن = ٠$$
$$٦ن = ١٢$$
$$ن = ٢$$

$ف(٢) = ٢٤ - ٨ = ١٦$ م (الجواب فرع ب)

٦)

$$ه'(س) = ٣ا س^{٢} - ٦س$$
$$ه'(١) = ٣ا - ٦$$

$$٣ا - ٦ = ٠$$
$$٣ا = ٦$$
$$ا = ٢$$ (الجواب فرع أ)

١١) يتكون هذا السؤال من ست فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربعة بدائل، واحد منها فقط صحيح . ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(٥) يتحرك جسيم وفق العلاقة: ف(ن) = ٦ن^{٢} – ن^{٣}، حيث ف المسافة بالأمتار التي يقطعها الجسيم في زمن قدره ن ثانية. المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار حتى يصبح تسارعه صفرًا هي:

أ) ١٢ ب) ١٦ جـ) ٢٤ د) ٣٢

(٦) إذا كان للاقتران ق(س) = أس^{٣} – ٣س^{٢} قيمة صغرى محلية عند س = ١، فإن قيمة الثابت أ تساوي:

أ) ٢ ب) –٢ جـ) –٣ د) ٣

الوحدة الرابعة: التكـــــامل وتطبيقاته
حل جميع أسئلة وتدريبات الكتاب
لطلاب التخصص الأدبي والفندقي

إعداد/ مروان ابوديه

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School" 0797-55-27-27

الفصل الأول: التكامل (التكامل غير المحدود)

تدريب (١): ص١٦١

تدريب ١

إذا كان ص = $\int \frac{٤س-١}{س^{٢}+١}$ ءس، فجد $\frac{ءص}{ءس}$ عندما س = −١

نشتق الطرفين

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ء}{ءس}\int \frac{٤س-١}{س^{٢}+١}\,ءس$$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{٤س-١}{س^{٢}+١} \qquad \left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=-١} = \frac{-٤-١}{١+١} = \frac{-٥}{٢}$$

تدريب (٢): ص١٦٣

تدريب ٢

جد كلًا من التكاملات الآتية:

١) $\int ءس$ ٢) $\int س^{٢}\,ءس$

٣) $\int س^{-٥}\,ءس$ ، س ≠ ٠ ٤) $\int \sqrt{س}\,ءس$ ، س ≥ ٠

١) $\int (١)ء س = س + جـ$

٢) $\int س^{٣}\,ءس = \frac{س^{٤}}{٤} + جـ$

٣) $\int س^{-٥}\,ءس = \frac{س^{-٤}}{-٤} + جـ$

٤) $\int س^{\frac{١}{٢}}\,ءس = \frac{٢س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + جـ$

تدريب (٣): ص١٦٤

تدريب ٣

جد كلًا من التكاملين الآتيين:

١) $\int (٣س^{٢} - \frac{٦}{\sqrt{س}})ءس$ ٢) $\int (٤س - ٣جاس)ءس$

١)

$$= \int \left(٣س^{٢} - ٦س^{-\frac{١}{٢}}\right)ءس$$

$$= س^{٣} - ٦ \times ٢ \times س^{\frac{١}{٢}} + جـ$$

$$= س^{٣} - ١٢س^{\frac{١}{٢}} + جـ$$

٢)

$$= \int \left(٤س - ٣جاس\right)ءس$$

$$= \frac{٤س^{٢}}{٢} - ٣ \times -جتاس + جـ$$

$$= ٢س^{٢} + ٣جتاس + جـ$$

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الأول: التكامل (التكامل غير المحدود)

تدريب (٤): ص١٦٥

١)

$$= \frac{(٢س + ٣)^{٣}}{٢ \times ٣} + جـ$$

$$= \frac{(٢س + ٣)^{٣}}{٦} + جـ$$

٢)

$$= \int \left(\frac{س^{٢}}{\sqrt[٣]{س}} - \frac{٥س}{\sqrt{س}} \right) ؘس$$

$$= \int \left(س^{٢} \, س^{-\frac{١}{٣}} - ٥س \, س^{-\frac{١}{٢}} \right) ؘس$$

$$= \int \left(س^{\frac{٥}{٣}} - ٥س^{\frac{٢}{٣}} \right) ؘس$$

$$= \frac{٣}{٨} س^{\frac{٨}{٣}} - \frac{٥ \times ٣ \times س^{\frac{٥}{٣}}}{٥} + جـ$$

$$= \frac{٣}{٨} س^{\frac{٨}{٣}} - ٣س^{\frac{٥}{٣}} + جـ$$

٣)

$$= \int \frac{(س + ٣)(س + ٥)}{س + ٣} ؘس$$

$$= \int (س + ٥) ؘس$$

$$= \frac{س^{٢}}{٢} + ٥س + جـ$$

٤)

$$= \int \frac{(س + ٤)(س^{٢} - ٤س + ١٦)}{س + ٤} ؘس$$

$$= \int (س^{٢} - ٤س + ١٦) ؘس$$

$$= \frac{س^{٣}}{٣} - ٢س^{٢} + ١٦س + جـ$$

تدريب ٤

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int (٢س + ٣)^{٢} ؘس$

٢) $\int \frac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt{س}} ؘس$ ، $س > ٠$

٣) $\int \frac{س^{٢} + ٢س - ١٥}{س - ٣} ؘس$ ، $س \neq ٣$

٤) $\int \frac{س^{٢} + ٦٤}{س + ٤} ؘس$ ، $س \neq -٤$

الفصل الأول: التكامل (التكامل غير المحدود)

تدريب (٥): ص١٦٥

تدريب ٥

جد قاعدة الاقتران ق الذي تعطى مشتقته بالقاعدة ق′(س) = ٣س٢ − ٦س + ٥،
علما بأن ق(٠) = ٧

تكامل الطرفين

$$\int هـ'(س)\,دس = \int (٣س^{٢} - ٦س + ٥)\,دس$$

$$هـ(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٥س + جـ$$

$$هـ(٠) = ٠ - ٠ + ٠ + جـ = ٧ \qquad جـ = ٧$$

$$هـ(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٥س + ٧$$

الفصل الأول: التكامل (التكامل غير المحدود)

حل أسئلة نهاية الدرس (١٦٦)

السؤال الأول: ص١٦٦

١) جد كلًّا مما يأتي:

أ) $\int \frac{1}{2} س \, ds$

ب) $\int \frac{ds}{س^3}$ ، $س \neq 0$

جـ) $\int (2 - س^2) \, ds$

د) $\int 3س^2 \, ds$

هـ) $\int \frac{-2}{س^{-4}} \, ds$

أ) $= \frac{1}{2} س + جـ$

ب) $= \int س^{-5} \, ds = \frac{س^{-4}}{-4} + جـ = \frac{-1}{4س^4} + جـ$

ج) $= 2س - \frac{س^3}{3} + جـ$

د) $= 3 \times \frac{س^3}{3} + جـ = س^3 + جـ$

هـ) $= \int -2س^5 \, ds = -2 \times \frac{س^6}{6} + جـ = -3س^6 + جـ$

السؤال الثاني: ص١٦٦

٢) جد كلًّا مما يأتي:

أ) $\int (10س^2 - \sqrt{س} + 3قا^2 س) \, ds$

ب) $\int (2 - س)(4س + 1) \, ds$

جـ) $\int 3ظاس \, جتاس \, ds$

د) $\int \frac{س^2 + 6س + 8}{س + 2} \, ds$ ، $س \neq -2$

أ) $= \int \left(10س^2 - س^{\frac{1}{6}} + 3قا^2 س\right) ds$

$= \frac{10س^3}{3} - \frac{6س^{\frac{7}{6}}}{7} + 3ظاس + جـ$

ب) $= \int (8س + 2 - 4س^2 - س) \, ds$

$= \int (7س + 2 - 4س^2) \, ds$

$= \frac{7س^2}{2} + 2س - \frac{4س^3}{3} + جـ$

ج) $= \int \left(3 \frac{جاس}{جتاس} \times جتاس\right) ds$

$= \int (3جاس) \, ds = -3جتاس + جـ$

د) $= \int \frac{(س + 2)(س + 4)}{س + 2} ds = \int (س + 4) \, ds$

$= \frac{س^2}{2} + 4س + جـ$

الفصل الأول: التكامل (التكامل غير المحدود)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (١٦٦)

السؤال الثالث: ص١٦٦

٣) جد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = ٥، حيث ص = $\int \frac{٤س+١}{س} د س$ ، س ≠ ٠

نشتق الطرفين

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د}{د س}\int \frac{٤س+١}{س} د س$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{٤س+١}{س} \qquad \frac{د ص}{د س}\Big|_{س=٥} = \frac{٢٠+١}{٥} = \frac{٢١}{٥}$$

السؤال الرابع: ص١٦٦

٤) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق، وكان قَ(س) = ٦س − ٨س٣ + ٥، وكان ق(−١) = ٢، فجد قاعدة الاقتران ق.

تكامل الطرفين

$$\int ق'(س) د س = \int (٦س - ٨س^{٣} + ٥) د س$$

$$ق(س) = ٣س^{٢} - ٢س^{٤} + ٥س + جـ$$

$$ق(-١) = -٣ - ٢ - ٥ + جـ = ٢$$

$$ق(-١) = -٤ + جـ = ٢ \qquad جـ = ٢ + ٤ \qquad جـ = ٦$$

$$ق(س) = ٣س^{٢} - ٢س^{٤} + ٥س + ٦$$

السؤال الخامس: ص١٦٦

٥) إذا كان $\int$ عَ(س) د س = ٦س٣ − ٣س٢ + ٦س − ٥، فجد عَ(١).

نشتق الطرفين

$$\frac{د}{د س}\int ع'(س) د س = (٦س^{٣} - ٣س^{٢} + ٦س - ٥)' د س$$

$$ع'(س) = ١٨س^{٢} - ٦س + ٦$$

$$ع'(١) = ١٨ - ٦ + ٦ = ١٨$$

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School"

الفصل الأول: التكامل (التكامل غير المحدود)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (١٦٧)

السؤال السادس: ص١٦٧

٦) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق، وكان قَ(س) = ٢س – ٥ ، وكان ق(٢) = ٤، فجد قيمة ق(١).

تكامل الطرفين

$$\int \text{ه}'(س)\,د س = \int (٢س - ٥)\,د س$$

$$\text{ه}(س) = س^{٢} - ٥س + جـ$$

$$\text{ه}(٢) = ٤ - ١٠ + جـ = ٤$$

$$\text{ه}(٢) = -٦ + جـ = ٤ \qquad جـ = ٤ + ٦ \qquad جـ = ١٠$$

$$\text{ه}(س) = س^{٢} - ٥س + ١٠$$

$$\text{ه}(١) = ١ - ٥ + ١٠ = ٦$$

السؤال السابع: ص١٦٧

٧) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق، وكان قَ(س) = ٣س(٦ – ٥س) + ٤س^{٣} ، وكان ق(٢) = –١، فجد قيمة ق(١).

تكامل الطرفين

$$\int \text{ه}'(س)\,د س = \int (١٨س - ١٥س^{٢} + ٤س^{٣})\,د س$$

$$\text{ه}(س) = ٩س^{٢} - ٥س^{٣} + س^{٤} + جـ$$

$$\text{ه}(٢) = ٣٦ - ٤٠ + ١٦ + جـ = -١$$

$$\text{ه}(٢) = ١٢ + جـ = -١ \qquad جـ = -١ - ١٢ \qquad جـ = -١٣$$

$$\text{ه}(س) = ٩س^{٢} - ٥س^{٣} + س^{٤} - ١٣$$

$$\text{ه}(١) = ٩ - ٥ + ١ - ١٣ = -٨$$

الفصل الأول: التكامل (التكامل غير المحدود)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (١٦٧)

السؤال الثامن: ص١٦٧

٨) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق، وكان قَ(س) = $\frac{س^{٢}+٦س+٨س^{٣}}{س}$، س ≠ صفرًا، وكان ق(١) = ١٢، فجد قاعدة الاقتران ق.

تكامل الطرفين

$$\int ق'(س)\,د س = \int \frac{س^{٢}+٦س+٨س^{٣}}{س}\,د س$$

$$ق(س) = \int \frac{س(س+٦+٨س^{٢})}{س}\,د س$$

$$ق(س) = \int (س+٦+٨س^{٢})\,د س$$

$$ق(س) = \frac{س^{٢}}{٢}+٦س+\frac{٨س^{٣}}{٣}+جـ$$

$$ق(١) = \frac{١}{٢}+٦+\frac{٨}{٣}+جـ = ١٢$$

$$جـ = ١٢-٦-\frac{٨}{٣}-\frac{١}{٢} \qquad جـ = ٦+\frac{-٣-١٦}{٦} \qquad جـ = ٦-\frac{١٩}{٦} \qquad جـ = \frac{١٧}{٦}$$

$$ق(س) = \frac{س^{٢}}{٢}+٦س+\frac{٨س^{٣}}{٣}+\frac{١٧}{٦}$$

السؤال التاسع: ص١٦٧

٩) إذا كان ل اقترانًا قابلًا للاشتقاق، وكان لَ(س) = ٦س٢ – ٦س٣ – ٢س، فجد قيمة ل(٣) – ل(١).

تكامل الطرفين

$$\int ل'(س)\,د س = \int (٦س^{٢}-٦س^{٣}-٢س)\,د س$$

$$ل(س) = ٢س^{٣}-\frac{٣س^{٤}}{٢}-س^{٢}+جـ$$

$$ل(٣) = ٥٤-\frac{٢٤٣}{٢}-٩+جـ \qquad ل(٣) = ٤٥-\frac{٢٤٣}{٢}+جـ \qquad ل(٣) = \frac{-١٥٣}{٢}+جـ$$

$$ل(١) = ٢-\frac{٣}{٢}-١+جـ \qquad ل(١) = \frac{-١}{٢}+جـ$$

$$ل(٣)-ل(١) = \left(\frac{-١٥٣}{٢}+جـ\right)-\left(\frac{-١}{٢}+جـ\right)$$

$$ل(٣)-ل(١) = \frac{-١٥٣}{٢}+\frac{١}{٢} = \frac{-١٥٢}{٢} = -٧٦$$

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الأول: التكامل (التكامل المحدود)

تدريب (١): ص١٦٩

تدريب ١

جد قيمة كل مما يأتي:

١) $\int_{٤}^{١} \frac{٦}{\sqrt{س}}$ ءس

٢) $\int_{٠}^{١} ١٤(س)^{\frac{٤}{٣}}$ ءس

١)

$$= \int_{٤}^{١} ٦س^{-\frac{١}{٢}} ءس = ٦ \times ٢ \times س^{\frac{١}{٢}} \Big]_{٤}^{١}$$

$$= ١٢\sqrt{س} \Big]_{٤}^{١} = (١٢\sqrt{١}) - (١٢\sqrt{٤})$$

$$= (١ \times ١٢) - (٢ \times ١٢) = ١٢ - ٢٤ = -١٢$$

٢)

$$= \frac{١٤ \times ٣ \times س^{\frac{٧}{٣}}}{٧} \Big]_{٠}^{١} = ٦\sqrt[٣]{س^{٧}} \Big]_{٠}^{١}$$

$$= (٦\sqrt[٣]{١}) - (٦\sqrt[٣]{٠}) = ٦ - ٠ = ٦$$

تدريب (٢): ص١٧٠

تدريب ٢

إذا كان ق(-١) = ٣، ق(٢) = ٥، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-١}^{٢} ٤ق'(س)$ ءس.

$$\int_{-١}^{٢} ٤هـ'(س) ءس = ٤ \int_{-١}^{٢} هـ'(س) ءس$$

$$= ٤هـ(س) \Big]_{-١}^{٢} = ٤(هـ(٢) - هـ(-١))$$

$$= ٤(٥ - ٣) = ٤ \times ٢ = ٨$$

تدريب (٣): ص١٧٠

تدريب ٣

إذا كان $\int_{١}^{ب} ٦س$ ءس = ٩، فجد قيمة الثابت ب.

$$٣س^{٢} \Big]_{١}^{ب} = ٩$$

$$٣ب^{٢} - ٣ = ٩$$

$$٣ب^{٢} = ١٢$$

$$ب^{٢} = ٤ \qquad ب = \pm ٢$$

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الأول: التكامل (التكامل المحدود)

حل أسئلة نهاية الدرس (١٧١)

السؤال الأول: ص١٧١

١) احسب قيمة كل مما يأتي:

أ) $\int_{1}^{6} -2 \, ds$ ب) $\int_{1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{s}} \, ds$

جـ) $\int_{1}^{2} (2s + 8s^3 - 5s^4 + 7) \, ds$ د) $\int_{-2}^{2} (3s - 2)(s + 1) \, ds$

أ)

$$= -2s \Big]_{1}^{6}$$

$$= -2(6-1) = -2 \times 5 = -10$$

ب)

$$= \int_{8}^{1} s^{-\frac{1}{3}} \, ds = \frac{1}{8} \times 3 \times \frac{s^{\frac{2}{3}}}{2} \Big]_{8}^{1}$$

$$= \frac{3}{16} \times s^{\frac{2}{3}} \Big]_{8}^{1} = \frac{3}{16} \sqrt[3]{s^2} \Big]_{8}^{1}$$

$$= \left(1 \times \frac{3}{16}\right) - \left(4 \times \frac{3}{16}\right)$$

$$= \frac{3}{16} - \frac{12}{16} = \frac{-9}{16}$$

ج)

$$= s^2 + 2s^4 - s^5 + 7s \Big]_{0}^{2}$$

$$= 4 + 32 - 32 + 14 = 18$$

د)

$$= \int_{-2}^{2} \left(3s^2 + 3s - 2s - 2\right) ds$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(3s^2 + s - 2\right) ds$$

$$= s^3 + \frac{s^2}{2} - 2s \Big]_{-2}^{2} = (8+2+4) - (-8+2+4)$$

$$= 6 - -6 = 2 + 6 = 8$$

الفصل الأول: التكامل (التكامل المحدود)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (١٧١)

السؤال الثاني: ص١٧١

٢) إذا كان $\int_{-١}^{م} ٤ \, ءس = ٢٠$، فجد قيمة الثابت م.

$$٤س \Big]_{-١}^{م} = ٢٠$$

$$٤م + ٤ = ٢٠$$

$$٤م = ٢٠ - ٤$$

$$٤م = ١٦ \qquad م = ٤$$

السؤال الثالث: ص١٧١

٣) إذا كان الاقتران ق مُعرَّفًا على الفترة [١، ٥]، وكان ق$'$(س) = ٢س + ١، فجد قيمة ق(٥) – ق(١).

تكامل الطرفين

$$\int_{١}^{٥} و'(س) \, ءس = \int_{١}^{٥} (٢س + ١) \, ءس$$

$$و(س) \, ءس = س^{٢} + س \Big]_{١}^{٥}$$

$$= (٢٥ + ٥) - (١ + ١) = ٣٠ - ٢ = ٢٨$$

السؤال الرابع: ص١٧١

٤) احسب قيمة التكامل الآتي: $\int_{٢}^{٢} (٤س - ٦س^{٢} + ٣) \, ءس$

$$\int_{٢}^{٢} (٤س - ٦س^{٢} + ٣) \, ءس = \text{صفر (من خصائص التكامل)}$$

السؤال الخامس: ص١٧١

٥) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{١}^{٢} ٣س(٤ - ٢س^{٢}) \, ءس$

أ)

$$= \int_{١}^{٢} (١٢س - ٦س^{٣}) \, ءس = ٦س^{٢} - \frac{٣س^{٤}}{٢} \Big]_{١}^{٢} = ٦س^{٢} - \frac{٦س^{٤}}{٤} \Big]_{١}^{٢}$$

$$= (٢٤ - ٢٤) - (٦ - \frac{٣}{٢}) = ٠ - (\frac{١٢ - ٣}{٢}) = \frac{-٩}{٢}$$

الفصل الأول: التكامل (التكامل المحدود)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (١٧١)

السؤال الخامس: ص١٧١

٥) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

ب) $\int_{١}^{-١} (٢س - ٣)^{٢}\, ءس$

جـ) $\int_{٠}^{-٢} \frac{س^{٢} + ٦س - ٧}{س - ١}\, ءس$

ب)

$$= \frac{(٢س - ٣)^{٣}}{٣ \times ٢} \Big]_{١}^{-١} = \frac{(٢س - ٣)^{٣}}{٦} \Big]_{١}^{-١}$$

$$= \frac{(-٥)^{٣}}{٦} - \frac{(-١)^{٣}}{٦} = \frac{-١٢٥}{٦} + \frac{١}{٦}$$

$$= \frac{-١٢٤}{٦} = \frac{-٦٢}{٣}$$

جـ)

$$= \int_{٠}^{-٢} \frac{(س - ١)(س + ٧)}{س - ١}\, ءس$$

$$= \int_{٠}^{-٢} (س + ٧)\, ءس = \frac{س^{٢}}{٢} + ٧س \Big]_{٠}^{-٢}$$

$$= (٢ - ١٤) - ٠ = -١٢$$

السؤال السادس: ص١٧١

٦) إذا كان $\int_{٥}^{٢} ق(س)\, ءس = ١٣$، وكان ق(٥) = −١٧، فجد قيمة ق(٢).

$$\int_{٥}^{٢} هـ'(س)\, ءس = ١٣$$

$$هـ(س) \Big]_{٥}^{٢} = ١٣$$

$$هـ(٢) - هـ(٥) = ١٣$$

$$هـ(٢) - -١٧ = ١٣$$

$$هـ(٢) = ١٣ - ١٧ \qquad هـ(٢) = -٤$$

الفصل الأول: التكامل (خصائص التكامل المحدود)

تدريب (١): ص١٧٣

١)

$$= \frac{٥}{٢} \int_{-١}^{٢} ع(س)\,ود س$$

$$= \frac{٥}{٢} \times ٥ = \frac{٢٥}{٢}$$

٢)

$$\int_{-١}^{٢} ٢ل(س)\,ود س = -٢ \qquad \int_{-١}^{٢} ل(س)\,ود س = -١$$

$$= ٢ \int_{-١}^{٢} ع(س)\,ود س - ٣ \int_{-١}^{٢} ل(س)\,ود س - \int_{-١}^{٢} (٢س)\,ود س$$

$$= ٢ \times ٥ - ٣ \times -١ - \left[س^{٢} \right]_{-١}^{٢} = ١٠ + ٣ - (٤ - ١) = ١٣ - ٣ = ١٠$$

تدريب ١

إذا كان $\int_{-١}^{٢} ٢ل(س)\,ود س = -٢$، $\int_{-١}^{٢} ع(س)\,ود س = ٥$، فجد قيمة كل مما يأتي:

١) $\int_{-١}^{٢} \frac{٥\,ع(س)}{٢}\,ود س$ ٢) $\int_{-١}^{٢} (٢ع(س) - ٣ل(س) - ٢س)\,ود س$

تدريب (٢): ص١٧٥

$$\int_{-١}^{٢} \frac{هـ(س)}{٣}\,ود س = ٥$$

$$\int_{-١}^{٢} هـ(س)\,ود س = ١٥$$

١) $\int_{٢}^{-١} ٢هـ(س)\,ود س = ٢ \times -١٥ = -٣٠$

٢) $\int_{-١}^{٦} هـ(س)\,ود س = \int_{-١}^{٢} هـ(س)\,ود س - \int_{٢}^{٦} هـ(س)\,ود س$

$$= ١٥ + ٤ = ١٥ - \int_{٢}^{٦} هـ(س)\,ود س$$

$$\int_{٢}^{٦} هـ(س)\,ود س = ١٥ - ٤ = ١١$$

$$\int_{٦}^{٢} هـ(س)\,ود س = -١١$$

تدريب ٢

إذا كان $\int_{-١}^{٢} \frac{ق(س)}{٣}\,ود س = ٥$، $\int_{-١}^{٢} ق(س)\,ود س = ٤$، فجد قيمة كل مما يأتي:

١) $\int_{٢}^{-١} ٢ق(س)\,ود س$ ٢) $\int_{٦}^{٢} ق(س)\,ود س$

الفصل الأول: التكامل (خصائص التكامل المحدود)

تدريب (٣): ص١٧٥

تدريب ٣

إذا كان $\int_{٢}^{٣} (٣ق(س) - ٤)\,ds = ١٨$، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{٢}^{٣} ق(س)\,ds$

$$٣\int_{٢}^{٣} هـ(س)\,ds - \int_{٢}^{٣} ٤\,ds = ١٨$$

$$٣\int_{٢}^{٣} هـ(س)\,ds - [٤س]_{٢}^{٥} = ١٨$$

$$٣\int_{٢}^{٣} هـ(س)\,ds - ٤(٥-٢) = ١٨$$

$$٣\int_{٢}^{٣} هـ(س)\,ds - ١٢ = ١٨$$

$$٣\int_{٢}^{٣} هـ(س)\,ds = ٣٠ \qquad \int_{٢}^{٣} هـ(س)\,ds = ١٠$$

تدريب (٤): ص١٧٦

تدريب ٤

١) إذا كان $\int_{١٠}^{-٧} ق(س)\,ds = ٠$، فجد قيمة الثابت م.

