الدرسُ 1

اقتراناتُ كثيراتِ الحدودِ
Polynomial Functions

أتدرب وأحل المسائل

الرياضيات

الفصل الدراسي الثاني

كتاب الطالب

10

إعداد:

أحمد المصري

0788897923

يوتيوب: أحمد المصري

الأسس صحيحة غير سالبة

أتدرب وأحل المسائل

أُحدِّدُ إذا كانَ كلٌّ ممّا يأتي كثيرَ حدودٍ أمْ لا. وفي حالِ كانَ كثيرَ حدودٍ أكتبُهُ بالصورةِ القياسيةِ، ثمَّ أُحدِّدُ المعاملَ الرئيسَ، والدرجةَ، والحدَّ الثابتَ:

1 $f(x) = 4 - x$

الصورة القياسية: $f(x) = -x + 4$
الدرجة: 1
المعامل الرئيس: -1
الحد الثابت: 4

2 $g(x) = \dfrac{5x^2 + 2x}{x}$

ليس كثير حدود، وانما اقران
لنبي مجاله $R - \{0\}$

3 $h(x) = 3x(4x - 7) + 2x - 12$

$= 12x^2 - 21x + 2x - 12$

$h(x) = 12x^2 - 19x - 12$

الصورة القياسية: $h(x) = 12x^2 - 19x - 12$
الدرجة: 2
المعامل الرئيس: 12
الحد الثابت: -12

متعة التعليم الهادف

4 $L(x) = 3x^2 + 5.3x^3 - 2x$

الصورة القياسية: $L(x) = 5.3x^3 + 3x^2 - 2x$

الدرجة: 3

المعامل الرئيس: 5.3

الحد الثابت: 0

5 $j(t) = \sqrt{7}\,t - 16t^2$

الصورة القياسية: $j(t) = -16t^2 + \sqrt{7}\,t$

الدرجة: 2

المعامل الرئيس: -16

الحد الثابت: 0

منهاجي
متعة التعليم الهادف

6 $k(x) = 5x^{\frac{3}{2}} + 2x - 1$

ليس كثير حدود لوجود أس غير صحيح

X

7 $f(x) = 13(2)^{x} + 6$

ليس كثير حدود ، لأن الأس متغير (x)
وانما هو اقتران أسي

$1 * y^7 = y^7$

8 $f(y) = y^3(4 - y^2)^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
الأول تربيع — الثاني * الأول * الثاني — الثاني التربيعي

$= y^3(16 - 8y^2 + y^4)$

$= 16y^3 - 8y^5 + y^7$

$f(y) = y^7 - 8y^5 + 16y^3$

الصورة القياسية:
الدرجة: 7
المعامل الرئيس: 1
الحد الثابت: 0

متعة التعليم الهادف

$1 * y^7 = y^7$

8 $f(y) = y^3(4 - y^2)^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

الاول تربيع — اثنين * الاول * الثاني — الثاني تربيع

$= y^3(16 - 8y^2 + y^4)$

$= 16y^3 - 8y^5 + y^7$

الصورة القياسية: $f(y) = y^7 - 8y^5 + 16y^3$

الدرجة: 7

المعامل الرئيس: 1

الحد الثابت 0

منهاجي
متعة التعليم الهادف

أُمثِّلُ كلَّ اقترانٍ ممّا يأتي بيانيًّا، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ:

تذكر: عند رسم منحنى الاقتران التربيعي نجد احداثيات رأس القطع أولاً.

∪

9 $f(x) = x^2 - 3x - 4$

x	0	1	$\frac{3}{2}$	2	3
y	-4	-6	-6.25	-6	-4

$\frac{3}{2} = 1.5$

$a = 1$, $b = -3$ $\Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2(1)} = \frac{3}{2}$

