الفاتح

الرياضيات الفصل الأول

لطلاب التوجيهي الأدبي والفندقي

(المادة مشروحة بالكامل على منصة القلم التعليمية)

(ينصح بحضور حصص التأسيس قبل البدء بدراسة المادة)

مروان ابوديه

0797 55 27 27

إحدى إصدارات

مدرسة مروان ابوديه الافتراضية

" مشروع تعلم عن بعد "

الوحدة الأولى: النهايـات والاتصـــال لطـلاب التخـصص الأدبـي والفنـدقـي

إعداد/ مروان ابوديه

النهايات والاتصال

النهاية: هي دراسة سلوك الاقتران ق(س) عندما تقترب (س) من العدد (أ) من جهة **اليمين** $^{+}$ وجهة **اليسار** $^{-}$

ويتم ذلك من خلال **التعويض المباشر** والإجابة على السؤال: **هل النهاية (موجودة / غير موجودة) عند (أ) ؟**

ويرمز للنهاية بالرمز: $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \text{ل}$

وتقرأ نهاية ق(س) عندما تقترب **(تؤول)** (س) من العدد (أ) **(حيث أ ثابت موجود على محور السينات)**

$\text{س} \to \text{أ}^{+}$ أ $\text{س} \to \text{أ}^{-}$

$\underset{\text{س} \to \text{أ}^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

أ^{+} : معناها العدد من جهه اليمين
س > أ
العدد (س) أكبر من الثابت (أ)

نهاية ق(س) عندما تقترب (س) من العدد (أ) **من جهة اليمين**

$\underset{\text{س} \to \text{أ}^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

أ^{-} : معناها العدد من جهه اليسار
س < أ
العدد (س) أقل من الثابت (أ)

نهاية ق(س) عندما تقترب (س) من العدد (أ) **من جهة اليسار**

الحالة الأولى: (النهاية موجودة)

$\underset{\text{س} \to \text{أ}^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س} \to \text{أ}^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

$\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \text{ل}$ **(موجودة)**

الحالة الثانية: (النهاية غير موجودة)

$\underset{\text{س} \to \text{أ}^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} \neq \underset{\text{س} \to \text{أ}^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

$\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$ **(النهاية غير موجودة)**

طرق ايجاد النهايات

- ✓ **من خلال الجدول**
- ✓ **من خلال الرسم**
- ✓ **من خلال الطرق الجبرية** (ناتج خارج قسمة اقترانين)

- **التعويض المباشر**
- **العامل المشترك**
- **الفرق بين مربعين**
- **فرق ومجموع مكعبين**
- **العبارة التربيعية**
- **توحيد المقامات**
- **المرافق التربيعي**

إيجاد النهاية من خلال التعويض المباشر

الأصل في النهايات **التعويض المباشر**.

مثال ١ : جد قيمة النهايات التالية:

١) $\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نهـا}} (٩)$

٢) $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} (٣\text{س} - ٥)$

٣) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} (٢\text{س}^{٢} - ١)$

٤) $\underset{\text{س} \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} (٨\text{س}^{٢} + ١)$

٥) $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}} (٢\text{س}^{٢} - \text{س} + ٦)$

٦) $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} (\text{س}^{٣} + ٣\text{س} - ١)$

٧) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \text{س}^{٢}(٢\text{س} + ٤)$

٨) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} (\text{س} - ١)(\text{س} + ٣)$

٩) $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} (\text{س}^{٢} - \text{س}^{٣})^{٢}$

١٠) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} (\text{س}^{٣} - ٢)^{٣}$

١١) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} (٤\text{س} - \text{س}^{٢})(\text{س} - ٤)$

١٢) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} + ١}{٢\text{س}}$

١٣) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١}{١٢ - ٣\text{س}}$

١٤) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} + ١}{\text{س} + ٨}$

١٥) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٩}{٣ - \text{س}}$

١٦) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} - \text{س} + ٩}$

١٧) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(٢\text{س} - ٥)^{٢} - ١٦}{٢\text{س} - ٩}$

١٨) $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٢ - \text{س}}{(٢\text{س} + ٦)^{٢} - ٩}$

١٩) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{٣}{\text{س}} + \frac{٥}{٢}}{\text{س} + ٢}$

٢٠) $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{١}{٢} + \frac{\text{س}}{٢}}{\frac{٤}{٢\text{س}} - \frac{٨}{٤}}$

٢١) $\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}} + ٣}{\text{س} + ١}$

٢٢) $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س} + ١١} - ٢}{\text{س} - ٢}$

٢٣) $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س} + ٢}{\text{س}} + \sqrt{٢ - \text{س}}$

نهايات الجذور

$$\underset{س \to أ}{\text{نهـــا}} \sqrt[ن]{ق(س)}$$

يوجد هناك حالتين للتعامل مع الجذور (الجذور الفردية والجذور الزوجية)

الحالة الأولى: الجذور الفردية

$\sqrt[3]{\ }$ $\sqrt[5]{\ }$ $\sqrt[7]{\ }$ $\sqrt[9]{\ }$

يمكن أن يكون ما داخل الجذر الفردي عدد **موجب** أو **سالب** أو **صفر** لذلك نستطيع حساب النهاية **بالتعويض المباشر**.