٢) إذا كان $\int_{ن}^{١} (٢س - ٣)\,ds = ٠$، فجد قيمة الثابت ن.

١)

الحد الأول = الحد الثاني

$$م^{٣} + ١ = -٧$$

$$م^{٣} = -٨ \qquad م = -٢$$

٢)

$$[س^{٢} - ٣س]_{ن}^{١} = ٠$$

$$(١ - ٣) - (ن^{٢} - ٣ن) = ٠$$

$$-٢ - ن^{٢} + ٣ن = ٠$$

$$ن^{٢} - ٣ن + ٢ = ٠ \qquad (ن - ٢)(ن - ١) = ٠$$

$$ن = \{٢، ١\}$$

الفصل الأول: التكامل (خصائص التكامل المحدود)

حل أسئلة نهاية الدرس (١٧٧)

السؤال الأول: ص١٧٧

١) إذا كان $\int_{١}^{٤} ٢ق(س)\,ds = ١٢$، $\int_{١}^{٤} ق(س)\,ds = ٤$، فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\int_{١}^{٤} ٣ق(س)\,ds$ ب) $\int_{٤}^{١} ق(س)\,ds$

جـ) $\int_{٤}^{١} (ق(س) + ٢س)\,ds$

$$\int_{١}^{٤} ٢هـ(س)\,ds = ١٢ \quad \int_{١}^{٤} هـ(س)\,ds = ٦$$

أ)

$$٣\int_{٤}^{١} هـ(س)\,ds = ٣ \times -٦ = -١٨$$

ب)

$$\int_{١}^{٥} هـ(س)\,ds = \int_{١}^{٤} هـ(س)\,ds + \int_{٤}^{٥} هـ(س)\,ds$$

$$\int_{١}^{٥} هـ(س)\,ds = ٦ + ٤ = ١٠ \qquad \int_{٥}^{١} هـ(س)\,ds = -١٠$$

ج)

$$\int_{٥}^{٤} هـ(س)\,ds + \int_{٥}^{٤} (٢س)\,ds = -٤ + س^{٢} \Big]_{٥}^{٤} = -٤ + (١٦ - ٢٥)$$

$$= -٤ - ٩ = -١٣$$

السؤال الثاني: ص١٧٧

٢) إذا كان $\int_{-١}^{١} \frac{ل(س)}{٢}\,ds = ٣$، $\int_{٢}^{-١} (هـ(س) + ١)\,ds = ٥$، فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\int_{٢}^{-١} هـ(س)\,ds$

أ)

$$\int_{٢}^{-١} هـ(س)\,ds + \int_{٢}^{-١} (١)\,ds = ٥$$

$$\int_{٢}^{-١} هـ(س)\,ds + س \Big]_{٢}^{-١} = ٥$$

$$\int_{٢}^{-١} هـ(س)\,ds + (-١ - ٢) = ٥$$

$$\int_{٢}^{-١} هـ(س)\,ds = ٥ + ٣ = ٨$$

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الأول: التكامل (خصائص التكامل المحدود)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (١٧٧)

السؤال الثاني: ص١٧٧

٢) إذا كان $\int_{-١}^{٢} \frac{ل(س)}{٢}$ ء س = ٣، $\int_{-١}^{٢}$ (هـ(س) + ١) ء س = ٥، فجد قيمة كل مما يأتي:

$$\int_{-١}^{٢} \frac{ل(س)}{٢} ء س = ٣ \qquad \int_{-١}^{٢} ل(س) ء س = ٦$$

ب) $\int_{-١}^{٢}$ (٣هـ(س) − ٢س + ٣ل(س)) ء س

ب)

$$= ٣\int_{-١}^{٢} هـ(س) ء س - \int_{-١}^{٢} (٢س) ء س + ٣\int_{-١}^{٢} ل(س) ء س$$

$$= ٣\times \left[س^{٢} - ٨ - \right]_{-١}^{٢} + ٦\times ٣$$

$$= -٢٤ - (-٤ - ١) + ١٨$$

$$= -٢٤ - ٣ + ١٨ = -٢٧ + ١٨ = -٩$$

السؤال الثالث: ص١٧٧

٣) إذا كان $\int_{-١}^{٧+أ٥}$ ق(س) ء س = ٠، فجد قيمة الثابت أ.

$$أ٥ + ٧ = ١ - أ$$

$$أ٤ = -٨ \qquad أ = -٢$$

السؤال الرابع: ص١٧٧

٤) إذا كان $\int_{٣}^{م}$ (٢ − ٤س) ء س = ٠، فجد قيمة الثابت م.

$$\int_{٣}^{م} (٢ - ٤س) ء س = ٠$$

$$\left[٢س - ٢س^{٢} \right]_{٣}^{م} = ٠$$

$$(٢م - ٢م^{٢}) - (٦ - ١٨) = ٠$$

$$٢م - ٢م^{٢} + ١٢ = ٠ \qquad م^{٢} - م - ٦ = ٠ \quad \text{(القسمة على ٢)}$$

$$(م - ٣)(م + ٢) = ٠ \qquad م = \{-٢، ٣\}$$

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School"

الفصل الأول: التكامل (خصائص التكامل المحدود)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (١٧٧)

السؤال الخامس: ص١٧٧

٥) إذا كان $\int_{٤}^{١} (٣ق(س) - ٥)\,ds = ٩$، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{١}^{٤} (٢ق(س) + ١)\,ds$

$$٣\int_{٤}^{١} هـ(س)\,ds - \int_{٤}^{١} (٥)\,ds = ٩$$

$$٣\int_{٤}^{١} هـ(س)\,ds - ٥س \Big]_{٤}^{١} = ٩$$

$$٣\int_{٤}^{١} هـ(س)\,ds - ٥(١-٤) = ٩ \qquad ٣\int_{٤}^{١} هـ(س)\,ds + ١٥ = ٩$$

$$٣\int_{٤}^{١} هـ(س)\,ds = -٦ \qquad \int_{٤}^{١} هـ(س)\,ds = -٢ \qquad \int_{١}^{٤} هـ(س)\,ds = ٢$$

$$٢\int_{١}^{٤} هـ(س)\,ds + \int_{١}^{٤} (١)\,ds$$

$$= ٢\int_{١}^{٤} هـ(س)\,ds + س \Big]_{١}^{٤}$$

$$= ٢\int_{١}^{٤} هـ(س)\,ds + ٣$$

$$= ٢ \times ٢ + ٣ = ٤ + ٣ = ٧$$

السؤال السادس: ص١٧٧

٦) إذا كان $\int_{٠}^{ل} (٢س - ١)\,ds = ٦$، فجد قيمة الثابت ل.

$$س^{٢} - س \Big]_{٠}^{ل} = ٦$$

$$ل^{٢} - ل - ٠ = ٦$$

$$ل^{٢} - ل - ٦ = ٠ \qquad (ل - ٣)(ل + ٢) = ٠$$

$$ل = \{-٢، ٣\}$$

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الأول: التكامل (التكامل بالتعويض)

تدريب (١): ص١٧٩

تدريب ١

جد قيمة التكامل الآتي: $\int ٢١ (٣س^{٢} + ٤س)(س^{٣} + ٢س^{٢})^{٧}$ دس

نفرض $ص = س^{٣} + ٢س^{٢}$

$\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢} + ٤س$

$دس = \frac{دص}{٣س^{٢} + ٤س}$

$\int ٢١(٣س^{٢} + ٤س) ص^{٧} \frac{دص}{٣س^{٢} + ٤س}$

$\int ٢١ ص^{٧} دص = \frac{٢١ ص^{٨}}{٨} + جـ$

$= \frac{٢١(س^{٣} + ٢س^{٢})^{٨}}{٨} + جـ$

تدريب (٢): ص١٨٢

تدريب ٢

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

٤) $\int_{٠}^{٣} \frac{١}{\sqrt{٥س + ١}}$ دس

نفرض $ص = ٥س + ١$

$\frac{دص}{دس} = ٥$

$دس = \frac{دص}{٥}$

عند $س = ٣$ ، $ص = ١٦$

عند $س = ٠$ ، $ص = ١$

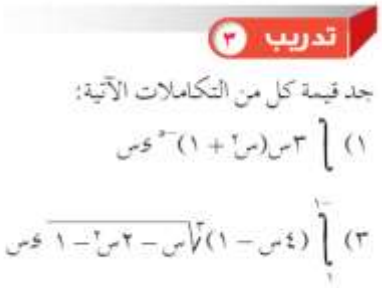
$\int_{١}^{١٦} \frac{١}{\sqrt{ص}} \frac{دص}{٥} = \frac{١}{٥} \int_{١}^{١٦} ص^{-\frac{١}{٢}}$ دص

$= \frac{١}{٥} \times ٢ ص^{\frac{١}{٢}} \Big]_{١}^{١٦} = \frac{٢}{٥} ص^{\frac{١}{٢}} \Big]_{١}^{١٦} = \frac{٢}{٥} \sqrt{ص} \Big]_{١}^{١٦}$

$= \frac{٢}{٥} \sqrt{١٦} - \frac{٢}{٥} \sqrt{١} = (\frac{٨}{٥} - \frac{٢}{٥}) = \frac{٦}{٥}$

الفصل الأول: التكامل (التكامل بالتعويض)

تدريب (٣): ص١٨٢



١)

نفرض ص $= س^{٢} + ١$

$\frac{د ص}{د س} = ٢س$

$د س = \frac{د ص}{٢س}$

$$\int ٣س ص^{-٥} \frac{د ص}{٢س} = \frac{٣}{٢} \int ص^{-٥} د ص$$

$$= \frac{٣}{٢} \times \frac{ص^{-٤}}{-٤} + جـ = \frac{-٣}{٨} \times ص^{-٤} + جـ$$

$$= \frac{-٣}{٨} \times (س^{٢} + ١)^{-٤} + جـ$$

٢)

نفرض ص $= ١ - س^{٢}$

$\frac{د ص}{د س} = -٢س$

$د س = \frac{د ص}{-٢س}$

$$\int ٢س قا^{٢} ص \frac{د ص}{-٢س} = -\int قا^{٢} ص د ص$$

$$= -ظا ص + جـ = -ظا(١ - س^{٢}) + جـ$$

٣)

نفرض ص $= س - ٢س^{٢} - ١$

$\frac{د ص}{د س} = ١ - ٤س$

$د س = \frac{د ص}{-٤س}$

عند س $= ١$ ، ص $= -٢$

عند س $= -١$ ، ص $= -٤$

$$\int_{-٢}^{-٤} (٤س - ١) ص^{\frac{١}{٢}} \frac{د ص}{١ - ٤س} = -\int_{-٢}^{-٤} ص^{\frac{١}{٢}} د ص$$

$$= \frac{-٣ ص^{\frac{٤}{٣}}}{٤} \Big]_{-٢}^{-٤} = \frac{-٣}{٤} \sqrt[٣]{ص^{٤}} \Big]_{-٢}^{-٤} = \frac{-٣}{٤} \left(\sqrt[٣]{٢٥٦} - \sqrt[٣]{١٦} \right)$$

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School"

الفصل الأول: التكامل (التكامل بالتعويض)

تدريب (٣): ص١٨٢

تدريب ٣

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

٤) $\int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{3س+1}}$ دس

٤)

نفرض ص $= 3س + 1$

$\frac{د ص}{د س} = 3$

$د س = \frac{1}{3} د ص$

عند س $= 0$ ، ص $= 1$

عند س $= 3$ ، ص $= 10$

$$\int_{1}^{10} ص^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{3} د ص = \left[\frac{ص^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{1}^{10}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\sqrt{10}^{3} - \sqrt{1}^{3} \right) = \frac{1}{3} \left(\sqrt{1000} - 1 \right) = \frac{1}{3} \left(10\sqrt{10} - 1 \right)$$

تدريب (٤): ص١٨٢

تدريب ٤

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

١) $\int (أس + ب)^{ن}$ دس ، حيث أ، ب ثابتان، أ $\neq 0$ ، ن $\neq -1$

٢) $\int$ جتا$(أس + ب)$ دس ، حيث أ، ب ثابتان، أ $\neq 0$

١)

نفرض ص $= أس + ب$

$\frac{د ص}{د س} = أ$

$د س = \frac{د ص}{أ}$

$$= \int ص^{ن} \frac{د ص}{أ} = \frac{1}{أ} \times \frac{ص^{ن+1}}{ن+1} + جـ$$

$$= \frac{(أس + ب)^{ن+1}}{أ(ن+1)} + جـ$$

٢)

نفرض ص $= أس + ب$

$\frac{د ص}{د س} = أ$

$د س = \frac{د ص}{أ}$

$$= \int جتاص \frac{د ص}{أ} = \frac{1}{أ} \int جتاص د ص = \frac{1}{أ} جاص + جـ$$

$$= \frac{جا(أس + ب)}{أ} + جـ$$

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الأول: التكامل (التكامل بالتعويض)

تدريب (٥): ص١٨٣

تدريب ٥

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

١) $\int_{-١}^{٢} ٦(١-٢س)^{٥}\,د س$

٢) $\int_{}^{} ١٢ جا(١-٤س)\,د س$

١)

نفرض ص $= ١-٢س$

$\frac{د ص}{د س} = -٢$

$د س = \frac{د ص}{-٢}$

عند س $= -١$ ، ص $= ٣$

عند س $= ٢$ ، ص $= -٣$

$$\int_{٣}^{-٣} ٦ص^{٥} \frac{د ص}{-٢} = -\int_{٣}^{-٣} ٣ص^{٥}\,د ص$$

$$= -٣\left((-٣)^{٦} - (٣)^{٦}\right) = ٠$$

٢)

نفرض ص $= ١-٤س$

$\frac{د ص}{د س} = -٤$

$د س = \frac{د ص}{-٤}$

$$\int ١٢ جاص \frac{د ص}{-٤} = -\int ٣ جاص د ص = -٣ \times -جتاص + جـ$$

$$= ٣جتاص + جـ = ٣جتا(١-٤س) + جـ$$

الفصل الأول: التكامل (التكامل بالتعويض)

حل أسئلة نهاية الدرس (١٨٤)

السؤال الأول: ص١٨٤

١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية:

أ) $\int (١-٢س)(س-س^{٢})^{٤}\,دس$ ب) $\int ٦س^{٢}\sqrt{(٢س^{٣}-٢)^{٢}}\,دس$

جـ) $\int (٢س-٣س^{٢})قا^{٢}(س^{٢}-س^{٣})\,دس$ د) $\int \frac{٣س-٩}{(س^{٢}-٦س)^{٢}}\,دس$

أ) $ص = س - س^{٢}$

ب) $ص = ٢س^{٣} - ٢$

ج) $ص = س^{٣} - س^{٢}$

د) $ص = س^{٢} - ٦س$

السؤال الثاني: ص١٨٤

٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int \sqrt{(٣س-٢)^{٢}}\,دس$ ب) $\int (س-١)(٢س^{٢}-٤س+١)^{٥}\,دس$

أ)

نفرض $ص = ٣س - ٢$

$\frac{دص}{دس} = ٣$

$دس = \frac{دص}{٣}$

$$\int ص^{\frac{٢}{٣}} \frac{دص}{٣} = \frac{١}{٣}\int ص^{\frac{٢}{٣}} دص = \frac{١}{٣}\times ٣ \times \frac{ص^{\frac{٥}{٣}}}{٥} + جـ$$

$$= \frac{ص^{\frac{٥}{٣}}}{٥} + جـ = \frac{(٣س-٢)^{\frac{٥}{٣}}}{٥} + جـ$$

ب)

نفرض $ص = ٢س^{٢} - ٤س + ١$

$\frac{دص}{دس} = ٤س - ٤$

$دس = \frac{دص}{٤س-٤}$

$$\int (س-١)ص^{٥}\frac{دص}{٤س-٤} = \int \frac{(س-١)}{٤(س-١)}ص^{٥}\,دص$$

$$= \frac{١}{٤}\int ص^{٥}دص = \frac{١}{٤}\times\frac{ص^{٦}}{٦} + جـ = \frac{ص^{٦}}{٢٤} + جـ$$

$$= \frac{(٢س^{٢}-٤س+١)^{٦}}{٢٤} + جـ$$

الفصل الأول: التكامل (التكامل بالتعويض)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (١٨٤)

السؤال الثاني: ص١٨٤

٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

ج) $\int_{\text{ط}}^{\text{ب}} ٢\,\text{قا}^{٢}(٢-\text{س})\,\text{د}\text{س}$ د) $\int_{\text{ط}}^{\text{ب}} ٢\text{س}^{٢}\,\text{جا}(\text{س}^{٤}+١)\,\text{د}\text{س}$

ج)

نفرض ص $= ٢-$ س

$\frac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\text{س}} = -١$

$\text{د}\text{س} = \frac{\text{د}\text{ص}}{-١}$

$$\int ٢\,\text{قا}^{٢}\text{ص}\,\frac{\text{د}\text{ص}}{-١} = -\int ٢\,\text{قا}^{٢}\text{ص}\,\text{د}\text{ص}$$

$$= -٢\,\text{ظا ص}\,\text{د}\text{ص} = -٢\,\text{ظا}(٢-\text{س}) + \text{جـ}$$

د)

نفرض ص $= \text{س}^{٤} + ١$

$\frac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\text{س}} = ٤\text{س}^{٣}$

$\text{د}\text{س} = \frac{\text{د}\text{ص}}{٤\text{س}^{٣}}$

$$\int ٢\text{س}^{٣}\,\text{جا ص}\,\frac{\text{د}\text{ص}}{٤\text{س}^{٣}} = \frac{١}{٢}\int \text{جا ص}\,\text{د}\text{ص}$$

$$= -\frac{١}{٢}\,\text{جتا ص} + \text{جـ} = -\frac{١}{٢}\,\text{جتا}(\text{س}^{٤}+١) + \text{جـ}$$

السؤال الثالث: ص١٨٤

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{٠}^{٢} \sqrt{٤\text{س}+١}\,\text{د}\text{س}$ ب) $\int_{-١}^{١} ٣\text{س}^{٢}(\text{س}^{٣}-١)^{٢}\,\text{د}\text{س}$

أ)

$$= \int_{٠}^{٢} (٤\text{س}+١)^{\frac{١}{٢}}\,\text{د}\text{س} = \left[\frac{٢(٤\text{س}+١)^{\frac{٣}{٢}}}{٤\times٣}\right]_{٠}^{٢}$$

$$= \left[\frac{٢(٤\text{س}+١)^{\frac{٣}{٢}}}{١٢}\right]_{٠}^{٢} = \frac{١}{٦}\left[\sqrt{(٤\text{س}+١)^{٣}}\right]_{٠}^{٢}$$

$$= \frac{١}{٦}\left(\sqrt{٧٢٩} - \sqrt{١}\right) = \frac{١}{٦}(٢٧-١) = \frac{١}{٦}\times٢٦ = \frac{٢٦}{٦} = \frac{١٣}{٣}$$

ب) $\int_{-١}^{١} ٣\text{س}^{٢}\left(\text{س}^{٣}-١\right)^{٣}\,\text{د}\text{س}$ = صفر (من خصائص التكامل)

الفصل الأول: التكامل (التكامل بالتعويض)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (١٨٤)

السؤال الثالث: ص١٨٤

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

جـ) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} ٢س\sqrt{س^٢ - ١}\ \text{د}س$ د) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \frac{٣ - ٢س}{(س^٢ - ٣س)^٢}\ \text{د}س$

ج)

نفرض $ص = س^٢ - ١$

$\frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = ٢س$

$\text{د}س = \frac{\text{د}ص}{٢س}$

عند $س = ١$ ، $ص = ٠$

عند $س = ٠$ ، $ص = -١$

$$\int_{-١}^{١} ٢س\sqrt{ص}\ \frac{\text{د}ص}{٢س} = \int_{-١}^{١} ص^{\frac{١}{٣}}\ \text{د}ص$$

$$= \frac{٣}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}} \Big]_{-١}^{١} = \frac{٣}{٤}\left(\sqrt[٣]{١^٤} - \sqrt[٣]{(-١)^٤}\right) = ١ \times \frac{٣}{٤} = \frac{٣}{٤}$$

د)