$f(0) = 0 - 0 - 4 \longrightarrow f(0) = -4$

$f(1) = 1 - 3 - 4 \longrightarrow f(1) = -6$

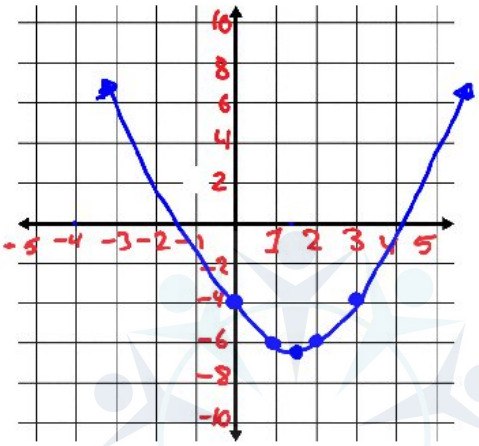
$f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - 3(\frac{3}{2}) - 4$

$= \frac{9}{4} - \frac{9*2}{2*2} - \frac{4*4}{1*4} \Rightarrow f(\frac{3}{2}) = \frac{9-18-16}{4}$

$f(\frac{3}{2}) = \frac{-25}{4} = -6.25$

$f(2) = 4 - 6 - 4 = -6$

$f(3) = 9 - 9 - 4 = -4$



∴ المجال = R (مجموعة الأعداد الحقيقية)

المدى: $y \geq -6.25$

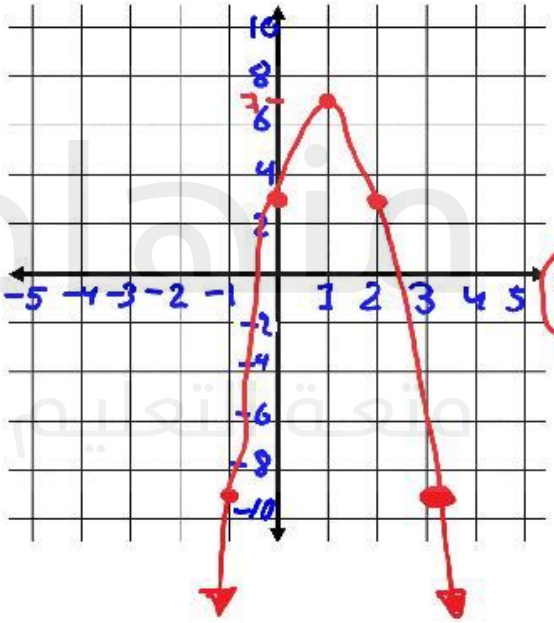
$y \in [-6.25, \infty)$ أي

منصة التعليم الحديث

10 $f(x) = -4x^2 + 8x + 3$

x	−1	0	1	2	3
y	−9	3	7	3	−9

$a = -4$, $b = 8$ $\Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2(-4)} = \frac{-8}{-8} = 1$



المجال = $\mathbb{R}$ (مجموعة الأعداد الحقيقية)

المدى: $y \leq 7$

$y \in (-\infty, 7]$

منصة التعليم الهادف

مجال السؤال هو فترة السؤال

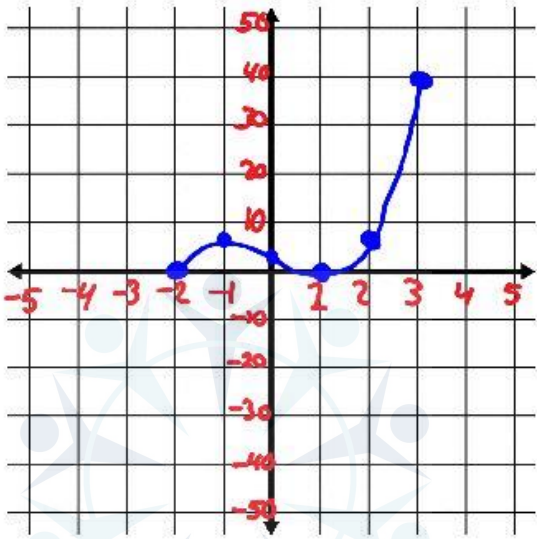
11 $y = 2x^3 - 6x + 4, \boxed{-2 \le x \le 3}$

x	-2	-1	0	1	2	3
y	0	8	4	0	8	40

$y(-2) = -16 + 12 + 4 = 0$
$y(-1) = -2 + 6 + 4 = 8$
$y(0) = 0 - 0 + 4 = 4$
$y(1) = 2 - 6 + 4 = 0$