✓ **وتقبل جميع الإجابات (وتكون النهاية دائماً موجودة)**

أمثلة على الجذور التكعيبية

$١^٣ = ١$	$\sqrt[3]{\pm ١} = \pm ١$
$٢^٣ = ٨$	$\sqrt[3]{\pm ٨} = \pm ٢$
$٣^٣ = ٢٧$	$\sqrt[3]{\pm ٢٧} = \pm ٣$
$٤^٣ = ٦٤$	$\sqrt[3]{\pm ٦٤} = \pm ٤$
$٥^٣ = ١٢٥$	$\sqrt[3]{\pm ١٢٥} = \pm ٥$
$٦^٣ = ٢١٦$	$\sqrt[3]{\pm ٢١٦} = \pm ٦$
$٧^٣ = ٣٤٣$	$\sqrt[3]{\pm ٣٤٣} = \pm ٧$
$٨^٣ = ٥١٢$	$\sqrt[3]{\pm ٥١٢} = \pm ٨$
$٩^٣ = ٧٢٩$	$\sqrt[3]{\pm ٧٢٩} = \pm ٩$
$١٠^٣ = ١٠٠٠$	$\sqrt[3]{\pm ١٠٠٠} = \pm ١٠$

ملاحظة : يجب حفظ تكعيبات الأعداد من (١–١٠)

مثال٢ : جد قيمة النهايات التالية:

١) $\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}} \sqrt[3]{س + ٧}$

٢) $\underset{س \to ٩}{\text{نهـــا}} \sqrt[3]{١ - س}$

٣) $\underset{س \to -٣}{\text{نهـــا}} \sqrt[3]{٩س}$

٤) $\underset{س \to ٥}{\text{نهـــا}} \sqrt[5]{٢س - ١٠}$

٥) $\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}} \sqrt[3]{س + ١}$

٦) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـــا}} \sqrt[5]{٤ - ٢١س}$

٧) $\underset{س \to ٦}{\text{نهـــا}} \sqrt[7]{س^٢ - ٣٧}$

٨) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـــا}} \sqrt[3]{-(س + ١)}$

٩) $\underset{س \to ٥}{\text{نهـــا}} \sqrt[3]{٥س^٢}$

١٠) $\underset{س \to ٤}{\text{نهـــا}} \sqrt[3]{٤س^٢}$

١١) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـــا}} \sqrt[3]{س^٢}$

نهايات الجذور

$$\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} \sqrt[ن]{ق(س)}$$

الحالة الثانية: الجذور الزوجية

$\sqrt{\;}$ $\sqrt[٤]{\;}$ $\sqrt[٦]{\;}$ $\sqrt[٨]{\;}$

يجب أن يكون ما داخل الجذر الزوجي عدد **موجب فقط**
والنهاية تعتمد على ما داخل الجذر، فإن كان الناتج:

١) موجب: النهاية موجودة. **(تقبل جميع الإجابات)**

٢) سالب : النهاية غير موجودة.

أمثلة على الجذور التربيعية

$١^٢ = ١$	$\sqrt{١} = ١$
$٢^٢ = ٤$	$\sqrt{٤} = ٢$
$٣^٢ = ٩$	$\sqrt{٩} = ٣$
$٤^٢ = ١٦$	$\sqrt{١٦} = ٤$
$٥^٢ = ٢٥$	$\sqrt{٢٥} = ٥$
$٦^٢ = ٣٦$	$\sqrt{٣٦} = ٦$
$٧^٢ = ٤٩$	$\sqrt{٤٩} = ٧$
$٨^٢ = ٦٤$	$\sqrt{٦٤} = ٨$
$٩^٢ = ٨١$	$\sqrt{٨١} = ٩$
$١٠^٢ = ١٠٠$	$\sqrt{١٠٠} = ١٠$

ملاحظة : يجب حفظ تربيعات الأعداد من (١–١٠)

مثال٣ : جد قيمة النهايات التالية:

١) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \sqrt{٢س + ٢}$

٢) $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \sqrt{س + ٣}$

٣) $\underset{س \to ٦}{\text{نهـا}} \sqrt[٤]{س - ٥}$

٤) $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \sqrt{س + ٤}$

٥) $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \sqrt{س}$

٦) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \sqrt{٣ - ٥س}$

٧) $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \sqrt[٦]{٤س^٢}$

٨) $\underset{س \to ٧}{\text{نهـا}} \sqrt{٤٠ - س^٢}$

٩) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \sqrt{س^٣ + ١}$

١٠) $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \sqrt{١٤ - س}$

١١) $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \sqrt[٤]{س^٢}$

١٢) $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \sqrt{-١٠س - س^٢}$

إيجاد الثوابت (المجاهيل) من النهايات

لإيجاد قيمة **الثوابت** من النهايات **الموجودة** يجب أن نعوض قيمة (س) **ثم نحل المعادلة جبرياً** ونساوي المقدار **بقيمة النهاية** (ل)

مثال٤ : إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \left(\text{أس}^{٢} - \text{س} + ١\right) = ١٥$، جد (أ)

مثال٥ : إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to -٢} \left(\text{س}^{٢} + \text{أس} - ١\right) = ٩$، جد قيمة (أ)

مثال٦ : إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \text{س}^{٢} - ٥\text{س} = -٤$، جد الثابت (أ)

مثال٧ : إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \left(\dfrac{\text{أس} + ٣}{\text{س} + ١}\right) = ٤$، جد قيمة الثابت (أ)

مثال٨ : إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{٩ + ٣}{\text{س}^{٢} - ٦} = ١٢\text{أ}$، جد قيمة الثابت (أ)

مثال٩ : إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to \text{جـ}} \left(٣\text{س}^{٢} - ١٥\right) = ١٢$، جد (جـ)

مثال١٠ : إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to ٥} \sqrt[٤]{\text{س}^{٢} + \text{جـ}} = ٢$ جد قيمة (جـ)

مثال١١ : إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \left(٢\text{س}^{٣} + ٥\right) = -١١$، جد (أ)

مثال١٢ : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٤\text{س}^{٢} + ٢\text{س}$،
وكانت $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{ق}(\text{س}) = ١٣\text{أ}$، جد قيمة الثابت (أ)

نظريات النهايات

نظرية النهايات: النهاية توزع على جميع العمليات الحسابية.

يمكن ايجاد النهاية **لأكثر من اقتران مثل:** $\text{ق}(\text{س})$ و $\text{هـ}(\text{س})$، بشرط أن يكون الاقترانين متصلين.