نفرض $ص = س^٢ - ٣س$

$\frac{\text{د}ص}{\text{د}س} = ٢س - ٣$

$\text{د}س = \frac{\text{د}ص}{٢س - ٣}$

عند $س = ١$ ، $ص = -٢$

عند $س = ٢$ ، $ص = -٢$

$$\int_{-٢}^{-٢} (٣ - ٢س) ص^{-٢}\ \frac{\text{د}ص}{٢س - ٣} = -\int_{-٢}^{-٢} ص^{-٢}\ \text{د}ص = \text{صفر (من خصائص التكامل)}$$

الفصل الأول: التكامل (التكامل بالتعويض)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (١٨٤)

السؤال الرابع: ص١٨٤

٤) إذا علمت أن ق(−٨) = ٥، ق(٢٧) = −٦، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-٨}^{٢٧} ٣س^{٢}\, ق'(س^{٣})\, ءس$

نفرض ص = $س^{٣}$

$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢}$

$ءس = \frac{ءص}{٣س^{٢}}$

عند س = −٢ ، ص = −٨

عند س = ٣ ، ص = ٢٧

$$\int_{-٨}^{٢٧} ٣س^{٢}\, هـ'(س)\frac{ءص}{٣س^{٢}} = \int_{-٨}^{٢٧} هـ'(ص)\, ءص$$

$$= هـ(ص)\Big]_{-٨}^{٢٧} = هـ(٢٧) - هـ(٨) = -٦ - ٥ = -١١$$

السؤال الخامس: ص١٨٤

٥) إذا علمت أن $\int_{٥}^{١٠} ق(س)\, ءس = ٣$، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{١٠}^{٢} ٨س\, ق(س^{٢}+١)\, ءس$

نفرض ص = $س^{٢} + ١$

$\frac{ءص}{ءس} = ٢س$

$ءس = \frac{ءص}{٢س}$

عند س = −١ ، ص = ٢

عند س = ٢ ، ص = ٥

$$\int_{٢}^{٥} ٨س\, هـ(ص)\frac{ءص}{٢س} = ٤\int_{٢}^{٥} هـ(ص)\, ءص$$

$$= ٤ \times -٣ = -١٢$$

الفصل الأول: التكامل (التكامل بالتعويض)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (١٨٤)

السؤال السادس: ص١٨٤

٦) جد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_{\text{أ}} \text{٢س}\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{٩}}\ \text{د س}$$

نفرض $\text{ص} = \text{س}^{\text{٢}} + \text{٩}$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{٢س}$$

$$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{\text{٢س}}$$

عند $\text{س} = \text{٠}$ ، $\text{ص} = \text{٩}$

عند $\text{س} = \text{٤}$ ، $\text{ص} = \text{٢٥}$

$$\int_{\text{٩}}^{\text{٢٥}} \text{٢س}\sqrt{\text{ص}}\ \frac{\text{د ص}}{\text{٢س}} = \int_{\text{٩}}^{\text{٢٥}} \sqrt{\text{ص}}\ \text{د ص} = \int_{\text{٩}}^{\text{٢٥}} \text{ص}^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}\ \text{د ص}$$

$$= \left[\frac{\text{٢ص}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}}{\text{٣}}\right]_{\text{٩}}^{\text{٢٥}} = \left(\sqrt[\text{٣}]{\text{٢٥}}\right)^{\text{٣}} - \left(\sqrt[\text{٣}]{\text{٩}}\right)^{\text{٣}}\Big)^{\frac{\text{٢}}{\text{٣}}} = \left(\sqrt[\text{٣}]{\text{٢٥}} - \sqrt[\text{٣}]{\text{٩}}\right)^{\frac{\text{٢}}{\text{٣}}}$$

$$= (\text{١٢٥} - \text{٢٧})^{\frac{\text{٢}}{\text{٣}}} = \text{٩٨} \times \frac{\text{٢}}{\text{٣}} = \frac{\text{١٩٦}}{\text{٣}}$$

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الثاني: تطبيقات التكامل (تطبيقات هندسية)

تدريب (١): ص١٨٦

تدريب ١

جد قاعدة الاقتران ق، علمًا بأن منحناه يمر بالنقطة (−١، ٢)، وأن ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س، ص) يعطى بالقاعدة:

ق′(س) = ٢س − ١

$ق = هـ'(س) = ٢س - ١$

$\int هـ'(س) ٤س = \int (٢س - ١) ٤س$

$هـ(س) = س^{٢} - س + جـ$

$هـ(-١) = ٢$

$١ + ١ + جـ = ٢$

$٢ + جـ = ٢$ $\quad جـ = ٠$

$هـ(س) = س^{٢} - س$

تدريب (٢): ص١٨٧

تدريب ٢

جد قيمة ق(١٤)، علمًا بأن ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س، ص) يعطى بالقاعدة: ق′(س) = ٦ $\sqrt[٣]{٢س - ١}$، وأن منحناه يمر بالنقطة (٠، ٥).

$ق = هـ'(س) = ٦ \sqrt[٣]{٢س - ١}$

$\int هـ'(س) ٤س = \int ٦ (٢س - ١)^{\frac{١}{٣}} ٤س$

$هـ(س) = ٦ \times ٣ \times \frac{(٢س - ١)^{\frac{٤}{٣}}}{٤ \times ٢} + جـ$ $\quad هـ(س) = \frac{٩}{٤} \times (٢س - ١)^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

$هـ(٠) = ٥$

$٥ = \frac{٩}{٤} \times \left(\sqrt[٣]{-١} \right)^{٤} + جـ$ $\quad ٥ = \frac{٩}{٤} + جـ$ $\quad جـ = ٥ - \frac{٩}{٤}$

$جـ = \frac{٢٠ - ٩}{٤}$ $\quad جـ = \frac{١١}{٤}$

$هـ(س) = \frac{٩}{٤} \sqrt[٣]{(٢س - ١)^{٤}} + \frac{١١}{٤}$

$هـ(١٤) = \frac{٩}{٤} \sqrt[٣]{(٢٧)^{٤}} + \frac{١١}{٤}$

$= \frac{٩}{٤} \times ٣^{٤} + \frac{١١}{٤} = \frac{٩}{٤} \times ٨١ + \frac{١١}{٤}$

$= \frac{٧٢٩}{٤} + \frac{١١}{٤} = \frac{٧٤٠}{٤} = ١٨٥$

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الثاني: تطبيقات التكامل (تطبيقات هندسية)

حل أسئلة نهاية الدرس (١٨٨)

السؤال الأول: ص١٨٨

١) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س، ص) يساوي (٦ − ٢س + ٩س^{٣})، فجد قاعدة الاقتران ق، علمًا بأن ق(٠) = ٥

$$م = هـ'(س) = (٦ - ٢س + ٩س^{٣})$$

$$\int هـ'(س)\,دس = \int (٦ - ٢س + ٩س^{٣})\,دس$$

$$هـ(س) = ٦س - س^{٢} + \frac{٩س^{٤}}{٤} + جـ$$

$$هـ(٠) = ٥ \qquad ٥ = ٠ + ٠ - ٠ + جـ \qquad جـ = ٥$$

$$هـ(س) = ٦س - س^{٢} + \frac{٩س^{٤}}{٤} + ٥$$

السؤال الثاني: ص١٨٨

٢) جد قاعدة الاقتران ق، إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = ق(س) عند النقطة (س، ص) يعطى بالقاعدة: ق'(س) = $\frac{٢س}{\sqrt[٣]{س^{٢} + ٨}}$ ، وكان منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (٠، ٤).

$$م = هـ'(س) = \frac{٢س}{\sqrt[٣]{س^{٢} + ٨}}$$

نفرض ص = س^{٢} + ٨

$$\frac{دص}{دس} = ٢س$$

$$دس = \frac{دص}{٢س}$$

$$\int هـ'(س)\,دس = \int (٢س)(ص)^{-\frac{١}{٣}}\,\frac{دص}{٢س}$$

$$هـ(س) = \int (٢س)(ص)^{-\frac{١}{٣}}\,\frac{دص}{٢س}$$

$$هـ(س) = \int (ص)^{-\frac{١}{٣}}\,دص \qquad هـ(س) = \frac{٣ص^{\frac{٢}{٣}}}{٢} + جـ$$

$$هـ(س) = \frac{٣}{٢}ص^{\frac{٢}{٣}} + جـ \qquad هـ(س) = \frac{٣}{٢}(س^{٢} + ٨)^{\frac{٢}{٣}} + جـ$$

$$هـ(س) = \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{(س^{٢} + ٨)^{٢}} + جـ$$

$$هـ(٠) = ٤ \qquad ٤ = \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{٦٤} + جـ \qquad ٤ = \frac{٣}{٢} \times ٤ + جـ \qquad جـ = ٤ - ٦ = -٢$$

$$هـ(س) = \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{(س^{٢} + ٨)^{٢}} - ٢$$

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الثاني: تطبيقات التكامل (تطبيقات هندسية)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (١٨٨)

السؤال الثالث: ص١٨٨

٣) جد قيمة ق(١)، علمًا بأن ميل المماس للمنحنى ص = ق(س) عند النقطة (س، ص) يساوي ٢٥(٥س + ٤)^{٤}، وأن منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (−١، ٧).

$$م = هـ'(س) = ٢٥(٥س + ٤)^{٤}$$

$$\int هـ'(س)\,د س = \int ٢٥(٥س + ٤)^{٤}\,د س$$

$$هـ(س) = ٢٥ \times \frac{(٥س + ٤)^{٥}}{٥ \times ٥} + جـ \qquad هـ(س) = (٥س + ٤)^{٥} + جـ$$

$$هـ(−١) = ٧$$

$$٧ = −١ + جـ \qquad جـ = ٧ + ١ \qquad جـ = ٨$$

$$هـ(س) = (٥س + ٤)^{٥} + ٨$$

$$هـ(١) = ٩^{٥} + ٨ = ٥٩٠٤٩ + ٨ = ٥٩٠٥٧$$

السؤال الرابع: ص١٨٨

٤) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ل عند النقطة (س، ص) يعطى بالقاعدة: ل'(س) = ٢س(٤ − ٣س)، فجد قاعدة الاقتران ل، علمًا بأن منحناه يمر بالنقطة (٠، ٣).

$$م = ل'(س) = ٢س(٤ − ٣س)$$

$$ل'(س) = ٨س − ٦س^{٢}$$

$$\int ل'(س)\,د س = \int (٨س − ٦س^{٢})\,د س$$

$$ل(س) = ٤س^{٢} − ٢س^{٣} + جـ$$

$$ل(٠) = ٣$$

$$٣ = ٠ − ٠ + جـ \qquad جـ = ٣$$

$$ل(س) = ٤س^{٢} − ٢س^{٣} + ٣$$

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الثاني: تطبيقات التكامل (تطبيقات هندسية)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (١٨٨)

السؤال الخامس: ص١٨٨

٥) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران هـ يعطى بالقاعدة هـ'(س) = $\frac{٢س^{٢}-٥س}{س}$ ، س ≠ ٠، فجد هـ(٢)، علمًا بأن منحنى الاقتران هـ يمر بالنقطة (–١، ٥).

$$هـ'(س) = \frac{٢س^{٢}-٥س}{س} = ٢س-٥ \quad ،س \neq ٠$$

$$هـ(س) = \int \frac{٢س^{٢}-٥س}{س} \, دس$$

$$هـ(س) = \int \frac{س(٢س-٥)}{س} \, دس$$

$$هـ(س) = \int (٢س-٥) \, دس$$

$$هـ(س) = س^{٢} - ٥س + جـ$$

$$هـ(-١) = ٥$$

$$١ + ٥ + جـ = ٥ \qquad ٦ + جـ = ٥$$

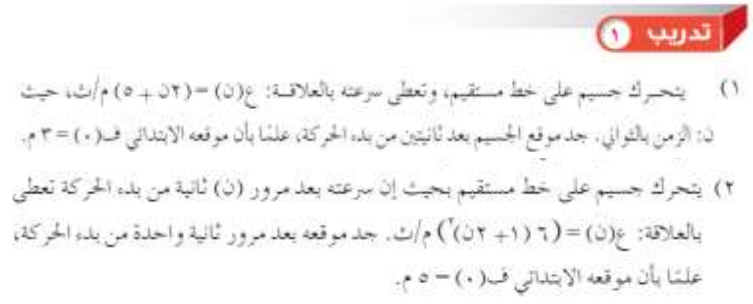
$$جـ = ٥ - ٦ \qquad جـ = -١$$

$$هـ(س) = س^{٢} - ٥س - ١$$

$$هـ(٢) = ٤ - ١٠ - ١ = -٧$$

الفصل الثاني: تطبيقات التكامل (تطبيقات فيزيائية)

تدريب (١): ص١٩٠



تدريب ١

١) يتحرك جسيم على خط مستقيم، وتعطى سرعته بالعلاقة: ع(ن) = (٢ن + ٥) م/ث، حيث ن: الزمن بالثواني. جد موقع الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة، علمًا بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٣ م.

٢) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة تعطى بالعلاقة: ع(ن) = (٦ (١ + ٢ن)^{٢}) م/ث. جد موقعه بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة، علمًا بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٥ م.

١)

$$ف(ن) = \int ع(ن)\,د ن$$

$$ف(ن) = \int (٢ن - ٥)\,د ن$$

$$ف(ن) = ن^{٢} - ٥ن + جـ$$

$$ف(٠) = ٣$$

$$٣ = جـ + ٠ - ٠ \qquad جـ = ٣$$

$$ف(ن) = ن^{٢} - ٥ن + ٣$$

$$ف(٢) = ٤ - ١٠ + ٣ = -٣ \text{ م}$$

٢)

$$ف(ن) = \int ع(ن)\,د ن$$

$$ف(ن) = \int ٦(١ - ٢ن)^{٢}\,د ن$$

$$ف(ن) = \frac{٦(١ - ٢ن)^{٣}}{-٢ \times ٣} + جـ$$

$$ف(ن) = -(١ - ٢ن)^{٣} + جـ$$

$$ف(٠) = ٥$$

$$-١ + جـ = ٥ \qquad جـ = ١ + ٥ \qquad جـ = ٦$$

$$ف(ن) = -(١ - ٢ن)^{٣} + ٦$$

$$ف(١) = -(-١)^{٣} + ٦ = ١ + ٦ = ٧ \text{ م}$$

الفصل الثاني: تطبيقات التكامل (تطبيقات فيزيائية)

تدريب (٢): ص١٩١

تدريب ٢

يتحرك جسيم على خط مستقيم، وبتسارع ثابت مقداره ت(ن) = ١٢ م/ث^{٢}. إذا كانت سرعته الابتدائية ع(٠) = ٥ م/ث، وموقعه الابتدائي ف(٠) = ٣ م، فجد:

١) سرعة الجسيم بعد مرور أربع ثوانٍ من بدء الحركة.

٢) موقع الجسيم بعد مرور ثلاث ثوانٍ من بدء الحركة.

١)

$$ع(ن) = \int ت(ن)\,د ن$$

$$ع(ن) = \int ١٢\,د ن$$

$$ع(ن) = ١٢ن + جـ$$

$$ع(٠) = ٥$$

$$٥ = ٠ + جـ \qquad جـ = ٥$$

$$ع(ن) = ١٢ن + ٥$$

$$ع(٤) = ١٢ \times ٤ + ٥$$

$$= ٤٨ + ٥ = ٤٣ \text{ م}$$

٢)

$$ف(ن) = \int ع(ن)\,د ن$$

$$ف(ن) = \int (١٢ن + ٥)\,د ن$$

$$ف(ن) = ٦ن^{٢} + ٥ن + جـ$$

$$ف(٠) = ٣$$

$$٣ = ٠ + ٠ + جـ \qquad جـ = ٣$$

$$ف(ن) = ٦ن^{٢} + ٥ن + ٣$$

$$ف(٣) = ٥٤ + ١٥ + ٣ = ٧٢ \text{ م}$$

الفصل الثاني: تطبيقات التكامل (تطبيقات فيزيائية)

حل أسئلة نهاية الدرس (١٩٢)

السؤال الأول: ص١٩٢

١) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور ن ثانية من بدء حركته تعطى بالعلاقة: ع(ن) = (١٢ جتا(٢ن − ١)) م/ث. جد القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة.

$$ف(ن) = \int ع(ن)\,د ن$$

$$ف(ن) = ١٢ \int جتا(٢ن - ١)\,د ن$$

$$ف(ن) = ١٢ \times \frac{جا(٢ن - ١)}{٢} + جـ$$

$$ف(ن) = ٦ جا(٢ن - ١) + جـ$$

السؤال الثاني: ص١٩٢

٢) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث إن سرعتها بعد مرور ن ثانية من بدء حركتها تعطى بالعلاقة: ع(ن) = (٤ن + ٨) م/ث. جد موقع النقطة المادية بعد مرور أربع ثوانٍ من بدء حركتها، علمًا بأن موقعها الابتدائي ف(٠) = ٢م.

$$ف(ن) = \int ع(ن)\,د ن$$

$$ف(ن) = \int (٤ن + ٨)\,د ن$$

$$ف(ن) = ٢ن^{٢} + ٨ن + جـ$$

$$ف(٠) = ٢$$

$$٢ = ٠ + ٠ + جـ \qquad جـ = ٢$$

$$ف(ن) = ٢ن^{٢} + ٨ن + ٢$$

$$ف(٤) = ٣٢ + ٣٢ + ٢ = ٦٦ \text{ م}$$

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الثاني: تطبيقات التكامل (تطبيقات فيزيائية)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (١٩٢)

السؤال الثالث: ص١٩٢

٣) إذا كان تسارع جسيم يسير على خط مستقيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة يعطى بالعلاقة: ت(ن) = ٤٨(١− ٢ن)^{٣} م/ث^{٢}، وكان موقعه الابتدائي ف(٠) = ٣م، وسرعته الابتدائية ع(٠) = ٢ م/ث، فجد:

أ) سرعة الجسيم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة.

ب) موقع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

أ)

$$ع(ن) = \int ت(ن)\,دن$$

$$ع(ن) = \int ٤٨(١-٢ن)^{٣}\,دن$$

$$ع(ن) = ٤٨ \times \frac{(١-٢ن)^{٤}}{٤ \times -٢} + جـ$$

$$ع(ن) = -٦(١-٢ن)^{٤} + جـ$$

$$ع(٠) = ٢$$

$$-٦ + جـ = ٢ \qquad جـ - ٦ = ٢ \qquad جـ = ٨$$

$$ع(ن) = -٦(١-٢ن)^{٤} + ٨$$

$$ع(١) = -٦ \times ١ + ٨ = -٦ + ٨ = ٢ \text{ م/ث}$$

ب)

$$ف(ن) = \int ع(ن)\,دن$$

$$ف(ن) = \int \left(-٦(١-٢ن)^{٤} + ٨\right) دن$$

$$ف(ن) = -٦ \times \frac{(١-٢ن)^{٥}}{٥ \times -٢} + ٨ن + جـ$$

$$ف(ن) = \frac{٣}{٥}(١-٢ن)^{٥} + ٨ن + جـ$$

$$ف(٠) = ٣$$

$$\frac{٣}{٥} + ٠ + جـ = ٣ \qquad جـ = ٣ - \frac{٣}{٥} \qquad جـ = \frac{١٢}{٥}$$

$$ف(ن) = \frac{٣}{٥}(١-٢ن)^{٥} + ٨ن + \frac{١٢}{٥}$$

$$ف(٢) = \frac{٣}{٥} \times -٢٤٣ + ١٦ + \frac{١٢}{٥}$$

$$= \frac{-٧٢٩}{٥} + ١٦ + \frac{١٢}{٥}$$

$$= \frac{-٧١٧}{٥} + ١٦ = \frac{-٦٣٧}{٥} \text{ م}$$

الفصل الثاني: تطبيقات التكامل (تطبيقات فيزيائية)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (١٩٢)

السؤال الرابع: ص١٩٢

٤) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة تعطى بالقاعدة: ع(ن) = (٣ن − ١)(٤ن + ١) م/ث. جد:

أ) القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة.

ب) موقع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة، علمًا بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٧م.

أ)

$$ف(ن) = \int ع(ن)\,د ن$$

$$ف(ن) = \int (٣ن - ١)(٤ن + ١)\,د ن$$

$$ف(ن) = \int (١٢ن^{٢} - ن - ١)\,د ن$$

$$ف(ن) = ٤ن^{٣} - \frac{ن^{٢}}{٢} - ن + جـ$$

ب)

$$ف(٠) = ٧$$

$$٧ = ٠ - ٠ - ٠ + جـ \qquad جـ = ٧$$

$$ف(ن) = ٤ن^{٣} - \frac{ن^{٢}}{٢} - ن + ٧$$

$$ف(٢) = ٣٢ - ٢ - ٢ + ٧ = ٣٥ \text{ م}$$

الفصل الثاني: تطبيقات التكامل (المساحة)

تدريب (١): ص١٩٨

١)

$١٢ - ٤س = ٠$

$٤س = ١٢$

$س = ٣$ **(خارج الفترة)**

$$م = \left| \int_{١}^{٢} ق(س) \, د س \right| = \int_{١}^{٢} (١٢ - ٤س) \, د س$$

$$= [١٢س - ٢س^{٢}]_{١}^{٢} = (٢٤ - ٨) - (١٢ - ٢) = |١٦ - ١٠| = ٦ \text{ وحدة مربعة}$$

٢)

$٣س(س - ٤) = ٠$

$٣س = ٠ \qquad س - ٤ = ٠$

$س = ٠ \qquad س = ٤$ **(خارج الفترة)**

$$م = \left| \int_{٠}^{٢} ق(س) \, د س \right| = \int_{٠}^{٢} (٣س^{٢} - ١٢س) \, د س$$

$$= [س^{٣} - ٦س^{٢}]_{٠}^{٢} = (٨ - ٢٤) - (٠) = |-١٦| = ١٦ \text{ وحدة مربعة}$$

٣)

$٢س = ٦$

$س = ٣$ **(ضمن الفترة)**

$$م_{١} = \left| \int_{١}^{٣} ق(س) \, د س \right| = \int_{١}^{٣} (٦ - ٢س) \, د س$$

$$= [٦س - س^{٢}]_{١}^{٣} = (١٨ - ٩) - (٦ - ١) = ٩ - ٥ = ٤ \text{ وحدات مربعة}$$

$$م_{٢} = \left| \int_{٣}^{٤} ق(س) \, د س \right| = \int_{٣}^{٤} (٦ - ٢س) \, د س$$

$$= [٦س - س^{٢}]_{٣}^{٤} = (١٦ - ٢٤) - (١٨ - ٩) = ٨ - ٩ = |-١| = ١ \text{ وحدة مربعة}$$

المساحة الكلية = $م = م_{١} + م_{٢}$ $= ٤ + ١ = ٥$ **وحدات مربعة**

تدريب ١

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س)، ومحور السينات على الفترة المحددة في كل مما يأتي:

١) ق(س) = ١٢ – ٤س ، على الفترة [١، ٢].