$y(2) = 16 - 12 + 4 = 8$

$y(3) = 54 - 18 + 4 = 40$



∴ المجال : $x \in [-2, 3]$ ، $-2 \le x \le 3$

المدى : $y \in [0, 40]$ ، $0 \le y \le 40$

منهجي
نحو التعليم الهادف

المجال

12 $y = 3x^2 - x^3 + 9x - 4, \boxed{-3 \le x \le 4}$

$y(-1) = 3 + 1 - 9 - 4 = -9$

$y(3) = 27 - 27 + 27 - 4 = 23$

							-1	3
x	-3	-2	0	1	2	4	-1	3
y	23	-2	-4	7	18	16	-9	23

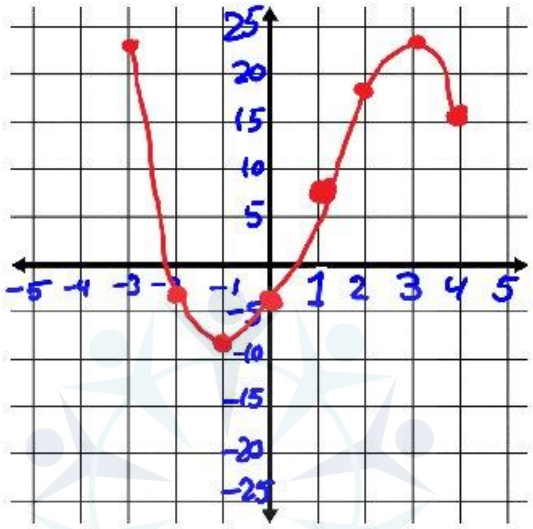
$y(-3) = 27 + 27 - 27 - 4 = 23$

$y(-2) = 12 + 8 - 18 - 4 = -2$

$y(1) = 3 - 1 + 9 - 4 = 7$

$y(2) = 12 - 8 + 18 - 4 = 18$

$y(4) = 48 - 64 + 36 - 4 = 16$



المجال: $-3 \le x \le 4$ ، $x \in [-3, 4]$

المدى: $-9 \le y \le 23$ ، $y \in [-9, 23]$

منهاجي
منصة التعليم الهادف

إذا كانَ $h(x)=x^4-5x^2+3x-6,\ g(x)=5x^2-2x^3+4,\ f(x)=2x+1$ ، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي بالصورةِ القياسيةِ