إذا كان $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{س}) = \text{ل}$

$$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{هـ}(\text{س}) = \text{م}$$

فإن:

١) $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{جـ} \times \text{ق}(\text{س}) = \text{جـ} \times \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{س}) = \text{جـ} \times \text{ل}$

٢) $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \left(\text{ق}(\text{س}) \pm \text{هـ}(\text{س}) \right) = \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{س}) \pm \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{هـ}(\text{س}) = \text{ل} \pm \text{م}$

٣) $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \left(\text{ق}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س}) \right) = \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{س}) \times \lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{هـ}(\text{س}) = \text{ل} \times \text{م}$

٤) $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \left(\frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})} \right) = \frac{\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{س})}{\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{هـ}(\text{س})} = \frac{\text{ل}}{\text{م}}$ ، $\text{م} \neq ٠$ **(لا يجوز القسمة على صفر)**

٥) $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}^{\text{ن}}(\text{س}) = \left(\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{س}) \right)^{\text{ن}} = \text{ل}^{\text{ن}}$

٦) $\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \sqrt[\text{ن}]{\text{ق}(\text{س})} = \sqrt[\text{ن}]{\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{س})} = \sqrt[\text{ن}]{\text{ل}}$ $(\text{ل} > ٠)$، **بشرط** (ن) **عدد زوجي**

نظريات النهايات

طريقة الحل نعوض $ق(س)$ مباشر بقيمة $\lim_{س\to ٢} ق(س)$

ونعوض $هـ(س)$ مباشر بقيمة $\lim_{س\to ٢} هـ(س)$

وإجراء **العمليات الحسابية** عليها.

مثال١٣ : إذا كانت $\lim_{س\to ٢} ق(س) = ٤$

$\lim_{س\to ٢} هـ(س) = ٥$

جد ما يلي:

١) $\lim_{س\to ٢} (٣ق(س))$

٢) $\lim_{س\to ٢} (-٢هـ(س))$

٣) $\lim_{س\to ٢} (٢ق(س) - هـ(س))$

٤) $\lim_{س\to ٢} (س^٢ ق(س) \times هـ(س))$

٥) $\lim_{س\to ٢} (٤س - ق(س) + هـ(س))$

٦) $\lim_{س\to ٢} (هـ^٢(س) - ق^٢(س))$

مثال١٤ : إذا كانت $\lim_{س\to ٤} ق(س) = ٨$

$\lim_{س\to ٤} هـ(س) = ٥$

فجد ما يلي:

١) $\lim_{س\to ٤} (ق(س) + هـ(س))$

٢) $\lim_{س\to ٤} (ق(س) - هـ(س))$

٣) $\lim_{س\to ٤} (\frac{ق^٢(س)}{٣هـ(س)})$

٤) $\lim_{س\to ٤} (٣ق(س) + ٢هـ(س) - س^٢ + ٥س)$

٥) $\lim_{س\to ٤} \frac{ق(س) - ٣س}{١٢ - ٣هـ(س)}$

٦) $\lim_{س\to ٤} \frac{ق(س) - ٨}{هـ(س)}$

نظريات النهايات

مثال١٥ : إذا كانت $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \text{ق(س)} = ٣$ ، فجد ما يلي:

١) $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \left(\text{ق}^{٢}\text{(س)}\right)$

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \left(٢\text{ق(س)} - \text{س}^{٢} + ٥\right)$

٣) $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \left(٤\text{س} - ٣\text{ق(س)} + ١\right)$

٤) $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \left(\text{ق}^{٢}\text{(س)} - ٣\text{س}^{٢} + ١\right)$

٥) $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \sqrt{٣\text{ق(س)}}$

٦) $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \sqrt[٣]{٣\text{ق(س)} - ١}$

٧) $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \left(\frac{\text{ق(س)}}{٣} + ٤\right)$

٨) $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \left(\sqrt[٣]{\text{ق}^{٣}\text{(س)}} + \text{س}\right)$

مثال١٦ : إذا كانت $\lim\limits_{\text{س}\to ٣} ٢\text{ق(س)} = ٤$ ،

$\lim\limits_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{هـ(س)}}{٣} = ١$

فجد $\lim\limits_{\text{س}\to ٣} \left(\text{س ق(س)} - ٢\text{هـ}^{٢}\text{(س)} + ٣\text{س} - ٧\right)$

مثال١٧ : إذا علمت أن $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \left(٣\text{ق(س)} + \text{س}^{٢} - ٦\right) = ١٠$،

فجد $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \left(\text{س ق}^{٢}\text{(س)} + ٥\text{س} - ٢٠\right)$

مثال١٨ : إذا كانت $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \text{س}^{٣} \times \text{ق(س)} = ١٦$،

فجد $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \left(٢\text{ق(س)} + ٣\right)$

نظريات النهايات

مثال١٩ : إذا كانت $\underset{س\leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\ ٢ق(س) = ٨$

فجد $\underset{س\leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\ (٣ق(س) - س^{٢} + ١)$

مثال٢٠ : إذا كانت $\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ ٣ق(س) = ٦$

فجد $\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ (ق^{٢}(س) + س^{٢} - ١)$

مثال٢١ : إذا كانت $\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \frac{ق(س)}{٣} = ٢$

فجد $\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ (س^{٢} \times ق(س))$

مثال٢٢ : إذا كانت $٣\ \underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ ق(س) - ٤ = ٥$ ،

فجد:

أ) $\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

ب) $\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ (٢ق(س) + س^{٢})$

مثال٢٣ : إذا كانت $\underset{س\leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\ (٢ق(س) - س^{٢} + ٣) = ٤$ ،

فجد $\underset{س\leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

مثال٢٤ : إذا كانت $\underset{س\leftarrow -١}{\text{نهـا}}\ (٣ق(س) - ٢س + ٤) = ١٢$ ،

فجد $\underset{س\leftarrow -١}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

مثال٢٥ : إذا كانت $٣\ \underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ ق(س) = ١٢$ ،

فجد $\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ (-٢ق(س) + ٤س^{٢} - ٥س)$

إيجاد النهاية من خلال طرق التحليل (العامل المشترك)

نأخذ العامل المشترك إذا كان هناك نهاية لكسر يحتوي على كثير حدود مقسوماً على كثير حدود **ويوجد عامل مشترك** أما في البسط أو في المقام **وشرط أساسي** ان يكون نــاتج **التعويض المباشر** هو $(\frac{٠}{٠})$.