٢) ق(س) = ٣س^{٢} – ١٢س ، على الفترة [٠، ٢].

٣) ق(س) = ٦ – ٢س ، على الفترة [١، ٤].

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الثاني: تطبيقات التكامل (المساحة)

تدريب (٢): ص١٩٨

تدريب ٢

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) = س^{٢} − ٢س − ٣، ومحور السينات.

س^{٢} − ٢س − ٣ = ٠

(س − ٣)(س + ١) = ٠

س = ٣ س = −١ (حدود التكامل)

$$م = \left| \int_{-١}^{٣} (س^{٢} - ٢س - ٣)\,دس \right|$$

$$= \left[\frac{س^{٣}}{٣} - س^{٢} - ٣س \right]_{-١}^{٣} = (٩ - ٩ - ٩) - (-\frac{١}{٣} + ١ + ٣)$$

$$= (-٩ + ١ + ٣) + \frac{١}{٣} = -١١ + \frac{١}{٣} = \frac{-٣٣+١}{٣} = \left|\frac{-٣٢}{٣}\right| = \frac{٣٢}{٣}$$ وحدة مربعة

تدريب (٣): ص١٩٩

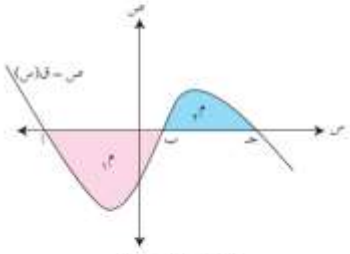
تدريب ٣

يمثل الشكل (٤ − ١٠) منحنى الاقتران ص = ق(س). فإذا كانت المساحة م$_{١}$ = ٨ وحدات مربعة، والمساحة م$_{٢}$ = ٥ وحدات مربعة، فجد قيمة كل مما يأتي، مبرّرًا إجابتك:

١) $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس$

٢) $\int_{ب}^{جـ} ق(س)\,دس$

٣) $\int_{أ}^{جـ} ق(س)\,دس$



الشكل (٤ − ١٠).

٤) مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات على الفترة [أ، جـ].

١)

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس = -٨$$

٢)

$$\int_{ب}^{جـ} ق(س)\,دس = ٥$$

٣)

$$\int_{أ}^{جـ} ق(س)\,دس = \int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس + \int_{ب}^{جـ} ق(س)\,دس$$

$$= -٨ + ٥ = -٣$$

٤)

$$م = م_{١} + م_{٢}$$

$$= |-٨| + |٥| = ٨ + ٥ = ١٣$$ وحدة مربعة

الفصل الثاني: تطبيقات التكامل (المساحة)

حل أسئلة نهاية الدرس (٢٠٠)

السؤال الأول: ص٢٠٠

١) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س)، ومحور السينات والمستقيمين المحددين في كل مما يأتي:

أ) ق(س) = ١٢ ، س = −١ ، س = ٢

ب) ق(س) = ٥ − ٢س ، س = −٢ ، س = ٢

جـ) ق(س) = ٣س^{٢} − ٣ ، س = −٤ ، س = −٢

أ)

$$م = \int_{-١}^{٢} (١٢)\,دس = ١٢س \Big]_{-١}^{٢} = (٢٤ + ١٢) = ٣٦ \text{ وحدة مربعة}$$

ب)

$$م = \int_{-٢}^{٢} (٥ - ٢س)\,دس = ٥س - س^{٢} \Big]_{-٢}^{٢} = (١٠ - ٤) - (-١٠ - ٤)$$

$$= ٦ + ١٤ = ٢٠ \text{ وحدة مربعة}$$

جـ)

$$م = \int_{-٤}^{-٢} (٣س^{٢} - ٣)\,دس = س^{٣} - ٣س \Big]_{-٤}^{-٢} = (-٨ + ٦) - (-٦٤ + ١٢)$$

$$= -٢ + ٥٢ = ٥٠ \text{ وحدة مربعة}$$

السؤال الثاني: ص٢٠٠

٢) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س)، ومحور السينات على الفترة المحددة في كل مما يأتي:

أ) ق(س) = ٦ − ٦س^{٢} ، على الفترة [−٢، ٠].

أ)

$$٦ - ٦س^{٢} = ٠$$

$$٦س^{٢} = ٦$$

$$س^{٢} = ١$$

$$س = -١ \qquad س = ١ \text{ (خارج الفترة)}$$

$$م = \int_{-٢}^{٠} |ق(س)\,دس| = \left|\int_{-٢}^{-١} (٦ - ٦س^{٢})\,دس\right| + \left|\int_{-١}^{٠} (٦ - ٦س^{٢})\,دس\right|$$

$$= ٦س - ٢س^{٣} \Big]_{-٢}^{-١} + ٦س - ٢س^{٣} \Big]_{-١}^{٠}$$

$$= |(-٦ + ٢) - (-١٢ + ١٦)| + |(٠) - (-٦ + ٢)|$$

$$= |-٤| + |٤ - ٨| = ٤ + ٤ = ١٢ \text{ وحدة مربعة}$$

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الثاني: تطبيقات التكامل (المساحة)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (٢٠٠)

السؤال الثاني: ص٢٠٠

٢) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س)، ومحور السينات على الفترة المحددة في كل مما يأتي:

ب) ق(س) = ٤س^{٣} ، على الفترة [−١، ١].

جـ) ق(س) = ٣س^{٢} − ٤٨ ، على الفترة [٣، ٥].

د) ق(س) = − س^{٢} − ٤ ، على الفترة [−١، ١].

ب)

$٤س^{٣} = ٠$

$س = ٠$ **(خارج الفترة)**

$$م = \int_{-١}^{١} |ق(س)| د س = \left| \int_{-١}^{٠} (٤س^{٣}) د س \right| + \left| \int_{٠}^{١} (٤س^{٣}) د س \right|$$

$$= \left[س^{٤} \right]_{-١}^{٠} + \left[س^{٤} \right]_{٠}^{١} = |(٠ - ١)| + |(١ - ٠)| = ١ + ١ = ٢ \text{ وحدة مربعة}$$

جـ)

$٣س^{٢} = ٤٨$

$س^{٢} = ١٦$

$س = ٤$ $\quad$ $س = -٤$ **(خارج الفترة)**

$$م = \int_{٣}^{٥} |ق(س)| د س = \left| \int_{٣}^{٤} (٣س^{٢} - ٤٨) د س \right| + \left| \int_{٤}^{٥} (٣س^{٢} - ٤٨) د س \right|$$

$$= \left[س^{٣} - ٤٨س \right]_{٣}^{٤} + \left[س^{٣} - ٤٨س \right]_{٤}^{٥}$$

$$= (٦٤ - ١٩٢) - (٢٧ - ١٤٤) + (١٢٥ - ٢٤٠) - (٦٤ - ١٩٢)$$

$$= (-١٢٨ + ١١٥) + (١١٧ + ١٢٨)$$

$$= |-١١| + |١٣| = ١١ + ١٣ = ٢٤ \text{ وحدة مربعة}$$

د)

$س^{٢} = -٤$

$س = \sqrt{-٤}$ $\quad$ **(لا يوجد نقاط ضمن الفترة)**

$$\int_{-١}^{١} |-س^{٢} - ٤| د س = \left[\frac{-س^{٣}}{٣} - ٤س \right]_{-١}^{١}$$

$$= \left(-\frac{١}{٣} - ٤\right) - \left(\frac{١}{٣} + ٤\right) = (-٤ + ٤) + \left(\frac{١}{٣} - \frac{-١}{٣}\right)$$

$$= -٨ - \frac{٢}{٣} = \frac{-٢٤ - ٢}{٣} = \left|\frac{-٢٦}{٣}\right| = \frac{٢٦}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

الفصل الثاني: تطبيقات التكامل (المساحة)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (٢٠٠)

السؤال الثالث: ص٢٠٠

٣) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س)، ومحور السينات في كل مما يأتي:

أ) ق(س) = ٤س − س٣ ب) ق(س) = ٤س٢ − ١٢س٣

أ)

$$س(٤ - س) = ٠$$

س = ٠ س = ٤ (حدود التكامل)

$$\int_{٠}^{٤} (٤س - س^{٢}) د س = ٢س^{٢} - \frac{س^{٣}}{٣} \Big]_{٠}^{٤}$$

$$= (٣٢ - \frac{٦٤}{٣}) - (٠) = \frac{٩٦ - ٦٤}{٣} = \frac{٣٢}{٣}$$ **وحدة مربعة**

ب)

$$٤س^{٢} (س - ٣) = ٠$$

س = ٠ س = ٣ (حدود التكامل)

$$\int_{٠}^{٣} (٤س^{٣} - ١٢س^{٢}) د س = س^{٤} - ٤س^{٣} \Big]_{٠}^{٣}$$

$$= (٨١ - ١٠٨) = |-٢٧| = ٢٧$$ **وحدة مربعة**

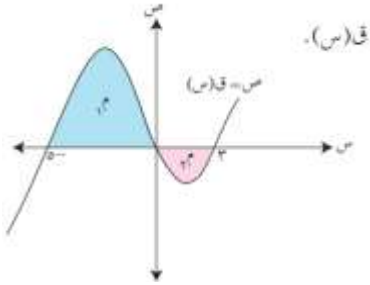
السؤال الرابع: ص٢٠٠

٤) يمثل الشكل (٤ – ١١) منحنى الاقتران ص = ق(س).

فإذا كانت المساحة م = ١٣ وحدة مربعة،

والمساحة م = ٣ وحدات مربعة،

فجد قيمة $\int_{-٥}^{٠} ق(س) د س$، مبرّرًا إجابتك.



$$\int_{-٥}^{٣} ه(س) د س = \int_{-٥}^{٠} ه(س) د س + \int_{٠}^{٣} ه(س) د س$$

$$= ١٣ + -٣ = ١٠$$ **وحدات مربعة**

فوق محور السينات

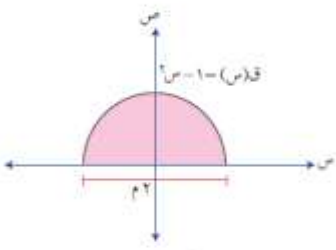
تحت محور السينات

الفصل الثاني: تطبيقات التكامل (المساحة)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (٢٠٠)

السؤال الخامس: ص٢٠٠

٥) يمثل الشكل (٤–١) نافذة طول قاعدتها ٢ م، محصورة بمنحنى الاقتران ص = ق(س) = ١ – س^{٢} إذا أردنا وضع زجاج على النافذة، وكانت تكلفة المتر المربع الواحد منه خمسة دنانير، فما التكلفة الكلية لزجاج النافذة؟



الشكل (٤–١).

$١ - س^{٢} = ٠$

$س^{٢} = ١$

$س = \pm ١$ **(حدود التكامل)**

إيجاد المساحة الكلية:

$$م = \int_{-١}^{١} ق(س)\,دس = \int_{-١}^{١} (١ - س^{٢})\,دس = \left[س - \frac{س^{٣}}{٣} \right]_{-١}^{١}$$

$$= (١ - \frac{١}{٣}) - (-١ + \frac{١}{٣}) = (١ + ١) + (\frac{١}{٣} - \frac{-١}{٣})$$

$$= ٢ + \frac{-٢}{٣} = ٢ - \frac{٢}{٣} = \frac{-٦+٢}{٣} = \frac{٤}{٣}$$ **وحدة مربعة**

إيجاد تكلفة الكلية لزجاج النافذة:

التكلفة $= \frac{٤}{٣} \times ٥ = \frac{٢٠}{٣}$ **دينار**

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School"

حل أسئلة نهاية الوحدة الرابعة (التكامل وتطبيقاته)

السؤال الأول: ص٢١٥

أ)

نشتق الطرفين

$$\frac{ص}{س} = \int \frac{٤س - ١}{س^{٢} + ٥} س$$

$$\frac{ص}{س} = \frac{٤س - ١}{س^{٢} + ٥}$$

ب)

$$\int_{-١}^{٣} (١٢س^{٢} - ٦س) س = ٤س^{٣} - ٣س^{٢} \Big]_{-١}^{٣}$$

$$= (٥٦ - ٢٧) - (-٤ - ٣) = ٢٩ + ٧ = ٣٦ \text{ وحدة مربعة}$$

ج)

نشتق الطرفين

$$\frac{ص}{س} = \int ظا(٤ + س) س$$

$$\frac{ص}{س} = ظا(٤ + س)$$

د) (محذوف)

ه) (محذوف)

و) (محذوف)

السؤال الثاني: ص٢١٥ (محذوف)

السؤال الثالث: ص٢١٥

٣) إذا كان ق(س) = $\int$ س(٢ – س٢) س، فجد قَ(٢).

نشتق الطرفين

$$ق'(س) = س(٢ - س^{٢})$$

$$ق'(٢) = ٢ \times (٢ - ٤) = ٢ \times -٢ = -٤$$

تابع حل أسئلة نهاية الوحدة الرابعة (التكامل وتطبيقاته)

السؤال الرابع: ص٢١٥

٤) جد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ) $\int \frac{س^{٢}-٧س}{\sqrt{س}}\,ءس$ ب) $\int \frac{٦}{س^{-٤}}\,ءس$

جـ) $\int (س-٢)(س+٢)\,ءس$ د) $\int (٣س+٢)^{٢}\,ءس$

هـ) $\int (٢س-١)(س^{٢}-س)^{٣}\,ءس$

أ)

$$= \int \left(\frac{س^{٢}}{س^{\frac{١}{٣}}} - \frac{٧س}{س^{\frac{١}{٣}}} \right) ءس$$

$$= \int \left(س^{\frac{٥}{٣}} - ٧س^{\frac{٢}{٣}} \right) ءس$$

$$= \frac{٣}{٨} س^{\frac{٨}{٣}} - ٧ \times \frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} + جـ$$

$$= \frac{٣}{٨} س^{\frac{٨}{٣}} - \frac{٢١}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} + جـ$$

ب)

$$= \int (٦س^{٥}) ءس = س^{٦} + جـ$$

ج)

$$= \int (س^{٢} - ٤) ءس = \frac{س^{٣}}{٣} - ٤س + جـ$$

د)

$$= \frac{(٣س+٢)^{٣}}{٣ \times ٣} + جـ = \frac{(٣س+٢)^{٣}}{٩} + جـ$$

ه)

نفرض ص $= س^{٢} - س$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٢س - ١$$

$$ءس = \frac{ءص}{٢س - ١}$$

$$\int (٢س - ١)(ص)^{٥} \frac{ءص}{٢س - ١}$$

$$= \int (ص)^{٥} ءص$$

$$= \frac{ص^{٦}}{٦} + جـ = \frac{(س^{٢} - س)^{٦}}{٦} + جـ$$

تابع حل أسئلة نهاية الوحدة الرابعة (التكامل وتطبيقاته)

السؤال الرابع: ص٢١٥

٤) جد كلًّا من التكاملات الآتية:

و) $\int \frac{\text{س}^{٢}}{\sqrt{\text{س}^{٣}+١}}\,\text{د س}$ ، س > -١

ز) $\int \left(\frac{٢}{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}} + ٣\right)\text{د س}$

ح) $\int \frac{١٢\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٤}+٣}\,\text{د س}$

ط) $\int ٦\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}+١}\,\text{د س}$

ي) $\int \frac{٢\text{س}+١}{\text{جتا}^{٢}(\text{س}^{٢}+\text{س})}\,\text{د س}$

و)

نفرض ص $= \text{س}^{٣}+١$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٣\text{س}^{٢}$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{٣\text{س}^{٢}}$

$$\int (\text{س}^{٢})(\text{ص})^{\frac{١}{٢}}\,\frac{\text{د ص}}{٣\text{س}^{٢}}$$

$$= \frac{١}{٣}\int (\text{ص})^{\frac{١}{٢}}\,\text{د ص}$$

$$= \frac{١}{٣}\times ٢ \times \text{ص}^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ} = \frac{٢}{٣}\left(\text{س}^{٣}+١\right)^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$$

ز) (محذوف)

ح) (محذوف)

ط) (محذوف)

ي)

نفرض ص $= \text{س}^{٢} + \text{س}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٢\text{س} + ١$

$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{٢\text{س}+١}$

$$\int (٢\text{س}+١)\,\text{قا}^{٢}\,\text{ص}\,\frac{\text{د ص}}{٢\text{س}+١}$$

$$= \int \text{قا}^{٢}\,\text{ص}\,\text{د ص} = \text{ظا ص} + \text{جـ} = \text{ظا}\left(\text{س}^{٢}+\text{س}\right) + \text{جـ}$$

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School"

تابع حل أسئلة نهاية الوحدة الرابعة (التكامل وتطبيقاته)

السؤال الخامس: ص٢١٦

أ)

$$= \int_{-١}^{-٨} س^{-\frac{١}{٣}} \, ؤس$$

$$= \frac{٣}{٢} س^{\frac{٢}{٣}} \Big]_{-١}^{-٨} = \frac{٣}{٢} \sqrt[٣]{س^{٢}} \Big]_{-١}^{-٨}$$

$$= \frac{٣}{٢} \left(\sqrt[٣]{(-٨)^{٢}} - \sqrt[٣]{(-١)^{٢}} \right)$$

$$= \frac{٣}{٢} (٤ - ١) = \frac{٩}{٢} = ٣ \times \frac{٣}{٢}$$

ب) (محذوف)

ج)

$$= \int_{٤}^{١} \left(س^{-\frac{١}{٢}} - س^{-٢} \right) ؤس$$

$$= ٢ س^{\frac{١}{٢}} + س^{-١} \Big]_{٤}^{١} = ٢ \sqrt{س} + \frac{١}{س} \Big]_{٤}^{١}$$

$$= (١ + ٢) - \left(\frac{١}{٤} + ٤ \right) = ٣ - ٤ + \frac{١}{٤} = -١ + \frac{١}{٤} = \frac{-٥}{٤}$$

د)

$$= \int_{-١}^{١} \frac{(س + ٤)(س + ٣)}{س + ٤} ؤس = \int_{-١}^{١} (س + ٣) ؤس$$

$$= \frac{س^{٢}}{٢} + ٣ س \Big]_{-١}^{١} = \left(١ + \frac{١}{٢} \right) - \left(٣ - \frac{١}{٢} \right)$$

$$= ١ - \frac{١}{٢} + ٣ + ٣ = ٦$$

ه) (محذوف)

و) (محذوف)

ز)

$$= \int_{٢}^{٦} ١٠ (٥س + ٦)^{\frac{١}{٢}} ؤس = \frac{١٠ (٥س + ٦)^{\frac{١}{٢}}}{٥ \times \frac{١}{٢}} \Big]_{٢}^{٦} = \frac{٢ \times ١٠ \times (٥س + ٦)^{\frac{١}{٢}}}{٥} \Big]_{٢}^{٦}$$

$$= ٤ (٥س + ٦)^{\frac{١}{٢}} \Big]_{٢}^{٦} = ٤ \sqrt{٥س + ٦} \Big]_{٢}^{٦}$$

$$= (٤ \times ٦) - (٤ \times ٤) = ٢٤ - ١٦ = ٨$$

هـ) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{-١}^{-٨} \frac{١}{\sqrt[٣]{٧س}} ؤس$

ب) $\int_{١}^{أ} هـ^{س} ؤس$، حيث هـ العدد النيبيري

جـ) $\int_{٤}^{أ} \left(\frac{١}{\sqrt{٧س}} - \frac{١}{س^{٢}} \right) ؤس$

د) $\int_{-١}^{أ} \frac{س^{٢} + ٧س + ١٢}{س + ٤} ؤس$

هـ) $\int_{٢}^{أ} \frac{٢}{٣س + ١} ؤس$

و) $\int_{١}^{أ} ٤س \times هـ^{س^{٢}} ؤس$

ز) $\int_{٢}^{أ} \frac{١٠}{\sqrt{٥س + ٦}} ؤس$

تابع حل أسئلة نهاية الوحدة الرابعة (التكامل وتطبيقاته)

السؤال السادس: ص٢١٦

٦) إذا كان $\int_{ب^{٢}}^{ب^{٢}+ب} ق(س)\,وس$ = صفرًا، فجد قيمة الثابت ب.