$$h(x)=x^4-5x^2+3x-6 \quad g(x)=5x^2-2x^3+4 \quad f(x)=2x+1$$

13 $h(x)+g(x)$

$h(x)+g(x)=x^4-5x^2+3x-6+5x^2-2x^3+4$

$=\boxed{x^4-2x^3+3x-2}$

$$h(x)=x^4-5x^2+3x-6 \quad g(x)=5x^2-2x^3+4 \quad f(x)=2x+1$$

14 $g(x)-h(x)$ $\quad g(x)+(-h(x))$

عكس اشارات حدود الدالة h

$=5x^2-2x^3+4-x^4+5x^2-3x+6$

$=\boxed{-x^4-2x^3+10x^2-3x+10}$

$h(x)=x^4-5x^2+3x-6 \quad g(x)=5x^2-2x^3+4 \quad f(x)=2x+1$

15 $f(x)\cdot h(x)$

$f(x)\cdot h(x)=(2x+1)(x^4-5x^2+3x-6)$

$=2x^5-10x^3+6x^2-12x+x^4-5x^2+3x-6$

$=\boxed{2x^5+x^4-10x^3+x^2-9x-6}$

$h(x)=x^4-5x^2+3x-6 \quad g(x)=5x^2-2x^3+4 \quad f(x)=2x+1$

16 $x(f(x))+h(x)$

$=x(2x+1)+x^4-5x^2+3x-6$

$=2x^2+x+x^4-5x^2+3x-6$

$=\boxed{x^4-3x^2+4x-6}$

$h(x)=x^4-5x^2+3x-6 \quad g(x)=5x^2-2x^3+4 \quad f(x)=2x+1$

17 $(f(x))^2-g(x)$ $\quad (f(x))^2+(-g(x))$

$$(f(x))^2-g(x)=(2x+1)^2-5x^2+2x^3-4$$

$$=((2x)^2+2(2x)(1)+1^2)-5x^2+2x^3-4$$

$$=4x^2+4x+1-5x^2+2x^3-4$$

$$=\boxed{2x^3-x^2+4x-3}$$

منهجي
منصة التعليم الهادف

$h(x)=x^4-5x^2+3x-6 \quad g(x)=5x^2-2x^3+4 \quad f(x)=2x+1$

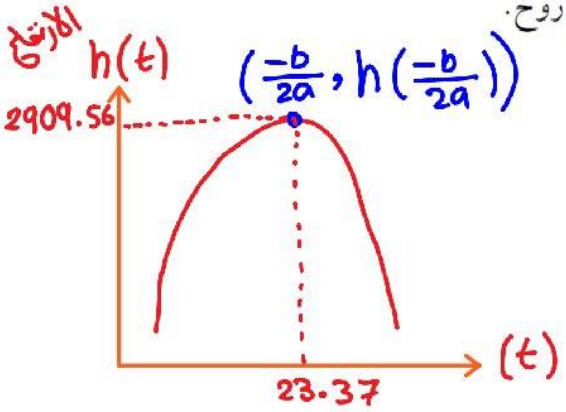
18 $h(x)-x(g(x))$

$$h(x)-x(g(x))=x^4-5x^2+3x-6-x(5x^2-2x^3+4)$$

$$=x^4-5x^2+3x-6-5x^3+2x^4-4x$$

$$=\boxed{3x^4-5x^3-5x^2-x-6}$$

19 **صاروخٌ:** أُطلِقَ صاروخٌ إلى أعلى، وكانَ ارتفاعُهُ بالأمتارِ فوقَ سطحِ البحرِ بعدَ t ثانيةً منْ إطلاقِهِ $h(t) = -4.9t^2 + 229t + 234$ أَجِدُ أقصى ارتفاعٍ يبلغُهُ الصاروخُ.



أقصى ارتفاع يكون عند رأس المنحنى

$(t, h(t))$

الزمن — الارتفاع

$a = -4.9$

$b = 229$

$t = \frac{-b}{2a} \rightarrow t = \frac{-229}{2(-4.9)} = 23.37$ sec

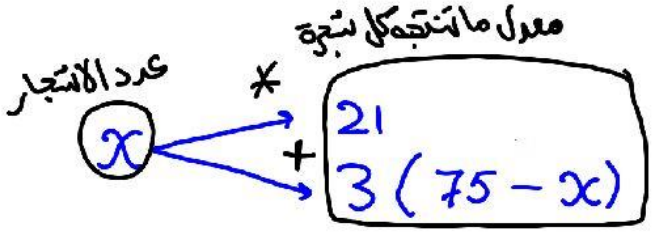
الآن نعوّض الزمن (t) عند رأس المنحنى والذي يكون عنده أقصى ارتفاع للصاروخ

$h(t) = -4.9t^2 + 229t + 234$

$h(23.37) = -4.9(23.37)^2 + 229(23.37) + 234$

$\rightarrow h(23.37) = 2909.56\ m$

20 **زراعة:** وجدَ مُزارِعٌ أنَّهُ إذا زرعَ 75 شجرةَ فاكهةٍ في بُستانِهِ، فإنَّ مُعدَّلَ ما يجنيهِ منْ كلِّ شجرةٍ هوَ 21 صندوقًا في الموسمِ. وكلَّما نقصَ عددُ الأشجارِ شجرةً واحدةً زادَ مُعدَّلُ ما يجنيهِ منْ كلِّ شجرةٍ بمقدارِ 3 صناديقَ؛ فتباعدُ الأشجارِ بعضِها عنْ بعضٍ يُعزِّزُ فرصَها في الحصولِ على حاجاتِها منَ التربةِ. ما عددُ الأشجارِ التي يتعيَّنُ عليهِ زراعتُها لإنتاجِ أكبرِ قدرٍ منَ الثمرِ؟ ما مقدارُ هذا الثمرِ؟