العامل المشترك: يمكن أن يكون **(عدد أو س أو -)**

مثال٢٦ : حدد العامل المشترك لكل من المقادير التالية:

المقدار	العامل المشترك	الشكل الجديد
$\text{س}^٢ - \text{س}$		
$\text{س}^٣ - \text{س}^٢$		
$٢\text{س} - ٢$		
$١٥ - ٣\text{س}$		
$٦ - ٣\text{س}$		
$- ٣\text{س}^٢ - ٦\text{س}$		
$١٥\text{س} - ٥\text{س}^٢$		
$- \text{س} - ٢$		
$٣\text{س} + ٢$		

مثال٢٧ : جد قيمة النهايات التالية:

١) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢ - \text{س}}{\text{س}}$

٢) $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{٤\text{س} - ١٢}{٥\text{س} - ١٥}$

٣) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^٣ + ٤\text{س}^٢}{\text{س}^٢}$

٤) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س}}{٥\text{س} - ١٠}$

٥) $\underset{\text{س} \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{٤\text{س} - ٢٠}{٥ - \text{س}}$

٦) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٥\text{س}^٢ - ١٠\text{س}}{\text{س} - ٢}$

٧) $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٤ - ٢\text{س}}{٤\text{س} - ٨}$

٨) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٥\text{س}^٢ + ٤\text{س}}{٢\text{س}}$

٩) $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢ - ٤}{٢ - \text{س}}$

إيجاد النهاية من خلال التحليل (الفرق بين مربعين)

نحلل العبارة ثنائية الحدود باستخدام طريقة **الفرق بين مربعين**،
حيث يجب أن تكون مكتوبة على الصورة $(س^٢ - أ^٢)$
وأن يكون نــاتج التعويض المباشر هو $(\frac{٠}{٠})$.

الشكل العام للفرق بين مربعين

$$(س^٢ - أ^٢) = (س - أ)(س + أ)$$

خطوات تحليل الفرق بين مربعين

مثال٢٨ : حلل العبارة $س^٢ - ٩$

١) نحول العدد الثابت إلى صيغة تربيعية

$$س^٢ - ٣^٢$$

٢) نفتح قوسين،

- في القوس الأول نضع **(س – ٣)**
- في القوس الثاني نضع **(س + ٣)**

$$(س - ٣)(س + ٣)$$

مثال٢٩ : حلل العبارات التالية:

العبارة	تحليل العبارة
$س^٢ - ١$	
$س^٢ - ٤$	
$٩ - س^٢$	
$س^٢ - ١٦$	
$٤٩ - س^٢$	
$س^٢ + ١$	
$٨١ + س^٢$	

ملاحظة : لا يوجد شيء اسمه مجموع مربعين في الرياضيات.

مثال٣٠ : جد قيمة النهايات التالية:

١) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - ١}{س - ١}$

٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{٣ - س}{س^٢ - ٩}$

٣) $\lim_{س \to ١} \frac{س - س^٣}{س^٢ - س}$

٤) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ١٦}{٢س^٢ - ٨س}$

٦) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - ٢٥}{س + ٥}$

مثال٣١ : إذا كان $ق(س) = س$ ،

فجد قيمة النهاية التالي: $\lim_{س \to -٣} \frac{ق(س)^٢ - ق(٩)}{س + ٣}$

إيجاد النهاية من خلال التحليل (الفرق بين مربعين)

مثال٣٢ : جد قيمة النهايات التالية:

١) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}-٢)^{٢}-١}{\text{س}-١}$

٢) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}-١)^{٢}-٤}{٣-\text{س}}$

٣) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{٤-(٢\text{س}-٢)^{٢}}{\text{س}-٢}$

٤) $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}-٢)^{٢}-١٦}{\text{س}+٢}$

٥) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{٢٥-(\text{س}+٢)^{٢}}{\text{س}-٣}$

٦) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢}+٣\text{س}-٤}{(٢\text{س}+٣)^{٢}-٢٥}$

إيجاد النهاية من خلال التحليل (فرق أو مجموع مكعبين)

نحلل العبارة ثنائية الحدود باستخدام طريقة **فرق أو مجموع مكعبين،** حيث يجب أن يكون مكتوب بإحدى الاشكال التالية:

$$(\text{س}^{٣} - \text{أ}^{٣}) \qquad (\text{س}^{٣} + \text{أ}^{٣})$$

وأن يكون نـــاتج التعويض المباشر هو $\left(\frac{٠}{٠}\right)$.

الشكل العام للفرق بين مكعبين

$$(\text{س}^{٣} - \text{أ}^{٣}) = (\text{س} - \text{أ})(\text{س}^{٢} + \text{أس} + \text{أ}^{٢})$$

الأول تكعيب – الثاني تكعيب = (الأول – الثاني) (الأول تربيع + الأول × الثاني + الثاني تربيع)

الشكل العام لمجموع مكعبين

$$(\text{س}^{٣} + \text{أ}^{٣}) = (\text{س} + \text{أ})(\text{س}^{٢} - \text{أس} + \text{أ}^{٢})$$

الأول تكعيب + الثاني تكعيب = (الأول + الثاني) (الأول تربيع - الأول × الثاني + الثاني تربيع)

مثال٣٣ : حلل العبارات التالية:

العبارة	تحليل العبارة
$\text{س}^{٣} - ١$	
$\text{س}^{٣} + ١$	
$\text{س}^{٣} - ٨$	
$\text{س}^{٣} - ٢٧$	
$\text{س}^{٣} + ١٢٥$	
$\text{س}^{٣} - ٦٤$	
$\text{س}^{٣} + ٢١٦$	
$٨ - \text{س}^{٣}$	
$٢٧ - \text{س}^{٣}$	

ملاحظة : القوس الكبير في تحليل فرق ومجموع مكعبين لا يحلل.