الحد الأول = الحد الثاني

$$ب^{٢}+ب = -ب+٣$$

$$ب^{٢}+ب+ب-٣=٠ \qquad ب^{٢}+٢ب-٣=٠$$

$$(ب+٣)(ب-١)=٠ \qquad ب=\{-٣،١\}$$

السؤال السابع: ص٢١٦

٧) إذا كان $\int_{١}^{٥} ق(س)\,وس = ٤$، $\int_{١}^{٥} (ق(س)+٣)\,وس = ٢٠$، فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\int_{١}^{٥} ق(س)\,وس$ ب) $\int_{٥}^{١} ق(س)\,وس$ جـ) $\int_{١}^{٥} (٣ق(س)-٤س)\,وس$

أ)

$$= \int_{١}^{٥} (هـ(س)+٣)\,وس = ٢٠$$

$$= \int_{١}^{٥} هـ(س)\,وس + \int_{١}^{٥} (٣)\,وس = ٢٠$$

$$= \int_{١}^{٥} هـ(س)\,وس + ٣س \Big]_{١}^{٥} = ٢٠$$

$$= \int_{١}^{٥} هـ(س)\,وس + ٣(٥)+(١) = ٢٠ \qquad = \int_{١}^{٥} هـ(س)\,وس + ١٨ = ٢٠$$

$$= \int_{١}^{٥} هـ(س)\,وس = ٢ \qquad = \int_{٥}^{١} هـ(س)\,وس = -٢$$

ب)

$$\int_{١}^{٥} هـ(س)\,وس = \int_{١}^{١} هـ(س)\,وس + \int_{١}^{٥} هـ(س)\,وس$$

$$٢ = \int_{١}^{١} هـ(س)\,وس + ٤ \qquad \int_{١}^{١} هـ(س)\,وس = ٢-٤ \qquad \int_{١}^{١} هـ(س)\,وس = -٢$$

ج)

$$= ٣\int_{٥}^{١} هـ(س)\,وس - \int_{٥}^{١} (٤س)\,وس$$

$$= ٣\times -٤-٢س^{٢} \Big]_{٥}^{١} = -١٢-(٢-٥٠) = -١٢+٤٨ = ٣٦$$

تابع حل أسئلة نهاية الوحدة الرابعة (التكامل وتطبيقاته)

السؤال الثامن: ص٢١٧

٨) جد قيمة الثابت ب في كل مما يأتي:

أ) $\int_{-١}^{ب} ٢ب\,د س = ١٢$ ب) $\int_{٤}^{ب} (٢س - ١)\,د س = ٠$

جـ) $\int_{٠}^{ب} (ب س^{٢} + ٢)\,د س = -٢١$ د) $\int_{٢}^{ب} (١ - ٤س)\,د س = ٥ب$

أ)

$$٢ب س \Big]_{-١}^{٣} = ١٢$$

$$٢ب(٣ + ١) = ١٢$$

$$٨ب = ١٢ \qquad ب = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$$

ب)

$$س^{٢} - س \Big]_{٤}^{ب} = ٠$$

$$\left(ب^{٢} - ب\right) - (١٦ - ٤) = ٠$$

$$ب^{٢} - ب - ١٢ = ٠$$

$$(ب - ٤)(ب + ٣) = ٠ \qquad ب = \{-٣، ٤\}$$

جـ)

$$\frac{ب س^{٣}}{٣} + ٢س \Big]_{٠}^{٣} = -٢١$$

$$\frac{٢٧ب}{٣} + ٦ = -٢١$$

$$٩ب + ٦ = -٢١$$

$$٩ب = -٢٧ \qquad ب = -٣$$

د)

$$س - ٢س^{٢} \Big]_{٢}^{ب} = ٥ب$$

$$\left(ب - ٢ب^{٢}\right) - (٨ - ٢) = ٥ب$$

$$ب - ٢ب^{٢} + ٦ - ٥ب = ٠$$

$$-٢ب^{٢} - ٤ب + ٦ = ٠$$

$$ب^{٢} + ٢ب - ٣ = ٠ \qquad \text{(القسمة على -٢)}$$

$$(ب + ٣)(ب - ١) = ٠ \qquad ب = \{-٣، ١\}$$

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School"

تابع حل أسئلة نهاية الوحدة الرابعة (التكامل وتطبيقاته)

السؤال التاسع: ص٢١٧

٩) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س، ص) يعطى بالقاعدة (١ + س)(٣س + ٢)، فجد قاعدة الاقتران ق، علمًا بأن منحناه يمر بالنقطة (٢، −١).

$$\text{هـ}'(\text{س}) = (١+\text{س})(٣\text{س}+٢)$$

تكامل الطرفين

$$\text{هـ}(\text{س}) = \int (١+\text{س})(٣\text{س}+٢)\,\text{د س}$$

$$= \int (٣\text{س}+٢+٣\text{س}^{٢}+٢\text{س})\,\text{د س} \qquad = \int (٣\text{س}^{٢}+٥\text{س}+٢)\,\text{د س}$$

$$= \text{س}^{٣} + \frac{٥\text{س}^{٢}}{٢} + ٢\text{س} + \text{جـ}$$

$$\text{هـ}(٢) = -١$$

$$٨+١٠+٤+\text{جـ} = -١ \qquad ٢٢+\text{جـ} = -١ \qquad \text{جـ} = -٢٣$$

$$\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + \frac{٥\text{س}^{٢}}{٢} + ٢\text{س} - ٢٣$$

السؤال العاشر: ص٢١٧

١٠) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) = ٣س٢ − ٢٧، ومحور السينات في الفترة [−٤، ٠].

$$٣\text{س}^{٢} - ٢٧ = ٠$$

$$٣\text{س}^{٢} = ٢٧$$

$$\text{س}^{٢} = ٩ \qquad \text{س} = -٣ \qquad \text{س} = ٣ \text{ (خارج الفترة)}$$

$$\text{م} = \int_{-٤}^{٠} \text{هـ}(\text{س})\,\text{د س} = \left| \int_{-٤}^{-٣} \text{هـ}(\text{س})\,\text{د س} \right| + \left| \int_{-٣}^{٠} \text{هـ}(\text{س})\,\text{د س} \right|$$

$$\text{م}_{١} = \left| \int_{-٤}^{-٣} (٣\text{س}^{٢}-٢٧)\,\text{د س} \right| = \left| \text{س}^{٣} - ٢٧\text{س} \right|_{-٤}^{-٣} = (-٢٧+٨١)-(-٦٤+١٠٨)$$

$$= ٥٤ - ٤٤ = ١٠ \text{ وحدات مربعة}$$

$$\text{م}_{٢} = \left| \int_{-٣}^{٠} (٣\text{س}^{٢}-٢٧)\,\text{د س} \right| = \left| \text{س}^{٣} - ٢٧\text{س} \right|_{-٣}^{٠} = (٠)-(-٢٧+٨١)$$

$$= ٠ - ٥٤ = |-٥٤| = ٥٤ \text{ وحدة مربعة}$$

$$\text{م} = \text{م}_{١} + \text{م}_{٢}$$

$$\text{م} = ١٠ + ٥٤ = ٦٤ \text{ وحدة مربعة}$$

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

تابع حل أسئلة نهاية الوحدة الرابعة (التكامل وتطبيقاته)

السؤال الحادي عشر: ص٢١٧

١١) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم، بتسارع مقداره ت(ن) = ١٢ن(١ – ن) م/ث٢، حيث ن الزمن بالثواني. فإذا كانت سرعتها الابتدائية ع(٠) = ٣ م/ث، وموقعها الابتدائي ف(٠) = ٢م، فجد:

أ) سرعة النقطة المادية بعد مرور أربع ثوانٍ من بدء الحركة.

ب) موقع النقطة المادية بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

أ)

$$ع(ن) = \int ت(ن)\,دن$$

$$ع(ن) = \int ١٢ن(١-ن)\,دن$$

$$ع(ن) = \int (١٢ن - ١٢ن^{٢})\,دن$$

$$ع(ن) = ٦ن^{٢} - ٤ن^{٣} + جـ_{١}$$

$$ع(٠) = ٣$$

$$٣ = ٠ - ٠ + جـ_{١} \qquad جـ_{١} = ٣$$

$$ع(ن) = ٦ن^{٢} - ٤ن^{٣} + ٣$$

$$ع(٤) = ٦ \times ١٦ - ٤ \times ٦٤ + ٣$$

$$ع(٤) = ٩٦ - ٢٥٦ + ٣ = -١٥٧ \text{ م/ث}$$

ب)

$$ف(ن) = \int ع(ن)\,دن$$

$$ف(ن) = \int (٦ن^{٢} - ٤ن^{٣} + ٣)\,دن$$

$$ف(ن) = ٢ن^{٣} - ن^{٤} + ٣ن + جـ_{٢}$$

$$ف(٠) = ٢$$

$$٢ = ٠ - ٠ + ٠ + جـ_{٢} \qquad جـ_{٢} = ٢$$

$$ف(ن) = ٢ن^{٣} - ن^{٤} + ٣ن + ٢$$

$$ف(٢) = ٢ \times ٨ - ١٦ + ٦ + ٢$$

$$= ١٦ - ١٦ + ٦ + ٢ = ٨ \text{ م}$$

السؤال الثاني عشر: ص٢١٧ (محذوف)

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الوحدة الخامسة: الإحصاء والاحتمالات
حل جميع أسئلة وتدريبات الكتاب
لطلاب التخصص الأدبي والفندقي

إعداد/ مروان ابوديه

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School" 0797-55-27-27

الفصل الأول: طرائق العد (مبدأ العد)

تدريب (١): ص٢٢٣

تدريب ١

محل لبيع الخضراوات والفواكه يحتوي على أربعة أصناف من الفاكهة (موز، برتقال، تفاح، دراق)، وصنفين من الخضراوات (كوسا، بطاطا). دخلت أم رامي المحل لشراء صنف واحد من الفواكه، وصنف آخر من الخضراوات. ما الخيارات المتوافرة لها؟

عدد الخيارات = $٤ \times ٢ = ٨$ طرق

تدريب (٢): ص٢٢٤

تدريب ٢

لدى محمد أربعة أنواع من القمصان، وثلاثة أنواع من البناطيل، ونوعان من الأحذية، فهل يكفيه ذلك إذا أراد كل يوم ارتداء لباس مختلف عن اليوم الذي سبقه مدة شهر كامل؟

عدد الطرق = $٤ \times ٣ \times ٢ = ٢٤$ طريقة (تكفيه لمدة ٢٤ يوم فقط)
عدد طرق كل لباس لا يكفيه لمدة شهر.

تدريب (٣): ص٢٢٤

تدريب ٣

بكم طريقة يمكن تكوين عدد من ٣ منازل من مجموعة الأعداد الفردية التي هي أكبر من ٤، في حال:

أ) تسمح بتكرار الأرقام؟ ب) لم يُسمح بتكرار الأرقام؟

الأعداد الفردية هي: ٥ ، ٧ ، ٩

أ) عدد الطرق = $٣ \times ٣ \times ٣ = ٢٧$ طريقة

ب) عدد الطرق = $٣ \times ٢ \times ١ = ٦$ طرق

تدريب (٤): ص٢٢٦

تدريب ٤

بكم طريقة يمكن أن يجلس ٦ طلاب على ٦ مقاعد موضوعة بطريقة مستقيمة؟

عدد الطرق = $!٦ = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٧٢٠$ طريقة

تدريب (٥): ص٢٢٧

تدريب ٥

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

١) $(!ن) = ١٢٠$

٢) $١٠ + ٣(!ن) = ١٦$

٣) $(ن + ١)! = ١٢٠$

٤) $\frac{(ن + ١)!}{(ن - ١)!} = ٣٠$

١) $!ن = !٥$ $\quad ن = ٥$

٢) $٣(!ن) = ١٦ - ١٠$
$٣(!ن) = ٦$
$!ن = !٢$ $\quad ن = ٢$

٣) $!(ن + ١)(٢ن) = !٥$
$٢ن + ١ = ٥$
$٢ن = ٤$ $\quad ن = ٢$

٤) $!(ن + ١) = ٣٠(ن - ١)!$
$!(ن + ١) = ٣٠(ن - ١)!$
$(ن + ١)(ن) = ٣٠$
$ن^٢ + ن - ٣٠ = ٠$ $\quad (ن + ٦)(ن - ٥) = ٠$
$ن = -٦$ (تهمل) $\quad ن = ٥$

الفصل الأول: طرائق العد (مبدأ العد)
حل أسئلة نهاية الدرس (٢٢٨)

السؤال الأول: ص٢٢٨

١) تعمل ١٠ حافلات لنقل الركاب بين مدينتي مأدبا وعمان، وتعمل ٣٠ حافلة أخرى بين مدينتي عمّان والزرقاء. فإذا أراد راكب أن يسافر من مأدبا إلى الزرقاء مرورًا بعمّان، ثم يعود سالكًا الطريق نفسه، فبكم طريقة يمكنه عمل ذلك شريطة ألا يركب الحافلة نفسها في أثناء رحلته؟

عدد الطرق = $١٠ \times ٣٠ \times ٩ \times ٢٩ = ٧٨٣٠٠$

السؤال الثاني: ص٢٢٨

٢) محل لبيع المجمدات الغذائية، فيه ٣ أنواع مختلفة من الأسماك، و ٤ أنواع مختلفة من اللحوم الحمراء، ونوعان مختلفان من الدجاج. بكم طريقة يمكن لأحد الزبائن أن يشتري نوعًا واحدًا من كل من الأسماك واللحوم الحمراء والدجاج؟

عدد الطرق = $٣ \times ٤ \times ٢ = ٢٤$ طريقة

السؤال الثالث: ص٢٢٨

٣) اتبعت دائرة السير في إحدى الدول نظامًا لترقيم السيارات مُستخدمة الأرقام ١ ← ٩، بحيث تحتوي لوحة السيارة على ٤ أرقام، وحرفين من أحرف الهجاء. كم سيارة يمكن ترقيمها بهذه الطريقة، علمًا بأن عدد أحرف الهجاء ٢٨ حرفًا، وتكرار الأرقام مسموح به، خلافًا لتكرار الأحرف؟

عدد الطرق استخدام الأرقام = $٩ \times ٩ \times ٩ \times ٩ = ٦٥٦١$
عدد الطرق استخدام الحروف = $٢٨ \times ٢٧ = ٧٥٦$

عدد الطرق الكلية = $٦٥٦١ \times ٧٥٦ = ٤٩٦٠١١٦$ طريقة

السؤال الرابع: ص٢٢٨

٤) جد قيمة كل مما يأتي:

أ) $٦!$ ب) $٣! + ٥! + ٢!$

جـ) $١٢! + ١٠!$ د) $٤٢ \times ٣!$

أ) $٦! = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٧٢٠$

ب) $٣! + ٥! + ٢! = ٦ + ١٢٠ + ٢ = ١٢٨$

ج) $١٢! + ١٠! = ٢ + ١ = ٣$

د) $٤٢ \times ٣! = ٤٢ \times ٦ = ٢٥٢$

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School"

الفصل الأول: طرائق العد (مبدأ العد)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (٢٢٨)

السؤال الخامس: ص٢٢٨

٥) حلّ كلًّا من المعادلات الآتية:

أ) $٢ \times (!ن) = ٤٨$

ب) $١٠٠ - (!ن) = -٢٠$

جـ) $(٣ن - ١)! = ٢$

أ)

$$٢ \times (!ن) = ٤٨$$
$$!ن٢ = ٤٨$$
$$!ن = ٢٤$$
$$!ن = !٤ \qquad ن = ٤$$

ب)

$$١٠٠ - (!ن) = -٢٠$$
$$!ن = ١٠٠ + ٢٠$$
$$!ن = ١٢٠$$
$$!ن = !٥ \qquad ن = ٥$$

ج)

$$(٣ن - ١)! = ٢$$
$$(٣ن - ١)! = !٢$$
$$٣ن - ١ = ٢$$
$$٣ن = ٣ \qquad ن = ١$$

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School"

الفصل الأول: طرائق العد (التباديل)

تدريب (١): ص٢٣١

تدريب ١

١) كم عدد تباديل مجموعة مكونة من ٥ عناصر مأخوذة ٢ في كل مرة؟

٢) جد قيمة ل(٦، ٤) + ل(٧، ٥) + ٢!

١) ل(٥،٢) = ٥ × ٤ = ٢٠ طريقة

٢)

ل(٦،٤) + ل(٧،٥) + ٢!

= ٦ × ٥ × ٤ × ٣ + ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ + ٢

= ٣٦٠ + ٢٥٢٠ + ٢

= ٢٨٨٢ طريقة

تدريب (٢): ص٢٣١

تدريب ٢

ما عدد طرائق اختيار رئيس شركة، ونائب له، ومدير مالي من بين ٢٠ موظفًا في الشركة، علمًا بأن الشخص الواحد لا يشغل أكثر من وظيفة واحدة في الشركة؟

ل(٣،٢٠) = ٢٠ × ١٩ × ١٨ = ٦٨٤٠ طريقة

تدريب (٣): ص٢٣٢

تدريب ٣

جد قيمة (ر) في كل من المعادلتين الآتيتين:

١) ل(ر،٨) = ١٦٨٠

٢) ٨٠ − ٣ل(ر،٤) = ٢! + ٤٣

١)

ل(ر،٨) = ١٦٨٠

٨ × ٧ × ٦ × ٥ = ١٦٨٠ ر = ٤

٢)

٨٠ − ٣ل(ر،٤) = ١ + ٧

٨٠ − ٣ل(ر،٤) = ٨

٣ل(ر،٤) = ٨٠ − ٨

٣ل(ر،٤) = ٧٢

ل(ر،٤) = ٢٤

٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤ ر = ٤ أو ر = ٣

الفصل الأول: طرائق العد (التباديل)
حل أسئلة نهاية الدرس (٢٣٣)

السؤال الأول: ص٢٣٣

١) ما عدد تباديل مجموعة مكونة من ٩ عناصر مأخوذة ٥ في كل مرة؟

عدد الطرق = ل(٩، ٥) = ٩ × ٨ × ٧ × ٦ × ٥ = ١٥١٢٠ طريقة

السؤال الثاني: ص٢٣٣

٢) بكم طريقة يمكن اختيار رئيس قسم، ومساعد له، وأمين عهدة من بين ٩ أعضاء في هذا القسم شريطة أن لا يشغل أحدهم وظيفتين معًا؟

عدد الطرق = ل(٩، ٣) = ٩ × ٨ × ٧ = ٥٠٤ طريقة

السؤال الثالث: ص٢٣٣

٣) جد قيمة كل مما يأتي:
أ) ل(٨، ٣).
ب) ل(١٣، ٤).
جـ) ل(٢٠، ٣).
د) ل(١٧، ٠).

أ) ل(٨، ٣) = ٨ × ٧ × ٦ = ٣٣٦ طريقة

ب) ل(١٣، ٤) = ١٣ × ١٢ × ١١ × ١٠ = ١٧١٦٠ طريقة

ج) ل(٢٠، ٣) = ٢٠ × ١٩ × ١٨ = ٦٨٤٠ طريقة

د) ل(١٧، ٠) = ١ طريقة

السؤال الرابع: ص٢٣٣

٤) عبّر عما يأتي باستخدام التباديل:
أ) ١٧ × ١٦ × ١٥ × ١٤ × ١٣
ب) ك × (ك – ١) × (ك – ٢)، ك ≥ ٣

أ) ل(١٧، ٥)

ب) ل(ك، ٣)

السؤال الخامس: ص٢٣٣

٥) جد قيمة كل من (ن)، و (ر) في ما يأتي:
أ) ل(ن، ٣) = ٧٢٠
ب) ل(٦، ر) = ٣٦٠

أ)

ل(ن، ٣) = ٧٢٠

١٠ × ٩ × ٨ = ٧٢٠ ن = ١٠

ب)

ل(٦، ر) = ٣٦٠

٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ٣٦٠ ر = ٤

الفصل الأول: طرائق العد (التباديل)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (٢٣٣)

السؤال الخامس: ص٢٣٣

٥) جد قيمة كل من (ن)، و (ر) في ما يأتي:

جـ) ل (ن، ٣) = ٩ ل (ن، ٢)

ج)

$$ل(ن،٣) = ٩ل(ن،٢)$$

$$(ن)(ن-١)(ن-٢) = ٩(ن)(ن-١)$$

$$ن-٢ = ٩$$

$$ن = ١١$$

السؤال السادس: ص٢٣٣

٦) كم كلمة مكونة من ٣ أحرف مختلفة يمكن تكوينها من مجموعة الأحرف:

{ أ، ن، ق، غ، م }، علمًا بأنه ليس شرطًا أن يكون للكلمة معنى؟

$ل(٥،٣) = ٥ \times ٤ \times ٣ = ١٢٠$ كلمة

الفصل الأول: طرائق العد (التوافيق)

تدريب (١): ٢٣٥

تدريب ١

جد قيمة كل مما يأتي:

١) $\binom{٩}{٧}$ ٢) $\binom{٨}{٥}$ ٣) $\binom{٥}{٢}$

١) $\binom{٩}{٧} = \frac{٩ \times ٨}{!٢} = \frac{٧٢}{٢} = ٣٦$

٢) $\binom{٨}{٥} = \frac{٨ \times ٧ \times ٦}{!٣} = \frac{٨ \times ٧ \times ٦}{٦} = ٥٦$

٣) $\binom{٥}{٢} = \frac{٥ \times ٤}{!٢} = \frac{٢٠}{٢} = ١٠$

تدريب (٢): ص٢٣٧

تدريب ٢

في أحد المستشفيات يراد اختيار فريق طبي حماسي لتمثيل المستشفى في مؤتمر صحي، من بين ٥ أطباء، و٦ ممرضين. بكم طريقة يمكن تكوين الفريق في الحالات الآتية:

١) الفريق يتألف من طبيبين اثنين على الأكثر.

٢) رئيس الفريق ونائبه من الأطباء، والبقية ممرضون.

١)

$$\binom{٥}{٠}\binom{٦}{٥} + \binom{٥}{١}\binom{٦}{٤} + \binom{٥}{٢}\binom{٦}{٣}$$

$$= ١ \times ٦ + ٥ \times ١٥ + ١٠ \times ٢٠$$

$$= ٦ + ٧٥ + ٢٠٠ = ٢٨١$$

٢)

$$\binom{٦}{٣} \times ل(٥،٢)$$

$$= ٥ \times ٤ \times ٢٠ = ٢٠ \times ٢٠ = ٤٠٠$$

تدريب (٣): ص٢٣٧

تدريب ٣

حلّ كل معادلة مما يأتي:

١) $\binom{٦}{٤} = \binom{٦}{س+١}$ ٢) $\binom{س}{٥} = \binom{س}{٧}$

١) $س + ١ = ٤$ أو $س + ١ + ٤ = ٦$

$س = ٣$ $س = ١$

$س = ٣،١$

٢) $س = ٥ + ٧$ $س = ١٢$

الفصل الأول: طرائق العد (التوافيق)

حل أسئلة نهاية الدرس (٢٣٨)

السؤال الأول: ص٢٣٨

١) جد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\binom{١٠٠}{٩٧}$ ب) $\binom{٥}{٥}$

جـ) $\binom{٤}{٠}$ د) $\binom{٤}{١}$

أ) $\binom{١٠٠}{٣} = \frac{١٠٠ \times ٩٩ \times ٩٨}{١ \times ٢ \times ٣} = ١٦١٧٠٠$

ب) $\binom{٥}{٥} = ١$

ج) $\binom{٤}{٠} = ١$

د) $\binom{٤}{١} = ٤$

السؤال الثاني: ص٢٣٨

٢) جد عدد طرائق اختيار قلمين من علبة تحوي ١٠ أقلام.

$\binom{١٠}{٢} = \frac{١٠ \times ٩}{٢} = ٤٥$ طريقة

السؤال الثالث: ص٢٣٨

٣) عائلة تتألف من ٥ أولاد و ٣ بنات. يراد تكليف ٣ منهم بتنظيف الحديقة، فكم طريقة يمكن اختيارهم، بحيث:

أ) يوجد بنتان على الأقل ضمن الفريق.

ب) لا يوجد أي بنت في الفريق.

جـ) يكون رئيس الفريق من البنات.

أ) $\binom{٣}{٢}\binom{٥}{١} + \binom{٥}{٠}\binom{٣}{٣}$

$= ٣ \times ٥ + ١ \times ١$

$= ١٥ + ١ = ١٦$ طريقة

ب) $\binom{٥}{٣} = \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{١ \times ٢ \times ٣} = ١٠$ طرق

ج) $\binom{٧}{٢} \times ل(١٫٣)$

$= ٣ \times ٢١ = ٦٣$ طريقة

الفصل الأول: طرائق العد (التوافيق)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (٢٣٨)

السؤال الرابع: ص٢٣٨

٤) حُلّ كل معادلة مما يأتي:

أ) $\binom{٣}{١}+\binom{٣}{٢س}$

ب) $\binom{س}{٥}-\binom{س}{٢١}$

أ) $\binom{٣}{١}+\binom{٣}{٢س}$

$٢س=١$ أو $٢س+١=٣$

$س=\frac{١}{٢}$ $٢س=٢$

$س=١$

$س=١\frac{١}{٢}$

ب) $\binom{س}{٥}+\binom{س}{٢١}$

$س=٥+٢١$ $س=٢٦$

الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة (توزيع ذي الحدين)

تدريب (١): ص٢٤١

تدريب ١

في تجربة إلقاء قطعتي نقد مرة واحدة، دَلَّ المتغير العشوائي ع على عدد مرات ظهور كتابة على الوجه الظاهر:

١) جد القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي ع.