الحل الترتيبي

$$f(x) = x\,(21 + 3(75 - x))$$

$$\therefore f(x) = x(21 + 3(75 - x))$$

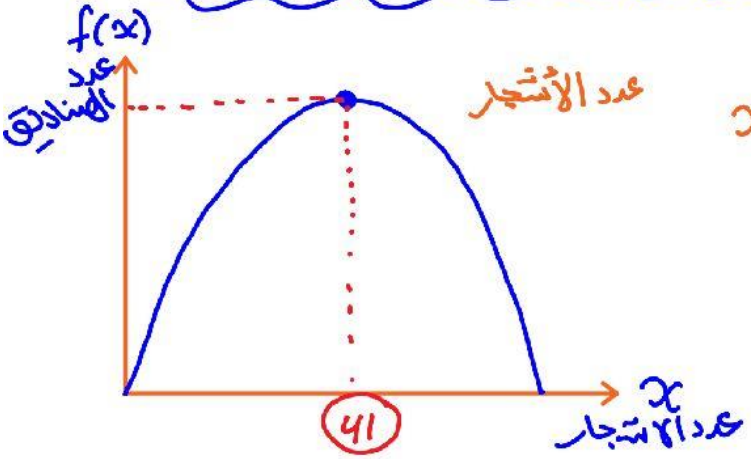
$$= x(21 + 225 - 3x)$$

$$= x(246 - 3x)$$

$$f(x) = 246x - 3x^2$$

$a = -3$

$b = 246$



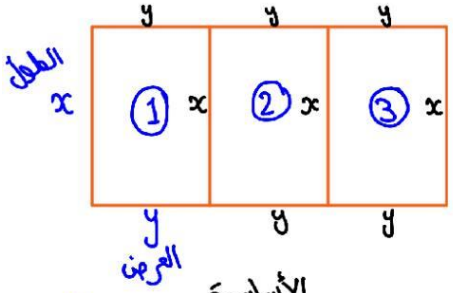
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-246}{2(-3)} = \frac{82}{2} = 41$$

$$f(41) = 246(41) - 3(41)^2 = 5043 \text{ صندوقًا}$$

لمشاهدة الشرح يوتيوب: أحمد المصري ٠٧٨٨٨٩٧٩٢٣ أحمد المصري

21 سـيـاجٌ: لدى سعيدٍ 120 m منَ السياجِ، أرادَ أنْ يستعملَها لتسييجِ 3 حظائرَ مستطيلةٍ متساويةٍ كما في المُخطَّطِ الآتي.
ما أكبرُ مِساحةٍ ممكنةٍ لهذهِ الحظائرِ؟

*تذكر: مساحة المستطيل = الطول × العرض
المحيط = طول السياج = طول الخط الراسم للشكل الهندسي



المساحة الكلية = المساحة الأساسية

$A = 3xy$

طول السياج (العلاقة المساعدة)

$4x + 6y = 120$

$\frac{4}{4}x = \frac{120}{4} - \frac{6}{4}y$

$x = 30 - \frac{3}{2}y$

$A = 3\left(30 - \frac{3}{2}y\right)y$

$A = 90y - \frac{9}{2}y^2$

$a = -\frac{9}{2}$

$b = 90$

أكبر مساحة ممكنة عند رأس القطع $\left(\frac{-b}{2a}\right)$

$y = \frac{-b}{2a} = \frac{-90}{2\left(\frac{-9}{2}\right)} = \frac{90}{9} = 10\ m$

أكبر مساحة ممكنة عند $y = 10\ m$

$\Rightarrow A_{max} = 90(10) - \frac{9}{2}(10)^2$

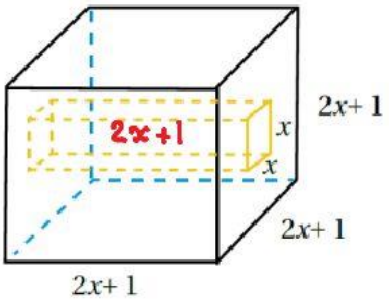
$= 900 - \frac{9}{2} * 100$

$= 900 - 9 * 50$

$= 900 - 450$

$A_{max} = 450\ m^2$

maximum Area



22 **هندسةٌ**: مكعبٌ منَ الخشبِ، طولُ ضلعِهِ $(2x+1)$ cm، حُفِرَ فيهِ تجويفٌ مقطعُهُ مُربَّعٌ، طولُ ضلعِهِ x cm، وهوَ يمتدُّ منْ أحدِ الأوجهِ إلى الوجهِ المقابلِ. أكتبُ بالصورةِ القياسيةِ الاقترانَ الذي يُمثِّلُ حجمَ الجزءِ المُتبقّي منَ المكعبِ.