مثال ٣٤ : جد قيمة النهايات التالية:

١) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س} - ٣}$

٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ٤} \frac{\text{س}^{٣} - ٦٤}{٤ - \text{س}}$

٣) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{٣\text{س} - \text{س}^{٢}}$

٤) $\lim\limits_{\text{س} \to ٥} \frac{\text{س}^{٣} - ١٢٥}{\text{س}^{٢} - ٢٥}$

٥) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٤} - ٨\text{س}}{٣\text{س}^{٢} - ١٢}$

مثال ٣٥ : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣}$ ،

فجد $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٢)}{\text{س} - ٢}$

إيجاد النهاية من خلال التحليل (العبارة التربيعية)

نحل العبارة الثلاثية باستخدام تحليل العبارة التربيعية، حيث يجب أن تكون مكتوبة على الصيغة التالية : $\text{أس}^٢ + \text{بس} + \text{جـ}$

وأن يكون نــاتج التعويض المباشر هو $\left(\frac{٠}{٠}\right)$.

الشكل العام للعبارة التربيعية ($\text{س}^٢$ و س و جـ)

$$\text{أس}^٢ + \text{بس} + \text{جـ}$$

خطوات تحليل العبارة التربيعية

مثال٣٦ : حلل العبارة $\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ٨$

١) **نفتح قوسين، وفي كل قوس نضع س**

(س   )(س   )

٢) **نضع الإشارات على النحو التالي:**

- في القوس الأول إشارة الحد الأوسط.
- في القوس الثاني نضع حاصل ضرب الاشارتين.

(س -   )(س +   )

٣) **نبحث عن عددين يكون حاصل ضربهم الحد الأخير.**
وحاصل جمعهم الحد الأوسط.

(س - ٤)(س + ٢)

٤) **نتأكد من الحل من خلال جمع العددين.**
حيث يجب أن يكون حاصل جمعهم هو نفسه الحد الأوسط.

ملاحظة :

- **يمكن الاستفادة من ذيل النهاية عند تحليل العبارة التربيعية.**
- **يوجد طريقة أخرى لتحليل العبارة التربيعية إذا كان معامل** $\left(\text{س}^٢\right)$ **أكبر من واحد.**

مثال٣٧ : جد قيمة النهايات التالية:

١) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}{\text{س} - ٢}$

٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢}{\text{س} - ٢}$

٣) $\lim\limits_{\text{س} \to -٦} \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٢٤}{\text{س} + ٦}$

٤) $\lim\limits_{\text{س} \to ٤} \frac{\text{س}^٢ - \text{س} - ١٢}{\text{س} - ٤}$

٥) $\lim\limits_{\text{س} \to -٣} \frac{\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٦}{\text{س}^٢ - ٩}$

٦) $\lim\limits_{\text{س} \to ٤} \frac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ٤}{١٢ - ٣\text{س}}$

٧) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^٢ - ٦\text{س} - ٩}{\text{س}^٢ - ٩}$

إيجاد النهاية من خلال التحليل (العبارة التربيعية)

مثال٣٨ : جد قيمة النهايات التالية:

١) $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \frac{س^{٢} + س - ٢٠}{س^{٢} - ٤س}$

٢) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{٦ - ٢س}{س^{٢} - ٢س - ٣}$

٣) $\underset{س \to -٤}{\text{نها}} \frac{س^{٢} + ٣س - ٤}{٣س + ١٢}$

٤) $\underset{س \to -١}{\text{نها}} \frac{٣س^{٣} + ٣س^{٢}}{س^{٢} - ٢س - ٣}$

٥) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{٣س^{٢} + ٥س - ٢٢}{٣س - ٦}$

٦) $\underset{س \to -١}{\text{نها}} \frac{٣س^{٢} - ٢س - ٥}{٢ + ٢س}$

مثال٣٩ : جد قيمة النهايات التالية:

١) $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{س^{٢} + ٣س - ١٨}{س^{٢} + س - ١٢}$

٢) $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{٣س^{٢} + ٤س - ٢٠}{٤س^{٢} + ٣س - ٢٢}$

٣) $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \frac{٥س^{٢} - ٥س - ٦٠}{٣س^{٢} + ١٠س - ٨٨}$

إيجاد النهاية من خلال الضرب بالمرافق

ما المقصود بالمرافق

$$\text{س}^{٢} - \text{أ}^{٢} = (\text{س} + \text{أ})(\text{س} - \text{أ})$$

الحدين $(\text{س} + \text{أ})(\text{س} - \text{أ})$ كل حد منهما هو مرافق للأخر.

مثال ٤٠ : حدد المرافق وحاصل الضرب لكل من المقادير التالية:

المقدار	المرافق	ناتج الضرب
$(\text{س} + ٥)$		
$(٣ - \text{س})$		
$\sqrt{\text{س}} - ٢$		
$٣ - \sqrt{\text{س}}$		
$\sqrt{\text{س} + ١} - ٣$		
$٣ - \sqrt{\text{س} + ٢}$		
$٥ + \sqrt{\text{س} - ١}$		
$\sqrt{٢\text{س} + ٢} - ٢$		
$\sqrt{٣\text{س} + ١} - ٢$		
$١ - \sqrt{\text{س} + ١}$		
$٤ - \sqrt{٢\text{س} + ١}$		

نقوم **بالضرب بالمرافق** إذا كان هناك جذر في البسط أو في المقام **بشرط أن يكون نـاتج التعويض المباشر هو** $\left(\frac{٠}{٠}\right)$.

خطوات إيجاد النهاية من خلال الضرب بالمرافق

مثال ٤١ : جد $\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\sqrt{٥\text{س} - ١} - ٣}{\text{س} - ٢}$

١) نعوض مباشرة للتأكد بان الناتج هو $\left(\frac{٠}{٠}\right)$.