٢) اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ع.

٣) بيّن أن ل هو اقتران احتمال للمتغير العشوائي ع.

١)

$ع = \{٠، ١، ٢\}$

٢)

$ن = ٢ \qquad أ = \frac{١}{٢} \qquad ١ - أ = \frac{١}{٢}$

$$ل(س = ٠) = \binom{٢}{٠} \times (\frac{١}{٢})^{٠} \times (\frac{١}{٢})^{٢} = \frac{١}{٤}$$

$$ل(س = ١) = \binom{٢}{١} \times (\frac{١}{٢})^{١} \times (\frac{١}{٢})^{١} = \frac{٢}{٤}$$

$$ل(س = ٢) = \binom{٢}{٢} \times (\frac{١}{٢})^{٢} \times (\frac{١}{٢})^{٠} = \frac{١}{٤}$$

س	صفر	١	٢
ل(س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٤}$

٣)

مجموع الاحتمالات = ١ ، $\sum ل(س) = ١$

$١ \leq ل(س) \leq$ صفر

تدريب (٢): ص٢٤٢

تدريب ٢

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س معطى في المجموعة:

{(٠، ٠,٢)، (١، ٠,٣)، (٢، ٠,١)، (٣، ٢ب)}، فما قيمة الثابت ب؟

$٠.٢ + ٠.٣ + ٠.١ + ٢ب = ١$

$٠.٦ + ٢ب = ١$

$٢ب = ١ - ٠.٦$

$٢ب = ٠.٤ \qquad ب = ٠.٢$

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة (توزيع ذي الحدين)

تدريب (٣): ص٢٤٣

تدريب ٣

إذا كان س متغيرًا عشوائيًا ذا حدين، ومعاملاه: ن = ٦، أ = ٠,٧، فجد كلًّا مما يأتي:

١) ل (س = ٥). ٢) ل (س ≤ ٤). ٣) ل (س ≥ ٢).

س = {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

١)

$$ل(س=٥)=\binom{٦}{٥}\times(٠.٧)^{٥}\times(٠.٣)^{١}$$

$$=٦\times٠.١٦٨٠٧\times٠.٣$$

$$=٦\times٠.٠٥٠٤٢١=٠.٣٠٢٥٢٦$$

٢)

$$ل(س\le٤)=ل(س=٤)+ل(س=٥)+ل(س=٦)$$

$$=\binom{٦}{٤}\times(٠.٧)^{٤}\times(٠.٣)^{٢}+\binom{٦}{٥}\times(٠.٧)^{٥}\times(٠.٣)^{١}+\binom{٦}{٦}\times(٠.٧)^{٦}\times(٠.٣)^{٠}$$

$$=١٥\times٠.٢٤٠١\times٠.٠٩+٦\times٠.١٦٨٠٧\times٠.٣+١\times٠.١١٧٦٤٩\times١$$

$$=٠.٣٢٤١٣٥+٠.٣٠٢٥٢٦+٠.١١٧٦٤٩$$

$$=٠.٧٤٤٣١$$

٣)

$$ل(س\ge٢)=ل(س=٠)+ل(س=١)+ل(س=٢)$$

$$=\binom{٦}{٠}\times(٠.٧)^{٠}\times(٠.٣)^{٦}+\binom{٦}{١}\times(٠.٧)^{١}\times(٠.٣)^{٥}+\binom{٦}{٢}\times(٠.٧)^{٢}\times(٠.٣)^{٤}$$

$$=١\times٠.٠٠٠٧٢٩+٦\times٠.٧\times٠.٠٠٠٢٤٣+١٥\times٠.٤٩\times٠.٠٠٨١$$

$$=٠.٠٠٠٧٢٩+٠.٠٠١٠٢٠٦+٠.٠٠٥٩٥٣٥$$

$$=٠.٠٧٠٤٧$$

الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة (توزيع ذي الحدين)

تدريب (٤): ص٢٤٤

تدريب ٤

غرس مُزارع ٧ شتلات، وكان احتمال نجاح غرس الشتلة الواحدة هو ٦٠٪. ما احتمال نجاح غرس ٣ شتلات على الأقل؟

س = {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}

$$ل(س \geq ٣) = ١ - [ل(س = ٠) + ل(س = ١) + ل(س = ٢)]$$

$$= ١ - \left[\binom{٧}{٠} \times (٠.٦)^{٠} \times (٠.٤)^{٧} + \binom{٧}{١} \times (٠.٦)^{١} \times (٠.٤)^{٦} + \binom{٧}{٢} \times (٠.٦)^{٢} \times (٠.٤)^{٥}\right]$$

$$= ١ - [٠.٠٠١٦٣٨٤ + ٠.٠٠٤٠٩٦ \times ٠.٦ \times ٧ + ٠.٠٠١٠٢٤ \times ٠.٣٦ \times ٢١]$$

$$= ١ - [٠.٠٠١٦٣٨٤ + ٠.٠١٧٢٠٣٢ + ٠.٠٧٧٤١٤٤]$$

$$= ١ - ٠.٠٩٦٢٥٦ = ٠.٩٠٣٧٤٤$$

الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة (توزيع ذي الحدين)

حل أسئلة نهاية الدرس (٢٤٥)

السؤال الأول: ص٢٤٥

١) إذا دلّ المتغير العشوائي س على مجموع العددين الظاهرين في تجربة إلقاء حجري نرد، وملاحظة الرقمين على الوجهين الظاهرين، فأجب عما يأتي:

أ) جد القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي س.

ب) اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س.

جـ) بيّن أن ل هو اقتران احتمال.

أ)

س = {٢،٣،٤،٥،٦،٧،٨،٩،١٠ ١١ ١٢}

ب)

	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢

س	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
ل(س)	$\frac{١}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{١}{٣٦}$

جـ)

$\sum$ ل(س) $= \frac{٣٦}{٣٦} = ١$ ، مجموع الاحتمالات = ١

السؤال الثاني: ص٢٤٥

٢) إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س معطى بالجدول الآتي، فما قيمة الثابت أ؟

س	٠	١	٢
ل (س)	٠,٥	٠,١	أ + ١

$٠.٥ + ٠.١ + أ + ١ = ١$

$أ + ١.٦ = ١$

$أ = ١ - ١.٦$

$أ = -٠.٦$

الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة (توزيع ذي الحدين)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (٢٤٥)

السؤال الثالث: ص٢٤٥

٣) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا ذا حدين، ومعاملاه: ن = ٤، أ = ٠,٦، فجد كلًا مما يأتي:

أ) ل (س = ٢).

ب) ل (س ≤ ٤).

جـ) ل (س ≥ ١).

أ)

$$ل(س=٢)=\binom{٤}{٢}\times(٠.٦)^{٢}\times(٠.٤)^{٢}$$

$$=٦\times٠.٣٦\times٠.١٦$$

$$=٦\times٠.٠٥٧٦=٠.٣٤٥٦$$

ب)

$$ل(س\le٤)=ل(س=٤)=\binom{٤}{٤}\times(٠.٦)^{٤}\times(٠.٤)^{٠}$$

$$=١\times٠.١٢٩٦\times١$$

$$=٠.١٢٩٦$$

جـ)

$$ل(س\ge١)=ل(س=٠)+ل(س=١)$$

$$=\binom{٤}{٠}\times(٠.٦)^{٠}\times(٠.٤)^{٤}+\binom{٤}{١}\times(٠.٦)^{١}\times(٠.٤)^{٣}$$

$$=١\times١\times٠.٢٥٦+٤\times٠.٦\times٠.٠٦٤$$

$$=٠.٢٥٦+٤\times٠.٠٣٨٤$$

$$=٠.٢٥٦+٠.١٥٣٦$$

$$=٠.٤٠٩٦$$

الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة (توزيع ذي الحدين)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (٢٤٥)

السؤال الرابع: ص٢٤٥

٤) صندوق يحوي ٥ كرات، ٣ منها حمراء، والبقية زرقاء اللون. إذا سُحِبت من الصندوق ٤ كرات على التوالي مع الإرجاع، ودَلَّ المتغير العشوائي س على عدد الكرات الحمراء المسحوبة، فأنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س.

س = {٠، ١، ٢، ٣، ٤}

ن = ٤ أ = $\frac{٣}{٥}$ ١ − أ = $\frac{٢}{٥}$

ل(س = ٠) = $\binom{٤}{٠} \times (\frac{٣}{٥})^{٠} \times (\frac{٢}{٥})^{٤} = \frac{١٦}{٦٢٥}$

ل(س = ١) = $\binom{٤}{١} \times (\frac{٣}{٥})^{١} \times (\frac{٢}{٥})^{٣} = \frac{٩٦}{٦٢٥}$

ل(س = ٢) = $\binom{٤}{٢} \times (\frac{٣}{٥})^{٢} \times (\frac{٢}{٥})^{٢} = \frac{٢١٦}{٦٢٥}$

ل(س = ٣) = $\binom{٤}{٣} \times (\frac{٣}{٥})^{٣} \times (\frac{٢}{٥})^{١} = \frac{٢١٦}{٦٢٥}$

ل(س = ٤) = $\binom{٤}{٤} \times (\frac{٣}{٥})^{٤} \times (\frac{٢}{٥})^{٠} = \frac{٨١}{٦٢٥}$

س	صفر	١	٢	٣	٤
ل(س)	$\frac{١٦}{٦٢٥}$	$\frac{٩٦}{٦٢٥}$	$\frac{٢١٦}{٦٢٥}$	$\frac{٢١٦}{٦٢٥}$	$\frac{٨١}{٦٢٥}$

الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة (العلامة المعيارية)

تدريب (١): ص٢٤٧

تدريب ١

تخضع كتل طلبة الصف الخامس الأساسي في إحدى المدارس لمتوسط حسابي مقداره ٤٠ كغ، ولانحراف معياري مقداره ٤. فإذا كانت كتلة أحد طلبة الصف ٣٨ كغ، فجد العلامة المعيارية لكتلة هذا الطالب.

$$ز = \frac{س - \bar{س}}{ع}$$

$$ز = \frac{٣٨ - ٤٠}{٤} = \frac{-٢}{٤} = \frac{-١}{٢}$$

تدريب (٢): ص٢٤٨

تدريب ٢

جد قيمة المتوسط الحسابي لعلامات طلبة في مادة اللغة الإنجليزية، علمًا بأن الانحراف المعياري للعلامات ٤، وعلامة هديل (٨٥) تنحرف فوق هذا المتوسط بمقدار $٤\frac{١}{٤}$ انحراف معياري.

$$ز = \frac{س - \bar{س}}{ع}$$

$$٤\frac{١}{٤} = \frac{٨٥ - \bar{س}}{٤} \qquad \frac{١٧}{٤} = \frac{٨٥ - \bar{س}}{٤}$$

$$١٧ = ٨٥ - \bar{س} \qquad \bar{س} = ٨٥ - ١٧ \qquad \bar{س} = ٦٨$$

تدريب (٣): ص٢٥٠

تدريب ٣

إذا كانت المشاهدتان ٨٤ ، ٧٢ تقابلان العلامتين المعياريتين ١، (-٢) على الترتيب، فجد العلامة المعيارية للمشاهدة ٩٠

المشاهدة الأولى $١ = \frac{٨٤ - \bar{س}}{ع}$

المشاهدة الثانية $-٢ = \frac{٧٢ - \bar{س}}{ع}$

ايجاد انحراف المعياري:

$$٨٤ - \bar{س} = ع \qquad -ع = ٨٤ - \bar{س} \quad \times -١$$
$$٧٢ - \bar{س} = -٢ع \qquad -ع٢ = ٧٢ - \bar{س}$$

$$-ع٣ = -١٢ \qquad ع = ٤$$

ايجاد الوسط الحسابي:

$$\bar{س} = ٨٤ - ع \qquad ٢\bar{س} = ١٦٨ - ع٢ \quad \times ٢$$
$$\bar{س} = ٧٢ + ع٢ \qquad \bar{س} = ٧٢ + ع٢$$

$$٣\bar{س} = ٢٤٠ \qquad \bar{س} = ٨٠$$

$$ز = \frac{س - \bar{س}}{ع} = \frac{٨٠ - ٩٠}{٤} = \frac{١٠}{٤} = \frac{٥}{٢} = ٢.٥ \qquad ز = ٢.٥$$

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة (العلامة المعيارية)

حل أسئلة نهاية الدرس (٢٥١)

السؤال الأول: ص٢٥١

١) إذا كان المتوسط الحسابي لعلامات طلاب صف ما في مادة الكيمياء، ٦٠، والانحراف المعياري للعلامات ٣، فجد العلامة المعيارية لعلامة الطالب ساهر الذي نال علامة ٧٢، والعلامة المعيارية للطالب مهند الذي نال علامة ٥٤

العلامة المعيارية للطالب ساهر $ز = \frac{٧٢ - ٦٠}{٣} = \frac{١٢}{٣} = ٤$

العلامة المعيارية للطالب مهند $ز = \frac{٥٤ - ٦٠}{٣} = \frac{-٦}{٣} = -٢$

السؤال الثاني: ص٢٥١

٢) إذا علمت أن المتوسط الحسابي لأطوال طالبات إحدى المدارس هو ١٦٠سم، وأن الانحراف المعياري لأطوالهن ٤، فجد:

أ) الطول الذي ينحرف فوق المتوسط ثلاثة انحرافات معيارية.

ب) الطول الذي ينحرف تحت المتوسط انحرافين معياريين وربع انحراف معياري.

أ)

$$ز = \frac{س - \bar{س}}{ع}$$

$$٣ = \frac{س - ١٦٠}{٤}$$

$$١٢ = س - ١٦٠ \qquad س = ١٢ + ١٦٠ \qquad س = ١٧٢$$

ب)

$$ز = \frac{س - \bar{س}}{ع}$$

$$-٢\frac{١}{٤} = \frac{س - ١٦٠}{٤}$$

$$-٩ = س - ١٦٠ \qquad س = -٩ + ١٦٠ \qquad س = ١٥١$$

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة (العلامة المعيارية)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (٢٥١)

السؤال الثالث: ص٢٥١

٣) إذا كانت المشاهدة ٨ تقابل العلامة المعيارية ٢، وكان الانحراف المعياري ٢، فجد المتوسط الحسابي.

$$ز = \frac{س - \bar{س}}{ع}$$

$$٢ = \frac{٨ - \bar{س}}{٢}$$

$$٤ = ٨ - \bar{س} \qquad \bar{س} = -٤ + ٨ \qquad \bar{س} = ٤$$

السؤال الرابع: ص٢٥١

٤) إذا كانت العلامتان ٣٢، ١٢ تقابلان العلامتين المعياريتين ٣، (−٣) على الترتيب، فجد قيمة المتوسط الحسابي، والانحراف المعياري.

المشاهدة الأولى $٣ = \frac{٣٢ - \bar{س}}{ع}$

المشاهدة الثانية $-٣ = \frac{١٢ - \bar{س}}{ع}$

ايجاد انحراف المعياري:

$$٣ع = ٣٢ - \bar{س}$$
$$-٣ع = ١٢ - \bar{س}$$

$$٣ع = ٣٢ - \bar{س}$$
$$٣ع = -١٢ + \bar{س} \quad \times -١$$

$$٦ع = ٢٠ \qquad ع = \frac{١٠}{٣}$$

ايجاد الوسط الحسابي:

$$\bar{س} = ٣٢ - ٣ع$$
$$\bar{س} = ١٢ + ٣ع$$

$$٢\bar{س} = ٤٤ \qquad \bar{س} = ٢٢$$

الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة (التوزيع الطبيعي)

تدريب (١): ص ٢٥٥

تدريب ١

إذا كان (ز) متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا، فجد قيمة كل مما يأتي باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

١) ل(ز ≥ ٢,٤).

٢) ل(ز ≤ −٢,٨٥).

٣) ل(ز ≥ −١,١٤).

٤) ل(−١,٣٣ ≤ ز ≤ ١,٥٨).

١) ل(ز ≥ ٢.٤) = ٠.٩٩١٨

٢) ل(ز ≤ −٢.٨٥) = ل(ز ≥ ٢.٨٥)

= ٠.٩٩٧٨

٣) ل(ز ≥ −١.١٤) = ١ − ل(ز ≥ ١.١٤)

= ١ − ٠.٨٧٢٩

= ٠.١٢٧١

٤) ل(−١.٣٣ ≤ ز ≤ ١.٥٨) = ل(ز ≥ ١.٥٨) − ل(ز ≥ −١.٣٣)

= ل(ز ≥ ١.٥٨) − [١ − ل(ز ≥ ١.٣٣)]

= ٠.٩٤٢٩ − [١ − ٠.٩٠٨٢]

= ٠.٩٤٢٩ − ٠.٠٩١٨ = ٠.٨٥١١

تدريب (٢): ص ٢٥٦

تدريب ٢

إذا كان (س) متغيرًا عشوائيًا يتبع التوزيع الطبيعي الذي متوسطه الحسابي ٢٥، والانحراف المعياري ٥، فجد:

١) ل(س ≥ ٣٣).

٢) ل(٢٢ ≤ س ≤ ٣٠).

١)

$$= \text{ل}\left(\text{ز} \geq \frac{٣٣ - ٢٥}{٥}\right)$$

$$= \text{ل}\left(\text{ز} \geq \frac{٨}{٥}\right)$$

$$= \text{ل}\left(\text{ز} \geq ١\frac{٣}{٥}\right) = \text{ل}(\text{ز} \geq ١٫٦) = ٠.٩٤٥٢$$

٢)

$$\text{ل}\left(\text{ز} \geq \frac{٢٥ - ٣٠}{٥}\right) - \text{ل}\left(\text{ز} \geq \frac{٢٥ - ٢٢}{٥}\right)$$

$$= \text{ل}(\text{ز} \geq ١) - \text{ل}\left(\text{ز} \geq \frac{-٣}{٥}\right) = \text{ل}(\text{ز} \geq ١) - [١ - \text{ل}(\text{ز} \geq ٠.٦)]$$

= ٠.٨٤١٣ − [١ − ٠.٧٢٥٧]

= ٠.٨٤١٣ − ٠.٢٧٤٣

= ٠.٥٦٧

الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة (التوزيع الطبيعي)

تدريب (٣): ص ٢٥٨

تدريب ٣

إذا كانت علامات ١٠٠٠٠ طالب في جامعة ما تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي مقداره ٦٥، وانحراف معياري مقداره ٥، فكم يبلغ عدد الطلبة الناجحين، علمًا بأن علامة النجاح ٦٠؟

$$ل(س \geq ٦٠) = ل\left(ز \geq \frac{٦٠ - ٦٥}{٥}\right)$$

$$= ل(ز \geq -١)$$

$$= ل(ز \geq ١) = ٠.٨٤١٣$$

عدد الطلاب $= ٠.٨٤١٣ \times ١٠٠٠٠ = ٨٤١٣$ **طالب**

الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة (التوزيع الطبيعي)

حل أسئلة نهاية الدرس (٢٥٩)

السؤال الأول: ص٢٥٩

١) إذا كان (ز) متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا، فجد قيمة كل مما يأتي باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

أ) ل (ز≥ ١,٢).

ب) ل (ز ≥ ٢,٦٧).

جـ) ل (ز ≤ −١,٢٧).

د) ل (ز ≥ −٢,١٤).

هـ) ل (−١,١١ ≤ ز ≤ ١,١٥).

أ) $ل(ز \geq ١.٢) = ٠.٨٨٤٩$

ب) $ل(ز \geq ٢.٦٧) = ٠.٩٩٦٢$

ج) $ل(ز \leq -١.٢٧)$

$= ل(ز \geq ١.٢٧) = ٠.٨٩٨٠$

د) $ل(ز \geq -٢.١٤)$

$= ١ - ل(ز \geq ٢.١٤) = ١ - ٠.٩٨٣٨ = ٠.٠١٦٢$

هـ) $ل(-١.١١ \leq ز \leq ١.١٥) = ل(ز \geq ١.١٥) - ل(ز \geq -١.١١)$

$= ل(ز \geq ١.١٥) - [١ - ل(ز \geq ١.١١)]$

$= ٠.٨٧٤٩ - [١ - ٠.٨٦٦٥]$

$= ٠.٨٧٤٩ - ٠.١٣٣٥ = ٠.٧٤١٤$

السؤال الثاني: ص٢٥٩

٢) إذا كان (س) متغيرًا عشوائيًا يتبع التوزيع الطبيعي الذي متوسطه الحسابي ٨٠، وانحرافه المعياري ٥، فجد:

أ) ل (س ≥ ٧٦).

ب) ل (س ≤ ٨٨).

أ) $ل(س \geq ٧٦) = ل\left(ز \geq \frac{٧٦ - ٨٠}{٥}\right)$

$= ل\left(ز \geq \frac{-٤}{٥}\right) = ل(ز \geq -٠.٨)$

$= ١ - ل(ز \geq ٠.٨) = ١ - ٠.٧٨٨١ = ٠.٢١١٩$

ب) $ل(س \leq ٨٨) = ل\left(ز \leq \frac{٨٨ - ٨٠}{٥}\right)$

$= ل\left(ز \leq \frac{٨}{٥}\right) = ل(ز \leq ١.٦)$

$= ١ - ل(ز \geq ١.٦) = ١ - ٠.٩٤٥٢ = ٠.٠٥٤٨$

الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة (التوزيع الطبيعي)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (٢٥٩)

السؤال الثالث: ص٢٥٩

٣) إذا كان متوسط كتل ١٠٠٠ طالبة في إحدى مدارس عمّان هو ٥٥ كيلوغرامًا، والانحراف المعياري ٢، وكانت الكتل تتوزع توزيعًا طبيعيًّا، واختيرت إحدى الطالبات عشوائيًّا، فجد:

أ) احتمال أن لا تزيد كتلة الطالبة على ٥٢ كيلوغرامًا.

ب) احتمال أن تكون كتلة الطالبة محصورة بين ٥٠ كيلو غرامًا و ٦٠ كيلوغرامًا.

جـ) عدد الطالبات اللواتي تزيد كتلهن على ٥٦ كيلو غرامًا.