Volume: حجم

$$V = (2x+1)^3 - x^2(2x+1)$$

$$= (2x)^3 + 3(2x)^2(1) + 3(2x)(1)^2 + 1^3 - x^2(2x+1)$$

$$= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - 2x^3 - x^2$$

$$V = 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$$

متعة التعليم الهادف

23 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

يُنتِجُ مصنعٌ ثُرَيّاتٍ عددُها x ثُرَيّا أسبوعيًّا، حيثُ $0 \le x \le 350$، ويبيعُ الواحدةَ منْها بسعرِ $(150 - 0.3x)$ دينارًا. إذا كانَتْ تكلفةُ إنتاجِ x مِنَ الثُّرَيّاتِ هيَ $(6300 + 60x - 0.1x^2)$ دينارًا، فأَجِدُ ربحَ المصنعِ منْ إنتاجِ x ثُرَيّا أسبوعيًّا وبيعِها.

نفرض أن عدد الثريات التي يتم انتاجها هو x

الإيراد الكلي

$$R(x) = x(150 - 0.3x)$$

$$R(x) = 150x - 0.3x^2$$

الربح الكلي = الإيراد الكلي − التكلفة الكلية

$$\text{Profit} = \text{Revenue} - \text{Cost}$$

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = 150x - 0.3x^2 - (6300 + 60x - 0.1x^2)$$

$$P(x) = 150x - 0.3x^2 - 6300 - 60x + 0.1x^2$$

$$P(x) = -0.2x^2 + 90x - 6300$$

متعة التعليم الهادف

24 **أكتشفُ الخطأَ**: وجدَ كلٌّ منْ طه وقاسمٍ ناتجَ $3x(x^2-2x-3)-(5x^3+7x^2-3)$:

قاسمُ
$3x^3-6x^2-9x+(-5x^3-7x^2+3)$
$=-2x^3+6x^2-6x$

طه
$3x^3-6x^2-9x+5x^3+7x^2-3$
$=8x^3+x^2-9x-3$

أُحدِّدُ إذا كانَتْ إجابةُ أيٍّ منْهُما صحيحةً، مُبرِّرًا إجابتي.

$3x(x^2-2x-3)-(5x^3+7x^2-3)$

$=3x^3-6x^2-9x-5x^3-7x^2+3$

$=-2x^3-13x^2-9x+3$

25 **مسألةٌ مفتوحةٌ**: أكتبُ كثيريْ حدودٍ، أحدُهُما ذو حدَّيْنِ، والآخرُ ثلاثيُّ الحدودِ، بحيثُ يكونُ ناتجُ ضربِهِما اقترانًا ذا حدَّيْنِ.

$(x^3-x^2)(x^2+x+1)$

$x^5+x^4+x^3-x^4-x^3-x^2$

$=x^5-x^2$

26 تحدٍّ: أَجِدُ أصفارَ الاقترانِ: $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

أصفار الاقتران هي قيم x التي تجعل قيمة $f(x)$ تساوي صفر

$\rightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$

$x^2(x-1) - 4(x-1) = 0$

$(x-1)(x^2-4) = 0$

$(x-1)(x+2)(x-2) = 0$

$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

∴ مجموعة حل المعادلة (أصفار الاقتران) $\rightarrow x = \{-2, 1, 2\}$

27 تبريـرٌ: إذا كانَ f, g كثيريْ حـدودٍ، فأكتبُ العلاقةَ بينَ درجةِ كلٍّ منْهُما ودرجةِ كثيرِ الحـدودِ h الناتجِ منْ جمعِهما، وطرحِهما، وضربِهما، مُبرِّرًا إجابتي.

$$f(x) + g(x) = h(x)$$

درجة f > درجة g ← فإن درجة h في الجمع والطرح تساوي درجة الأكبر f

درجة f = درجة g ← درجة h في الجمع والطرح تساوي درجة كل منهما أو اقل منها

* أما في الضرب فإن درجة كثير الحدود h تساوي مجموع درجتي f و g .

منهاجي
متعة التعليم الهادف