٢) **نضرب النهاية بالـ (المرافق): للتخلص من الجذور واختصار العامل الصفري**، وهو نفس المقدار الذي يحتوي على الجذر سواء كان في المقام أو في البسط بدون تغير إشارة ما بداخل الجذر ولكن بعكس إشارة السالب الموجودة خارج الجذر ولا تنسى أن تقسم على المقدار نفسه.

$$\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\sqrt{٥\text{س} - ١} - ٣}{\text{س} - ٢} \times \frac{\sqrt{٥\text{س} - ١} + ٣}{\sqrt{٥\text{س} - ١} + ٣}$$

٣) نكتب ما بداخل الجذر كما هو ونطرح منه مربع العدد الموجود خارج الجذر ونقسم على مقام الأول والمقام الثاني.

$$\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{٥\text{س} - ١ - ٩}{(\text{س} - ٢)(\sqrt{٥\text{س} - ١} + ٣)}$$

٤) **نبسط المقدار** (جمع وطرح الحدود المتشابهة)، قد نلجأ للتحليل.

$$\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{٥\cancel{(\text{س} - ٢)}}{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\sqrt{٥\text{س} - ١} + ٣)}$$

٥) اختصار الحدود المتشابهة.

$$\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{٥}{(\sqrt{٥\text{س} - ١} + ٣)}$$

٦) نعوض بقيمة (س).

$$= \frac{٥}{(\sqrt{٩} + ٣)} = \frac{٥}{(٣ + ٣)} = \frac{٥}{٦}$$

إيجاد النهاية من خلال الضرب بالمرافق

مثال٤٢ : جد قيمة النهاية التالية:

١) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}} - ١}{\text{س} - ١}$

٢) $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{٢ - \sqrt{\text{س}}}{\text{س} - ٤}$

٣) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س} + ١} - ١}{\text{س}}$

٤) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{٢ - \sqrt{\text{س} + ١}}{\text{س} - ٣}$

٥) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}} - ١}{\text{س}^{٢} - ١}$

٦) $\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٣\text{س} + ٤} - ٥}{\text{س}^{٢} - ٤٩}$

إيجاد النهاية من خلال الضرب بالمرافق

مثال٤٣ : جد قيمة النهاية التالية:

١) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}+٧}-٣}{٤\text{س}-٨}$

٢) $\underset{\text{س}\to ٩}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}-٩}{\sqrt{\text{س}}-٣}$

٣) $\underset{\text{س}\to ٦}{\text{نهـا}} \dfrac{٣-\sqrt{\text{س}+٣}}{\text{س}-٦}$

٤) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{٣-\sqrt{٦+\text{س}}}{\text{س}-٣}$

٥) $\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}+١}-٣}{\text{س}-٨}$

٦) $\underset{\text{س}\to -٧}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}+٧}{٣-\sqrt{\text{س}+١٦}}$

٧) $\underset{\text{س}\to -٥}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}+٩}-٢}{\text{س}+٥}$

٨) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٨\text{س}+١}-٥}{\text{س}^{٢}-٣\text{س}}$

إيجاد النهاية من خلال توحيد المقامات

نقوم **بتوحيد المقامات** إذا كان هناك كسور في البسط أو المقام **وشرط أساسي ان يكون ناتج التعويض المباشر هو $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$.**

خطوات إيجاد النهاية من خلال توحيد المقامات

مثال ٤٤ : جد قيمة $\displaystyle \underset{س\to ٢}{\text{نهــا}} \frac{\frac{س}{س+١} - \frac{٢}{٣}}{س - ٢}$

١) نعوض مباشرة للتأكد بان الناتج هو $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$.

٢) نضع كل المقامات في مقام واحد.

$$\underset{س\to ٢}{\text{نهــا}} \frac{\qquad}{(س-٢)(س+١)(٣)}$$

٣) نضرب الكسرين ضرب تبادلي

نضع البسط كما هو ولكن كل بسط في قوس وبجانب كل بسط قوس أخر للمقام.

$$\underset{س\to ٢}{\text{نهــا}} \frac{(س)(٣) - (٢)(س+١)}{(س-٢)(س+١)(٣)}$$

٤) نفك أقواس البسط فقط.

$$\underset{س\to ٢}{\text{نهــا}} \frac{٣س - ٢س - ٢}{(س-٢)(س+١)(٣)}$$

٥) **نبسط المقدار** (جمع وطرح الحدود المتشابهة).

$$\underset{س\to ٢}{\text{نهــا}} \frac{\cancel{س-٢}}{(\cancel{س-٢})(س+١)(٣)}$$

٦) اختصار الحدود المتشابهة.

$$\underset{س\to ٢}{\text{نهــا}} \frac{١}{(س+١)(٣)}$$

٧) نعوض بقيمة **(س)**.

$$= \frac{١}{(٢+١)(٣)} = \frac{١}{٣\times ٣} = \frac{١}{٩}$$

مثال ٤٥ : جد قيمة النهايات التالية:

١) $\displaystyle \underset{س\to ٢}{\text{نهــا}} \frac{\frac{١}{٢} - \frac{١}{س}}{س - ٢}$

٢) $\displaystyle \underset{س\to ٤}{\text{نهــا}} \frac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٤}}{س - ٤}$

٣) $\displaystyle \underset{س\to ٣}{\text{نهــا}} \frac{\frac{١}{٢س} - \frac{١}{٦}}{س - ٣}$

٤) $\displaystyle \underset{س\to ٥}{\text{نهــا}} \frac{\frac{٢}{٥} - \frac{٢}{س}}{س - ٥}$

٥) $\displaystyle \underset{س\to ١}{\text{نهــا}} \frac{\frac{١}{س+١} - \frac{٢}{س+٣}}{س - ١}$

إيجاد النهاية من خلال توحيد المقامات

مثال٤٦ : جد قيمة النهايات التالية:

١) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \dfrac{\frac{٥}{س+٢} - \frac{٥}{٤}}{س - ٢}$

٢) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \dfrac{\frac{٢}{س+٣} - \frac{٤}{س+٦}}{س}$

٣) $\lim\limits_{س \leftarrow ٤} \dfrac{س^{٢} - ٤س}{\frac{١}{س+٢} - \frac{١}{٦}}$

٤) $\lim\limits_{س \leftarrow ٧} \dfrac{س - ٧}{\frac{س}{س-٢} - \frac{٧}{٥}}$

٥) $\lim\limits_{س \leftarrow ٣} \dfrac{\frac{٤}{س+٢} - \frac{٤}{٥}}{س^{٢} - ٩}$

إيجاد النهاية من خلال توحيد المقامات

مثال٤٧ : جد قيمة النهايات التالية:

١) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{١}{\text{س}+١} - \frac{١}{٣}}{\text{س} - ٢}$

٢) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{١}{\text{س}} - \frac{١}{٢}}{٢\text{س} - ٤}$

٣) $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س} - ٨}{\frac{١}{\text{س}-٢} - \frac{١}{٢}}$

٤) $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{١}{٢\text{س}} - \frac{١}{٢}}{٨ - ٢\text{س}}$

٥) $\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{١}{\text{س}-٢} - \frac{١}{٥}}{٢\text{س} - ١٤}$

٦) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{٢}{\text{س}+٢} - \frac{٢}{٥}}{٩ - ٣\text{س}}$

٧) $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{\text{س}}{\text{س}-١} + \frac{٢}{٣}}{\text{س} + ٢}$

مثال٤٨ : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{١}{\text{س} - ٢}$ ،

فجد $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$

إيجاد النهاية من الاقتران المتشعب

الاقتران المتشعب: هو اقتران $ق(س)$ له أكثر من قاعدة وكل قاعدة لها فترة، المطلوب إيجاد **النهاية** أو **الصورة** عند العدد (أ).

١) إذا كان المطلوب (نهاية)

- إذا كان (أ) ليست نقطة تشعب **(نعوض مباشرة)**
- إذا كان (أ) نقطة تشعب **(نجد النهاية من اليمين واليسار)**

وإذا كانت **النهاية من اليمين** تساوي **النهاية من اليسار** تكون **(النهاية موجودة)** وغير ذلك **(النهاية غير موجودة)**

٢) إذا كان المطلوب (صورة)

- إذا كان (أ) ليست نقطة تشعب **(نعوض مباشرة)**
- إذا كان (أ) نقطة تشعب **(نعوض عند اشارة المساواة)**

وإذا لم يكن هناك إشارة مساواه تكون الصورة **(غير معرفه)**

مثال ٤٩ : إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٢}+٣ & ، \quad ٢ \le س \\ ٤س-١ & ، \quad ٢ > س \end{cases}$

جد كلاً من:

١) $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

٣) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

$\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

$\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

٤) $ق(٣)$

٥) $ق(١)$

٦) $ق(٢)$

٧) $ق(٠)$

٨) $ق(-٢)$

٩) $ق(-\frac{١}{٢})$

مثال ٥٠ : إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٣س^{٢}+١ & ، \quad ٣ < س \\ ١٠س-٢ & ، \quad ٣ \ge س \end{cases}$

جد كلاً من:

١) $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

٢) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

٣) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

$\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

$\underset{س \to ٣^{-}}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

٤) $ق(٣)$

مثال ٥١ : إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٣}+٣ & ، \quad ١ < س \\ س^{٢} & ، \quad ١ > س \end{cases}$

جد كلاً من:

١) $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

٣) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

$\underset{س \to ١^{+}}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

$\underset{س \to ١^{-}}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

٤) $ق(١)$

٥) $ق(٣)$

٦) $ق(-٢)$

٧) $ق(-\frac{١}{٢})$

إيجاد النهاية من الاقتران المتشعب

مثال٥٢ : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^2 - ٩}{س - ٣} &، س \neq ٣ \\ ٣ &، س = ٣ \end{cases}$

جد كلاً من:

١) $\lim_{س \to ٠}$ ق(س)

٢) $\lim_{س \to ٤}$ ق(س)

٣) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

٤) ق(٣)

٥) ق(٠)

٦) ق(-١)

٧) ق(٤)

مثال٥٣ : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^2 - ٤}{س - ٢} &، س \neq ٢ \\ ٤ &، س = ٢ \end{cases}$

جد كلاً من:

١) $\lim_{س \to -٢}$ ق(س)

٢) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

٣) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

٤) ق(٢)

٥) ق(٠)

٦) ق(٣)

٧) ق(-٢)

٨) ق($\frac{١}{٢}$)

مثال٥٤ : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^2 &، س > ٢ \\ ٢س &، س < ٢ \\ ٥ &، س = ٢ \end{cases}$

جد كلاً من:

١) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

٢) $\lim_{س \to -٣}$ ق(س)

٣) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

$\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س)

$\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س)

٤) ق(٢)

٥) ق(-٥)

مثال٥٥ : إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٥س + ٦ &، س > ٢ \\ ٧س + ١ &، س < ٢ \\ س^2 + ١٠ &، س = ٢ \end{cases}$

جد كلاً من:

١) $\lim_{س \to ١}$ ق(س)

٢) $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

٣) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

$\lim_{س \to ٢^+}$ ق(س)

$\lim_{س \to ٢^-}$ ق(س)

٤) ق(٢)

إيجاد النهاية من الاقتران المتشعب

مثال٥٦ : إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} ٢س^{٢} + ٥ &، \quad س < ٣ \\ ١٧ &، \quad ٣ \le س \le ٦ \\ ٣س - ١ &، \quad س > ٦ \end{cases}$$

جد كلاً من:

١) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

$\underset{س \to ٣^{+}}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

$\underset{س \to ٣^{-}}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

٢) $\underset{س \to ٦}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

$\underset{س \to ٦^{+}}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

$\underset{س \to ٦^{-}}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

٣) $ق(٣)$

٤) $ق(٦)$

٥) $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

٦) $\underset{س \to ٧}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

٧) $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

٨) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

٩) $\underset{س \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

مثال٥٧ : إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س + ٧ &، \quad س \in ص \\ ٤س + ٣ &، \quad س \notin ص \end{cases}$

حيث (ص) تمثل مجموعة الأعداد الصحيحة.