أ) $ل(س \geq ٥٢)$

$$= ل\left(ز \geq \frac{٥٢ - ٥٥}{٢}\right)$$

$$= ل\left(ز \geq \frac{-٣}{٢}\right) = ل(ز \geq -١.٥)$$

$$= ١ - ل(ز \geq ١.٥)$$

$$= ١ - ٠.٩٣٣٢ = ٠.٠٦٦٨$$

ب) $ل(٥٠ \geq س \geq ٦٠)$

$$= ل\left(\frac{٥٠ - ٥٥}{٢} \geq ز \geq \frac{٦٠ - ٥٥}{٢}\right)$$

$$= ل(-٢.٥ \geq ز \geq ٢.٥)$$

$$= ل(ز \geq ٢.٥) - ل(ز \geq -٢.٥)$$

$$= ل(ز \geq ٢.٥) - [١ - ل(ز \geq ٢.٥)]$$

$$= ٠.٩٩٣٨ - [١ - ٠.٩٩٣٨]$$

$$= ٠.٩٩٣٨ - ٠.٠٠٦٢ = ٠.٩٨٧٦$$

ج) $ل(س > ٥٦)$

$$= ل\left(ز > \frac{٥٦ - ٥٥}{٢}\right)$$

$$= ل\left(ز > \frac{١}{٢}\right) = ل(ز > ٠.٥)$$

$$= ١ - ل(ز \geq ٠.٥)$$

$$= ١ - ٠.٦٩١٥ = ٠.٣٠٨٥$$

عدد الطالبات $= ٠.٣٠٨٥ \times ١٠٠٠ = ٣٠٨.٥ \simeq ٣٠٩$ **طالبة**

الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة (التوزيع الطبيعي)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (٢٥٩)

السؤال الرابع: ص٢٥٩

٤) إذا كانت علامات امتحان عام تتبع توزيعًا طبيعيًا متوسطه الحسابي ٧٠، والانحرافه المعياري ١٠، فما نسبة العلامات التي تقل عن ٦٥؟

$$ل(س \geq ٦٥)$$

$$= ل\left(ز \geq \frac{٧٠-٦٥}{١٠}\right)$$

$$= ل\left(ز \geq \frac{-٥}{١٠}\right) = ل(ز \geq -٠.٥)$$

$$= ١ - ل(ز \geq ٠.٥)$$

$$= ١ - ٠.٦٩١٥ = ٠.٣٠٨٥$$

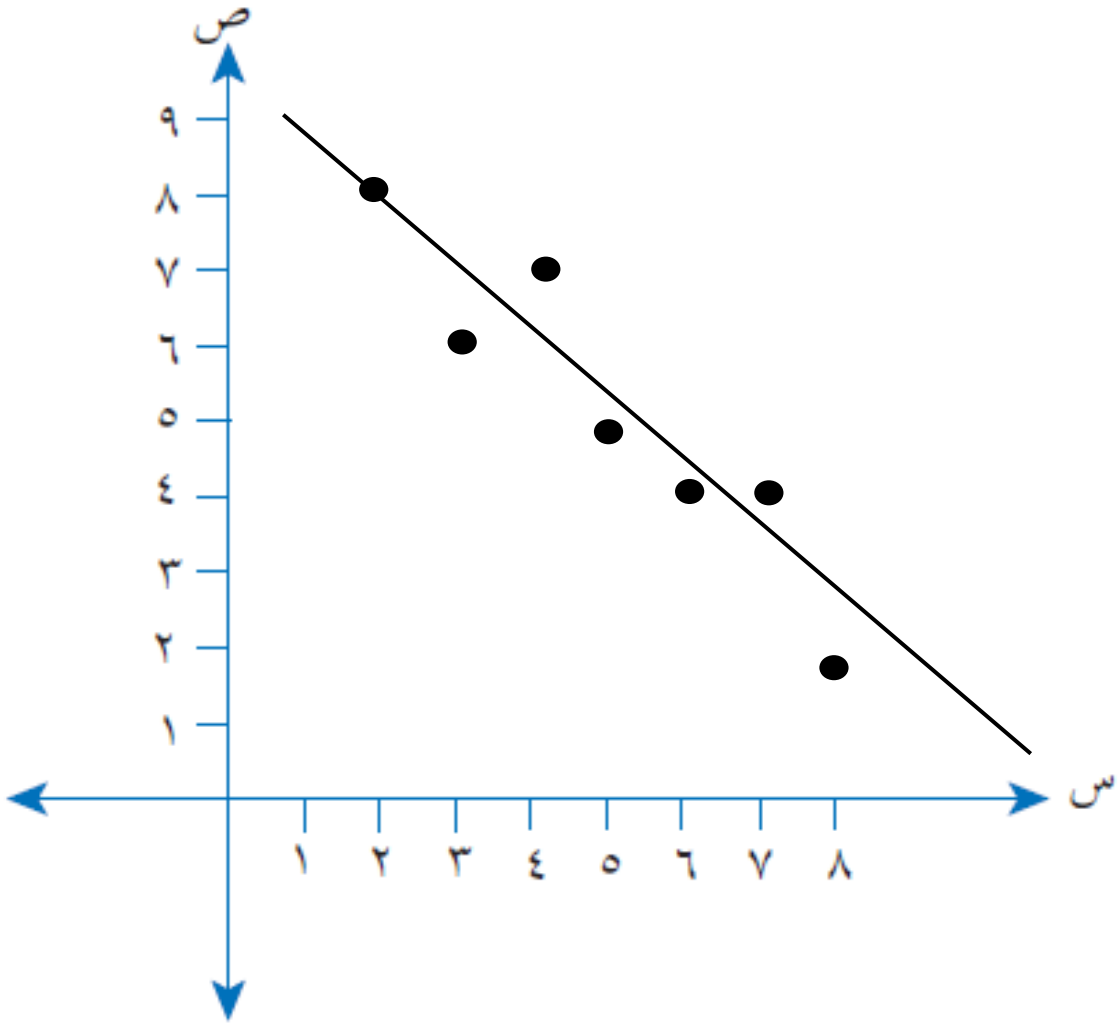
نسبة العلامات التي تقل عن ٦٥ هي تقريباً ٣١%

الفصل الثالث: الارتباط والانحدار (الارتباط)

تدريب (١): ص ٢٦٣

تدريب ١

النقط: (٢، ٨)، (٣، ٦)، (٥، ٥)، (٤، ٧)، (٨، ٢)، (٦، ٤)، (٧، ٤) تمثل القيم المتناظرة لمتغيرين. ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين: س، ص، محددًا نوع العلاقة التي تربط بينهما.



نوع العلاقة: العلاقة عكسية

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School"

الفصل الثالث: الارتباط والانحدار (الارتباط)

تدريب (٢): ص ٢٦٥

تدريب ٢

احسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين: س، ص كما في الجدول الآتي:

س	٢	٣	٦	٨	٩	١٠	١١
ص	٦	١٠	٥	٨	٤	٢	٧

س	ص	$س - \overline{س}$	$ص - \overline{ص}$	$(س - \overline{س})^{٢}$	$(ص - \overline{ص})^{٢}$	$(س - \overline{س})(ص - \overline{ص})$
٢	٦	٥-	صفر	٢٥	صفر	صفر
٣	١٠	٤-	٤	١٦	١٦	١٦-
٦	٥	١-	١-	١	١	١
٨	٨	١	٢	١	٤	٢
٩	٤	٢	٢-	٤	٤	٤-
١٠	٢	٣	٤-	٩	١٦	١٢-
١١	٧	٤	١	١٦	١	٤
٤٩	٤٢	صفر	صفر	٧٢	٤٢	٢٥-

$$\overline{س} = \frac{٤٩}{٧} = ٧ \qquad \overline{ص} = \frac{٤٢}{٧} = ٦$$

$$ر = \frac{\sum_{ر=١}^{٧}(س_ر - \overline{س})(ص_ر - \overline{ص})}{\sqrt{\sum_{ر=١}^{٧}(س_ر - \overline{س})^{٢} \times \sum_{ر=١}^{٧}(ص_ر - \overline{ص})^{٢}}} = \frac{-٢٥}{\sqrt{٤٢ \times ٧٢}}$$

تدريب (٣): ص ٢٦٦

تدريب ٣

إذا كان س، ص متغيرين، وعدد قيم كل منهما ٧، $\sum_{ك=١}^{٧}(س_ك - \overline{س})^{٢} = ٤$،

$\sum_{ك=١}^{٧}(ص_ك - \overline{ص})^{٢} = ٩$، $\sum_{ك=١}^{٧}(س_ك - \overline{س})(ص_ك - \overline{ص}) = ٢$،

فاحسب معامل ارتباط بيرسون بين هذين المتغيرين، محددًا نوع العلاقة بينهما.

$$ر = \frac{\sum_{ر=١}^{٧}(س_ر - \overline{س})(ص_ر - \overline{ص})}{\sqrt{\sum_{ر=١}^{٧}(س_ر - \overline{س})^{٢} \times \sum_{ر=١}^{٧}(ص_ر - \overline{ص})^{٢}}} = \frac{٢}{\sqrt{٩ \times ٤}} = \frac{٢}{\sqrt{٣٦}} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣} = ٠.٣٣٣$$

نوع العلاقة طردية ضعيفة

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الثالث: الارتباط والانحدار (الارتباط)

تدريب (٤): ص ٢٦٦

١) $ر = ٠.٦٥$

٢) $ر = ٠.٦٥$

٣) $ر = -٠.٦٥$

تدريب ٤

إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين: س، ص هو ٠،٦٥، فجد معامل الارتباط بين س*، ص* في كل مما يأتي:

١) س* = −٨س + ٥ ، ص* = ٨ − ص

٢) س* = س + ٥ ، ص* = ٦ص − ٥

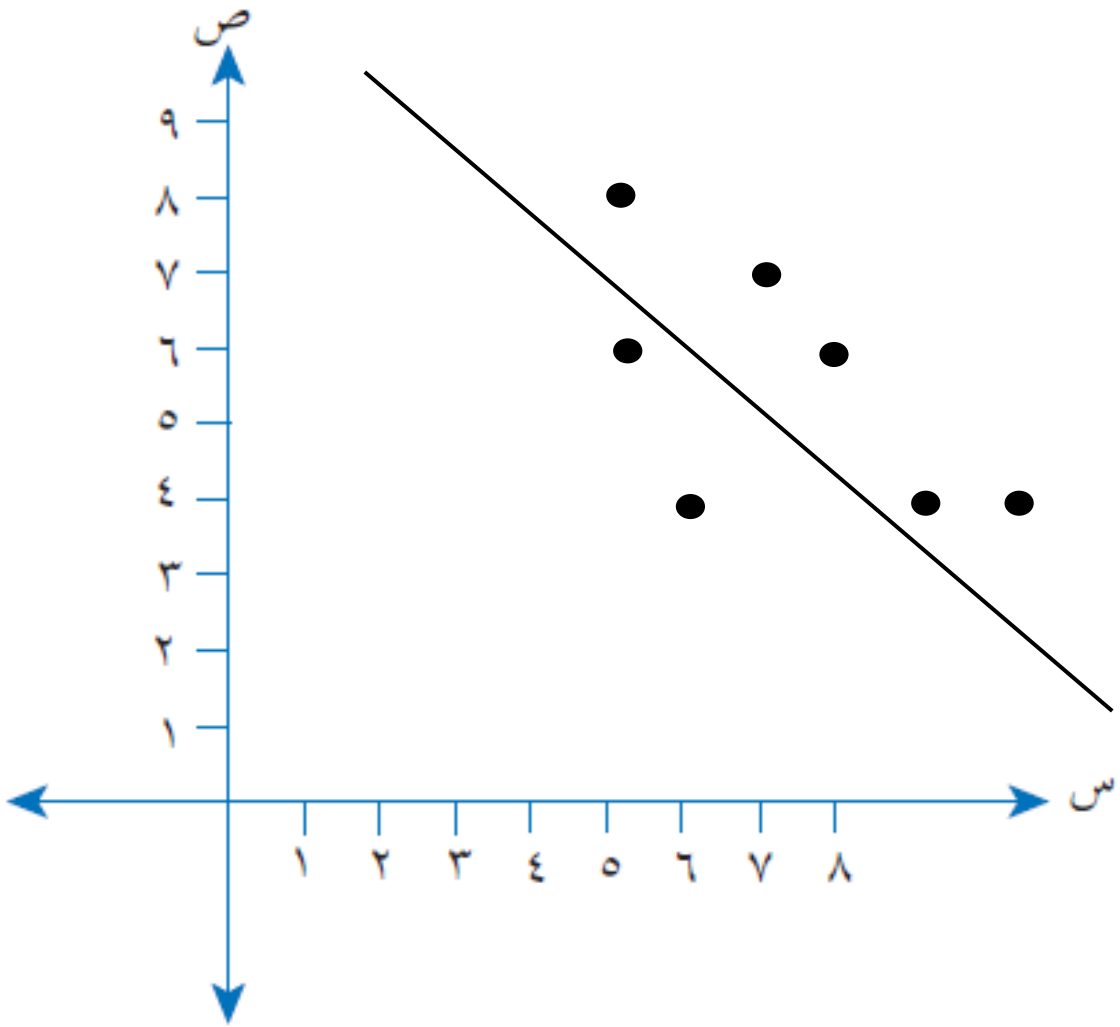
٣) س* = ٢٠ − ٧س ، ص* = ص − ٥

الفصل الثالث: الارتباط والانحدار (الارتباط)

حل أسئلة نهاية الدرس (٢٦٩)

السؤال الأول: ص٢٦٩

١) النقط: (٧، ٧)، (٨، ٦)، (٦، ٥)، (٥، ٨)، (٩، ٤)، (٦، ٤)، (١٠، ٣) تمثل القيم المتناظرة لمتغيرين. ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين: س، ص، محددًا نوع العلاقة التي تربط بينهما.



نوع العلاقة: علاقة عكسية

الفصل الثالث: الارتباط والانحدار (الارتباط)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (٢٦٩)

السؤال الثاني: ص٢٦٩

٢) الجدول الآتي يبين بُعد مؤسسة استهلاكية عن مركز المدينة بالكيلومتر (س)، وحجم مبيعات المؤسسة بالألف دينار شهريًا (ص) لخمس مؤسسات. احسب معامل الارتباط بين المتغيرين: س، ص.

س	٧	٦	٢	٣	١٢
ص	١١	٩	٦	٨	٦

س	ص	$س - \overline{س}$	$ص - \overline{ص}$	$(س - \overline{س})^2$	$(ص - \overline{ص})^2$	$(س - \overline{س})(ص - \overline{ص})$
٧	١١	١	٣	١	٩	٣
٦	٩	صفر	١	صفر	١	صفر
٢	٦	٤-	٢-	١٦	٤	٨
٣	٨	٣-	صفر	٩	صفر	صفر
١٢	٦	٦	٢-	٣٦	٤	١٢-
٣٠	٤٠	صفر	صفر	٦٢	١٨	١-

$$\overline{س} = \frac{٣٠}{٥} = ٦ \qquad \overline{ص} = \frac{٤٠}{٥} = ٨ \qquad ر = \frac{\sum_{ر=١}^{٥}(س_ر - \overline{س})(ص_ر - \overline{ص})}{\sqrt{\sum_{ر=١}^{٥}(س_ر - \overline{س})^2 \times \sum_{ر=١}^{٥}(ص_ر - \overline{ص})^2}} = \frac{-١}{\sqrt{٦٢ \times ١٨}}$$

السؤال الثالث: ص٢٦٩

٣) احسب معامل الارتباط بين المتغيرين: س، ص للقيم المبينة في الجدول الآتي:

س	٦٠	٧٠	٧٥	٩٥
ص	٨٠	١٠٠	٩٠	٥٠

س	ص	$س - \overline{س}$	$ص - \overline{ص}$	$(س - \overline{س})^2$	$(ص - \overline{ص})^2$	$(س - \overline{س})(ص - \overline{ص})$
٦٠	٨٠	١٥-	صفر	٢٢٥	صفر	صفر
٧٠	١٠٠	٥-	٢٠	٢٥	٤٠٠	١٠٠-
٧٥	٩٠	صفر	١٠	صفر	١٠٠	صفر
٩٥	٥٠	٢٠	٣٠-	٤٠٠	٩٠٠	٦٠٠-
٣٠٠	٣٢٠	صفر	صفر	٦٥٠	١٤٠٠	٧٠٠-

$$\overline{س} = \frac{٣٠٠}{٤} = ٧٥ \qquad \overline{ص} = \frac{٣٢٠}{٤} = ٨٠ \qquad ر = \frac{\sum_{ر=١}^{٥}(س_ر - \overline{س})(ص_ر - \overline{ص})}{\sqrt{\sum_{ر=١}^{٥}(س_ر - \overline{س})^2 \times \sum_{ر=١}^{٥}(ص_ر - \overline{ص})^2}} = \frac{-٧٠٠}{\sqrt{١٤٠٠ \times ٦٥٠}}$$

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الثالث: الارتباط والانحدار (الارتباط)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (٢٦٩)

السؤال الرابع: ص٢٦٩

٤) إذا كان س، ص متغيرين، وعدد قيم كل منهما (٧)، $\sum_{ك=١}^{٧} (س_ك - \overline{س})^٢ = ٢٠$،

$\sum_{ك=١}^{٧} (ص_ك - \overline{ص})^٢ = ٥٠٠$، $\sum_{ك=١}^{٧} (س_ك - \overline{س})(ص_ك - \overline{ص}) = -٨$:

أ) جد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين: س، ص. ب) حدد نوع العلاقة بينهما.

أ)

$$ر = \frac{\sum_{ك=١}^{ن} (س - \overline{س})(ص - \overline{ص})}{\sqrt{\sum_{ك=١}^{ن} (س_ك - \overline{س})^٢ \times \sum_{ك=١}^{ن} (ص_ك - \overline{ص})^٢}} = \frac{-٨}{\sqrt{٢٠ \times ٥٠٠}} = \frac{-٨}{\sqrt{١٠٠٠٠}} = \frac{-٨}{١٠٠}$$

ب)

نوع العلاقة: علاقة عكسية ضعيفة

السؤال الخامس: ص٢٦٩

٥) أي معاملات الارتباط الآتية أقوى:

أ) ٠,٧ ب) – ٠,٩ جـ) ٠,٨ د) – ٠,٨

الجواب هو: الخيار (ب) ارتباط قوي (علاقة عكسية)

السؤال السادس: ص٢٦٩

٦) إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين: س، ص هو ٠,٨٥، فجد معامل الارتباط بين س*، ص* في كل مما يأتي:

أ) س* = –٩س + ١٥ ، ص* = ٨ – ٢ص

ب) س* = ٤س + ٥٢ ، ص* = ص – ٥

جـ) س* = ١٧ – ٧س ، ص* = ٥ص – ٣

أ) ر = ٠.٨٥

ب) ر = ٠.٨٥

ج) ر = –٠.٨٥

الفصل الثالث: الارتباط والانحدار (خط الانحدار)

تدريب (١): ص ٢٧٣

تدريب ١

الجدول الآتي يبين معدل أربعة طلاب في امتحانات الثانوية العامة والجامعة:

رقم الطالب	١	٢	٣	٤
معدل الثانوية العامة (س)	٦٥	٧٠	٨٠	٨٥
معدل الجامعة (ص)	٦٠	٦٠	٧٠	٩٠

أجب عما يأتي:

١) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بمعدل الجامعة إذا عُلِم معدله في الثانوية العامة.

٢) تنبأ بمعدل طالب في الجامعة إذا كان معدله في الثانوية العامة ٨٨

٣) جد الخطأ في التنبؤ بمعدل طالب في الجامعة إذا كان معدله في الثانوية العامة ٧٠

١)

س	ص	$س - \overline{س}$	$ص - \overline{ص}$	$(س - \overline{س})^2$	$(س - \overline{س})(ص - \overline{ص})$
٦٥	٦٠	١٠-	١٠-	١٠٠	١٠٠
٧٠	٦٠	٥-	١٠-	٢٥	٥٠
٨٠	٧٠	٥	صفر	٢٥	صفر
٨٥	٩٠	١٠	٢٠	١٠٠	٢٠٠-
٣٠٠	٢٨٠	صفر	صفر	٢٥٠	٥٠-

$$\overline{س} = \frac{٣٠٠}{٤} = ٧٥ \qquad \overline{ص} = \frac{٢٨٠}{٤} = ٧٠$$

$$أ = \frac{\sum (س-\overline{س})(ص-\overline{ص})}{\sum (س-\overline{س})^2} = \frac{٥٠-}{٢٥٠} = -\frac{١}{٥} \qquad ب = \overline{ص} - أ\overline{س}$$

$$ب = ٧٠ + \frac{١}{٥} \times ٧٥ = ٧٠ + \frac{٧٥}{٥}$$

$$\hat{ص} = أس + ب \qquad ب = ٧٠ + ١٥ = ٨٥$$

$$\hat{ص} = -\frac{١}{٥} س + ٨٥$$

٢)

$$\hat{ص} = -\frac{١}{٥} \times ٨٨ + ٨٥$$

$$\hat{ص} = -\frac{٨٨}{٥} + ٨٥ \qquad \hat{ص} = -١٧.٦ + ٨٥ = ٦٧.٤$$

٣)

$$\hat{ص} = -\frac{١}{٥} \times ٧٠ + ٨٥ \qquad \hat{ص} = -\frac{٧٠}{٥} + ٨٥$$

$$\hat{ص} = -١٤ + ٨٥ \qquad \hat{ص} = -١٤ + ٨٥ = ٧١$$

الخطأ = ٧٠ − ٧١ = −١

Marwan Abu Daiyeh "Virtual School"

الفصل الثالث: الارتباط والانحدار (خط الانحدار)

تدريب (٢): ص ٢٧٤

١)

$\hat{ص} = ٠.٦ \times ١٠ + ١$

$\hat{ص} = ٦ + ١$ $\quad$ $\hat{ص} = ٧$

٢)

$\hat{ص} = ٠.٦ \times ١٥ + ١$

$\hat{ص} = ٩ + ١$ $\quad$ $\hat{ص} = ١٠$

الخطأ = $٦ - ١٠ = -٤$

تدريب ٢

إذا علمت أن معادلة خط الانحدار للعلاقة بين عدد ساعات العمل اليومي (س) وعدد الأخطاء التي يرتكبها الموظف في هذا اليوم (ص) هي: $\hat{ص} = ٠,٦$ س + ١، فأجب عما يأتي:

١) تنبأ بعدد الأخطاء التي سيرتكبها موظف يعمل مدة ١٠ ساعات يوميًا.

٢) إذا كان عدد الأخطاء التي يرتكبها موظف يعمل ١٥ ساعة يوميًا هي ٦ أخطاء، فجد الخطأ في التنبؤ.

الفصل الثالث: الارتباط والانحدار (خط الانحدار)

حل أسئلة نهاية الدرس (٢٧٥)

السؤال الأول: ص٢٧٥

١) الجدول الآتي يبين معدل خمسة طلاب في الصفين: التاسع والعاشر.

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
التاسع (س)	٥٠	٥٥	٧٠	٨٥	٩٠
العاشر (ص)	٦٠	٧٠	٦٠	٧٠	٨٠

أ) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بمعدل الطالب في الصف العاشر إذا عُلِم معدله في الصف التاسع.

ب) تنبأ بمعدل طالب في الصف العاشر إذا كان معدله في الصف التاسع ٨٨

جـ) جد الخطأ في التنبؤ بمعدل طالب في الصف العاشر إذا كان معدله في الصف التاسع ٩٠

أ)

س	ص	$س - \overline{س}$	$ص - \overline{ص}$	$(س - \overline{س})^2$	$(س - \overline{س})(ص - \overline{ص})$
٥٠	٦٠	٢٠-	٨-	٤٠٠	١٦٠
٥٥	٧٠	١٥-	٢	٢٢٥	٣٠-
٧٠	٦٠	صفر	٨-	صفر	صفر
٨٥	٧٠	١٥	٢	٢٢٥	٣٠
٩٠	٨٠	٢٠	١٢	٤٠٠	٢٤٠
٣٥٠	٣٤٠	صفر	صفر	١٢٥٠	٤٠٠

$\overline{س} = \frac{٣٥٠}{٥} = ٧٠$ $\quad$ $\overline{ص} = \frac{٣٤٠}{٥} = ٦٨$

$أ = \frac{\sum(س-\overline{س})(ص-\overline{ص})}{\sum(س-\overline{س})^2} = \frac{٤٠٠}{١٢٥٠} = \frac{٨}{٢٥}$

$ب = \overline{ص} - أ\overline{س}$

$ب = ٦٨ - \frac{٨}{٢٥} \times ٧٠$

$ب = ٦٨ - \frac{١١٢}{٥} = \frac{٢٢٨}{٥}$

$\hat{ص} = أس + ب$

$\hat{ص} = \frac{٨}{٢٥} س + \frac{٢٢٨}{٥}$

ب)

$\hat{ص} = \frac{١}{٥} \times ٨٨ + ٥٤$

$\hat{ص} = ١٧.٦ + ٥٤$ $\quad$ $\hat{ص} = ٧١.٦$

ج)

$\hat{ص} = \frac{١}{٥} \times ٩٠ + ٥٤$

$\hat{ص} = ١٨ + ٥٤$ $\quad$ $\hat{ص} = ٧٢$

الخطأ = $٩٠ - ٧٢ = ١٨$

الفصل الثالث: الارتباط والانحدار (خط الانحدار)

تابع حل أسئلة نهاية الدرس (٢٧٥)

السؤال الثاني: ص٢٧٥

٢) إذا كان س، ص متغيرين، وعدد قيم كل منهما ٨، $\sum_{ك=١}^{٨} (س_ك - \overline{س})^٢ = ٢٠$

$\sum_{ك=١}^{٨} (س_ك - \overline{س})(ص_ك - \overline{ص}) = ٤٠$، $\overline{س} = ١٥$، $\overline{ص} = ٤٥$، فجد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص إذا علمت قيم س.

$\hat{ص} = أ س + ب$

$$أ = \frac{\sum(س - \overline{س})(ص - \overline{ص})}{\sum(س - \overline{س})^٢} = \frac{٤٠}{٢٠} = ٢$$

$ب = \overline{ص} - أ\overline{س}$ $\quad ب = ٤٥ - ٢ \times ١٥$

$ب = ٤٥ - ٣٠ = ١٥$

$\hat{ص} = ٢س + ١٥$

السؤال الثالث: ص٢٧٥

٣) إذا علمت أن معادلة خط الانحدار للعلاقة بين قيمة رأس المال (س) والأرباح السنوية لشركة بالألف دينار (ص) هي: $\hat{ص} = ٠,٣ س + ١٠$، فجد الخطأ في التنبؤ بأرباح شركة رأس مالها ٦٠ ألف دينار، وأرباحها السنوية ٢٧,٤ ألف دينار.

$\hat{ص} = ٠.٣ \times ٦٠ + ١٠$

$\hat{ص} = ١٨ + ١٠ = ٢٨$

الخطأ = $٢٧.٤ - ٢٨ = -٠.٦$

حل أسئلة نهاية الوحدة الخامسة (الإحصاء والاحتمالات)

السؤال الأول: ص٢٧٦

١) بكم طريقة يمكن اختيار ٤ مهندسين، و٣ فنيين لتكوين لجنة من بين ٥ مهندسين و ١٠ فنيين؟

عدد الطرق = $\binom{٥}{٤}\binom{١٠}{٣}$

$= ٥ \times \frac{١٠ \times ٩ \times ٨}{٣ \times ٢ \times ١} = ٥ \times ١٢٠ = ٦٠٠$ طريقة

السؤال الثاني: ص٢٧٦

٢) جد قيمة (ر) التي تحقق المعادلة: ٣ ل (٦، ر) = ٣٦٠

$٣ل(٦، ر) = ٣٦٠$

$ل(٦، ر) = ١٢٠$

$٦ \times ٥ \times ٤ = ١٢٠$ $\quad ر = ٣$

السؤال الثالث: ص٢٧٦

٣) إذا كان (س) متغيرًا عشوائيًا ذا حدين، ومعاملاه: ن = ٢، أ = ٠,٤ ، فجد:

أ) قيم (س).

ب) التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س).

أ)

$س = \{٠، ١، ٢\}$

ب)

$ن = ٢$ $\quad أ = ٠.٤$ $\quad ١ - أ = ٠.٦$

$ل(س = ٠) = \binom{٢}{٠} \times (٠.٤)^{٠} \times (٠.٦)^{٢} = ٠.٣٦$

$ل(س = ١) = \binom{٢}{١} \times (٠.٤)^{١} \times (٠.٦)^{١} = ٠.٤٨$

$ل(س = ٢) = \binom{٢}{٢} \times (٠.٤)^{٢} \times (٠.٦)^{٠} = ٠.١٦$

س	صفر	١	٢
ل(س)	٠.٣٦	٠.٤٨	٠.١٦

تابع حل أسئلة نهاية الوحدة الخامسة (الإحصاء والاحتمالات)

السؤال الرابع: ص٢٧٦

٤) إذا كان الوسط الحسابي لأعمار مجموعة من الأشخاص هو ٤٢ سنة، والانحراف المعياري لها ٤، فجد العمر الذي ينحرف الحرافين معياريين تحت الوسط الحسابي.

$$ز = \frac{س - \bar{س}}{ع}$$

$$-٢ = \frac{س - ٤٢}{٤}$$

$$س - ٤٢ = -٨ \qquad س = ٤٢ - ٨ \qquad س = ٣٤$$

السؤال الخامس: ص٢٧٦

٥) إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) معطى بالمجموعة:
{(١، ٠,٤)، (٢، ٠,٥)، (٣، ب)}، فجد قيمة (ب).

$$٠.٤ + ٠.٥ + ب = ١$$
$$٠.٩ + ب = ١$$
$$ب = ١ - ٠.٩$$
$$ب = ٠.١$$

السؤال السادس: ص٢٧٦

٦) إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين: س، ص هو (-٠,٨)، فجد معامل الارتباط بين س*، ص* في كل مما يأتي:

أ) $س^* = -١٠س$ ، $ص^* = ٨ - ص$

ب) $س^* = ٤س + ٨$ ، $ص^* = ص - ٥$

أ) $ر = -٠.٨$

ب) $ر = -٠.٨$

تابع حل أسئلة نهاية الوحدة الخامسة (الإحصاء والاحتمالات)

السؤال السابع: ص٢٧٦

٧) الجدول الآتي يبين القيم المتناظرة للمتغيرين: س، ص:

س	١	٢	٤	٥
ص	٥	٦	٧	١٠

أ) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيمة ص إذا عُلِمت قيمة س.

ب) تنبأ بقيمة ص إذا كان س = ١٤

جـ) جد الخطأ في التنبؤ بقيمة ص إذا كان س = ٤

أ)

س	ص	$س - \overline{س}$	$ص - \overline{ص}$	$(س - \overline{س})^{٢}$	$(س - \overline{س})(ص - \overline{ص})$
١	٥	٢-	٢-	٤	٤
٢	٦	١-	١-	١	١
٤	٧	١	صفر	١	صفر
٥	١٠	٢	٣	٤	٦
١٢	٢٨	صفر	صفر	١٠	١١

$$\overline{س} = \frac{١٢}{٤} = ٣ \qquad \overline{ص} = \frac{٢٨}{٤} = ٧$$

$$أ = \frac{\sum (س - \overline{س})(ص - \overline{ص})}{\sum (س - \overline{س})^{٢}} = \frac{١١}{١٠} = ١.١$$

$$ب = \overline{ص} - أ\overline{س}$$

$$ب = ٧ - ١.١ \times ٣$$

$$ب = ٧ - ٣.٣ = ٣.٧$$

$$\hat{ص} = أس + ب$$

$$\hat{ص} = ١.١س + ٣.٧$$

ب)

$$\hat{ص} = ١.١ \times ١٤ + ٣.٧$$

$$\hat{ص} = ١٥.٤ + ٣.٧ \qquad \hat{ص} = ١٩.١$$

ج)

$$\hat{ص} = ١.١ \times ٤ + ٣.٧$$

$$\hat{ص} = ٤.٤ + ٣.٧ \qquad \hat{ص} = ٨.١$$

الخطأ = ٧ − ٨.١ = −١.١

تابع حل أسئلة نهاية الوحدة الخامسة (الإحصاء والاحتمالات)

السؤال الثامن: ص٢٧٧

٨) إذا كان (ز) متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا، فجد قيمة كل مما يأتي باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

أ) ل (ز≥١,٧). ب) ل (ز ≥ ٢,١٥).

جـ) ل (ز ≤ −١,١٤). د) ل (ز ≥ −٢,٥).

هـ) ل (−١,٣٢≥ز≥ ١,١).

أ) $ل(ز \geq ١.٧) = ٠.٩٥٥٤$

ب) $ل(ز \geq ٢.١٥) = ٠.٩٨٤٢$

ج) $ل(ز \leq -١.١٤)$

$= ل(ز \geq ١.١٤) = ٠.٨٧٢٩$

د) $ل(ز \geq -٢.٥)$

$= ١ - ل(ز \geq ٢.٥) = ١ - ٠.٩٩٣٨ = ٠.٠٠٦٢$

هـ) $ل(-١.٣٢ \leq ز \leq ١.١) = ل(ز \geq ١.١) - ل(ز \geq -١.٣٢)$

$= ل(ز \geq ١.١) - [١ - ل(ز \geq ١.٣٢)]$

$= ٠.٨٦٤٣ - [١ - ٠.٩٠٦٦]$

$= ٠.٨٦٤٣ - ٠.٠٩٣٤ = ٠.٧٧٠٩$

السؤال التاسع: ص٢٧٧

٩) إذا كان (س) متغيرًا عشوائيًا يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي ٩٠، والانحراف المعياري (٥)، فجد:

أ) ل (س ≥ ٨٥). ب) ل (س ≤ ٩٣).

أ)

$ل(س \geq ٨٥)$

$= ل\left(ز \geq \frac{٨٥ - ٩٠}{٥}\right)$

$= ل\left(ز \geq \frac{-٥}{٥}\right) = ل(ز \geq -١)$

$= ١ - ل(ز \geq ١)$

$= ١ - ٠.٨٤١٣ = ٠.١٥٨٧$

ب)

$ل(س \leq ٩٣)$

$= ل\left(ز \leq \frac{٩٠ - ٩٣}{٥}\right)$

$= ل\left(ز \leq \frac{٣}{٥}\right) = ل(ز \leq ٠.٦)$

$= ١ - ل(ز \geq ٠.٦)$

$= ١ - ٠.٧٢٥٧ = ٠.٢٧٤٣$

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School"

تابع حل أسئلة نهاية الوحدة الخامسة (الإحصاء والاحتمالات)

السؤال العاشر: ص٢٧٧

١٠) إذا كان متوسط معدل ١٠٠٠ طالبة في إحدى مدارس عمّان ٨٠، والانحراف المعياري ٥، وكانت المعدلات تتوزع توزيعًا طبيعيًا، واختيرت إحدى الطالبات عشوائيًا، فجد:

أ) احتمال أن لا يزيد معدل الطالبة على ٧٥

ب) احتمال أن يكون معدل الطالبة محصورًا بين ٧٠ و ٩٠

جـ) عدد الطالبات اللواتي يزيد معدل كل منهن على ٧٠

أ)

$$ل(س \geq ٧٥)$$

$$= ل\left(ز \geq \frac{٧٥-٨٠}{٥}\right)$$

$$= ل\left(ز \geq \frac{-٥}{٥}\right) = ل(ز \geq -١)$$

$$= ١ - ل(ز \geq ١)$$

$$= ١ - ٠.٨٤١٣ = ٠.١٥٨٧$$

ب)

$$ل(٧٠ \geq س \geq ٩٠)$$

$$= ل\left(\frac{٧٠-٨٠}{٥} \geq ز \geq \frac{٩٠-٨٠}{٥}\right)$$

$$= ل(-٢ \geq ز \geq ٢)$$

$$= ل(ز \geq ٢) - ل(ز \geq -٢)$$

$$= ل(ز \geq ٢) - [١ - ل(ز \geq ٢)]$$

$$= ٠.٩٧٧٢ - [١ - ٠.٩٧٧٢]$$

$$= ٠.٩٧٧٢ - ٠.٠٢٢٨ = ٠.٩٥٤٤$$

ج)

$$ل(س > ٧٠)$$

$$= ل\left(ز > \frac{٧٠-٨٠}{٥}\right)$$

$$= ل\left(ز > \frac{-١٠}{٥}\right) = ل(ز > -٢)$$

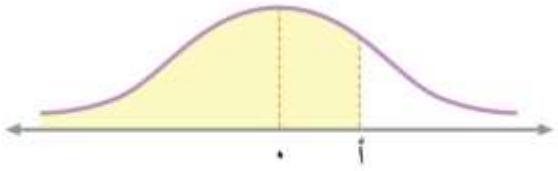
$$= ل(ز \geq ٢)$$

$$= ٠.٩٧٧٢$$

عدد الطالبات $= ٠.٩٧٧٢ \times ١٠٠٠ = ٩٧٧.٢ \simeq ٩٧٨$ **طالبة**

Marwan Abu Daiyeh
"Virtual School" 0797-55-27-27

جدول التوزيع الطبيعي



أ	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠	٠,٥١٦٠	٠,٥١٩٩	٠,٥٢٣٩	٠,٥٢٧٩	٠,٥٣١٩	٠,٥٣٥٩
٠,١	٠,٥٣٩٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧	٠,٥٥٥٧	٠,٥٥٩٦	٠,٥٦٣٦	٠,٥٦٧٥	٠,٥٧١٤	٠,٥٧٥٣
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠	٠,٥٩٤٨	٠,٥٩٨٧	٠,٦٠٢٦	٠,٦٠٦٤	٠,٦١٠٣	٠,٦١٤١
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣	٠,٦٣٣١	٠,٦٣٦٨	٠,٦٤٠٦	٠,٦٤٤٣	٠,٦٤٨٠	٠,٦٥١٧
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤	٠,٦٧٠٠	٠,٦٧٣٦	٠,٦٧٧٢	٠,٦٨٠٨	٠,٦٨٤٤	٠,٦٨٧٩
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩	٠,٧٠٥٤	٠,٧٠٨٨	٠,٧١٢٣	٠,٧١٥٧	٠,٧١٩٠	٠,٧٢٢٤
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧	٠,٧٣٨٩	٠,٧٤٢٢	٠,٧٤٥٤	٠,٧٤٨٦	٠,٧٥١٧	٠,٧٥٤٩
٠,٧	٠,٧٥٨٠	٠,٧٦١١	٠,٧٦٤٢	٠,٧٦٧٣	٠,٧٧٠٤	٠,٧٧٣٤	٠,٧٧٦٤	٠,٧٧٩٤	٠,٧٨٢٣	٠,٧٨٥٢
٠,٨	٠,٧٨٨١	٠,٧٩١٠	٠,٧٩٣٥	٠,٧٩٦٧	٠,٧٩٩٥	٠,٨٠١٣	٠,٨٠٥١	٠,٨٠٧٨	٠,٨١٠٦	٠,٨١٣٣
٠,٩	٠,٨١٥٩	٠,٨١٨٦	٠,٨٢١٢	٠,٨٢٣٨	٠,٨٢٦٤	٠,٨٢٨٩	٠,٨٣١٥	٠,٨٣٤٠	٠,٨٣٦٥	٠,٨٣٨٩
١,٠	٠,٨٤١٣	٠,٨٤٣٨	٠,٨٤٦١	٠,٨٤٨٥	٠,٨٥٠٨	٠,٨٥٣١	٠,٨٥٥٤	٠,٨٥٧٧	٠,٨٥٩٩	٠,٨٦٢١
١,١	٠,٨٦٤٣	٠,٨٦٦٥	٠,٨٦٨٦	٠,٨٧٠٨	٠,٨٧٢٩	٠,٨٧٤٩	٠,٨٧٧٠	٠,٨٧٩٠	٠,٨٨١٠	٠,٨٨٣٠
١,٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٨٦٩	٠,٨٨٨٨	٠,٨٩٠٧	٠,٨٩٢٥	٠,٨٩٤٤	٠,٨٩٦٢	٠,٨٩٨٠	٠,٨٩٩٧	٠,٩٠١٥
١,٣	٠,٩٠٣٢	٠,٩٠٤٩	٠,٩٠٦٦	٠,٩٠٨٢	٠,٩٠٩٩	٠,٩١١٥	٠,٩١٣١	٠,٩١٤٧	٠,٩١٦٢	٠,٩١٧٧
١,٤	٠,٩١٩٢	٠,٩٢٠٧	٠,٩٢٢٢	٠,٩٢٣٦	٠,٩٢٥١	٠,٩٢٦٥	٠,٩٢٧٩	٠,٩٢٩٢	٠,٩٣٠٦	٠,٩٣١٩
١,٥	٠,٩٣٣٢	٠,٩٣٤٥	٠,٩٣٥٧	٠,٩٣٧٠	٠,٩٣٨٢	٠,٩٣٩٤	٠,٩٤٠٦	٠,٩٤١٨	٠,٩٤٢٩	٠,٩٤٤١
١,٦	٠,٩٤٥٢	٠,٩٤٦٣	٠,٩٤٧٤	٠,٩٤٨٤	٠,٩٤٩٥	٠,٩٥٠٥	٠,٩٥١٥	٠,٩٥٢٥	٠,٩٥٣٥	٠,٩٥٤٥
١,٧	٠,٩٥٥٤	٠,٩٥٦٤	٠,٩٥٧٣	٠,٩٥٨٢	٠,٩٥٩١	٠,٩٥٩٥	٠,٩٦٠٨	٠,٩٦١٦	٠,٩٦٢٥	٠,٩٦٣٣
١,٨	٠,٩٦٤١	٠,٩٦٤٩	٠,٩٦٥٦	٠,٩٦٦٤	٠,٩٦٧١	٠,٩٦٧٨	٠,٩٦٨٦	٠,٩٦٩٣	٠,٩٦٩٩	٠,٩٧٠٦
١,٩	٠,٩٧١٣	٠,٩٧١٩	٠,٩٧٢٦	٠,٩٧٣٢	٠,٩٧٣٨	٠,٩٧٤٤	٠,٩٧٥٠	٠,٩٧٥٦	٠,٩٧٦١	٠,٩٧٦٧
٢,٠	٠,٩٧٧٢	٠,٩٧٧٨	٠,٩٧٨٣	٠,٩٧٨٨	٠,٩٧٩٣	٠,٩٧٩٨	٠,٩٨٠٣	٠,٩٨٠٨	٠,٩٨١٢	٠,٩٨١٧
٢,١	٠,٩٨٢١	٠,٩٨٢٦	٠,٩٨٣٠	٠,٩٨٣٤	٠,٩٨٣٨	٠,٩٨٤٢	٠,٩٨٤٦	٠,٩٨٥٠	٠,٩٨٥٤	٠,٩٨٥٧
٢,٢	٠,٩٨٦١	٠,٩٨٦٤	٠,٩٨٦٨	٠,٩٨٧١	٠,٩٨٧٥	٠,٩٨٧٨	٠,٩٨٨١	٠,٩٨٨٤	٠,٩٨٨٧	٠,٩٨٩٠
٢,٣	٠,٩٨٩٣	٠,٩٨٩٦	٠,٩٨٩٨	٠,٩٩٠١	٠,٩٩٠٤	٠,٩٩٠٦	٠,٩٩٠٩	٠,٩٩١١	٠,٩٩١٣	٠,٩٩١٦
٢,٤	٠,٩٩١٨	٠,٩٩٢٠	٠,٩٩٢٢	٠,٩٩٢٥	٠,٩٩٢٧	٠,٩٩٢٩	٠,٩٩٣١	٠,٩٩٣٢	٠,٩٩٣٤	٠,٩٩٣٦
٢,٥	٠,٩٩٣٨	٠,٩٩٤٠	٠,٩٩٤١	٠,٩٩٤٣	٠,٩٩٤٥	٠,٩٩٤٦	٠,٩٩٤٨	٠,٩٩٤٩	٠,٩٩٥١	٠,٩٩٥٢
٢,٦	٠,٩٩٥٣	٠,٩٩٥٥	٠,٩٩٥٦	٠,٩٩٥٧	٠,٩٩٥٩	٠,٩٩٦٠	٠,٩٩٦١	٠,٩٩٦٢	٠,٩٩٦٣	٠,٩٩٦٤
٢,٧	٠,٩٩٦٥	٠,٩٩٦٦	٠,٩٩٦٧	٠,٩٩٦٨	٠,٩٩٦٩	٠,٩٩٧٠	٠,٩٩٧١	٠,٩٩٧٢	٠,٩٩٧٣	٠,٩٩٧٤
٢,٨	٠,٩٩٧٤	٠,٩٩٧٥	٠,٩٩٧٦	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٧	٠,٩٩٧٨	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٧٩	٠,٩٩٨٠	٠,٩٩٨١
٢,٩	٠,٩٩٨١	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٢	٠,٩٩٨٣	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٤	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٥	٠,٩٩٨٦	٠,٩٩٨٦
٣,٠	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٧	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٨	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٨٩	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩٠
٣,١	٠,٩٩٩٠	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩١	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣
٣,٢	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٣	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٤	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥
٣,٣	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٥	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٦	٠,٩٩٩٧
٣,٤	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٧	٠,٩٩٩٨