جد كلاً من:

١) $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

٣) $\underset{س \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

٤) $\underset{س \to \frac{١}{٤}}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

٥) $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

٦) $\underset{س \to \frac{-١}{٤}}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

٧) $ق(٨)$

٨) $ق(\frac{١}{٢})$

٩) $ق(٠)$

١٠) $ق(\frac{١}{٢})$

ملاحظة:

- ✓ **عند إيجاد النهاية** تذكر أن الأعداد تقترب من العدد (أ) ولا يساويه.
- ✓ **عند إيجاد الصورة** تذكر أن العدد الصحيح يعوض بقاعدة $(س \in ص)$.

إيجاد الثوابت من الاقتران المتشعب

يمكن إيجاد **الثوابت** من خلال **النهايات الموجودة.**

مثال٥٨ : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} & \text{،} \quad \text{س} \geq ٢ \\ \text{أس} & \text{،} \quad \text{س} < ٢ \end{cases}$

جد قيمة (أ) والتي تجعل $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{ق}(\text{س})$ موجودة.

مثال٥٩ : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٩\text{س} + ١ & \text{،} \quad \text{س} > ٢ \\ \text{أس} - ٣ & \text{،} \quad \text{س} < ٢ \\ ١٠\text{س} & \text{،} \quad \text{س} = ٢ \end{cases}$

جد قيمة (أ) والتي تجعل $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{ق}(\text{س})$ موجودة.

مثال٦٠ : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٥\text{س}^{٢} - \text{ل} & \text{،} \quad \text{س} < ٢ \\ \text{ل س} + ٢ & \text{،} \quad \text{س} \geq ٢ \end{cases}$

جد قيمة (ل) والتي تجعل $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{ق}(\text{س})$ موجودة.

مثال٦١ : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أ} - ١ & \text{،} \quad \text{س} < \text{أ} \\ \text{أس} - ٣ & \text{،} \quad \text{س} > \text{أ} \end{cases}$

وكانت $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق}(\text{س})$ موجودة، فما قيمة الثابت (أ).

إيجاد الثوابت من الاقتران المتشعب

مثال٦٢ : إذا كان $ق(س) = \begin{cases} أس^{٢} + ب & ، \quad س \leq ٣ \\ ٢س + ٤ب & ، \quad س > ٣ \end{cases}$

وكانت $\lim\limits_{س \to ٣} ق(س) = ١٤$ ، جد قيمة الثوابت (أ) و (ب)

مثال٦٣ : إذا كان $ق(س) = \begin{cases} أس + ب & ، \quad س > ٢ \\ أس^{٢} - بس & ، \quad س < ٢ \end{cases}$

وكانت $\lim\limits_{س \to ٢} ق(س) = ٦٤$ ، جد قيمة الثوابت (أ) و (ب)

إيجاد الثوابت من الاقتران المتشعب

مثال٦٤ : إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٥س - أ & ، \quad س < ١ \\ بس^{٢} + ٧ & ، \quad س \geq ١ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ١٦$ ، $\lim_{س \to ١} ق(س)$ موجودة ،

فما قيمة كلاً من الثابتين (أ) و (ب)

توضيح معنى الاقتراب

س ← ٢ (العدد س يقترب من ٢ شيئاً فشيئاً ولا يساويها)، **الاقتراب لا يعني المساواة**

أعداد أكبر من ٢	٢	أعداد أقل من ٢
س ← ٢^{+}		س ← ٢^{-}

مثال٦٥ : أكتب جملة الاقتراب الصحيحة لكل من الحالات التالية:

١)

٣.٩ ٣.٩٩ ٣.٩٩٩ ٤

٢)

٢ ٢.٠٠١ ٢.٠١ ٢.١

٣)

٤.١− ٤.٠١− ٤.٠٠١− ٤−

٤)

٢ ٢.٠٠١ ٢.٠١ ٢.١

٥)

٧.٩ ٧.٩٩ ٧.٩٩٩ ٨

٦)

٦ ٦.٠٠١ ٦.٠١ ٦.١

٧)

٨.١− ٨.٠١− ٨.٠٠١− ٨−

٨)

٢− ١.٩٩٩− ١.٩٩− ١.٩−

إيجاد النهاية من خلال الجدول

إيجاد النهاية من الجدول مباشرة

مثال٦٦ : بالاعتماد على الجدول التالي، جد ما يلي:

س	٥,١	٥,٠١	٥,٠٠١	٥	٤,٩٩٩	٤,٩٩	٤,٩
ق(س)	٧,١	٧,٠١	٧,٠٠١		٦,٩٩٩	٦,٩٩	٦,٩

١) نهـــا ق(س) $_{س \to ٥^{+}}$ ٢) نهـــا ق(س) $_{س \to ٥^{-}}$

٣) نهـــا ق(س) $_{س \to ٥}$ ٤) ق(٥)

مثال٦٧ : بالاعتماد على الجدول التالي، جد ما يلي:

س	١,١	١,٠١	١,٠٠١	١	٠,٩٩٩	٠,٩٩	٠,٩
ق(س)	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١		٢,٩٩٩	٢,٩٩	٢,٩

١) نهـــا ق(س) $_{س \to ١^{+}}$ ٢) نهـــا ق(س) $_{س \to ١^{-}}$

٣) نهـــا ق(س) $_{س \to ١}$ ٤) ق(١)

مثال٦٨ : بالاعتماد على الجدول التالي، جد ما يلي:

س	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١	٣	٢,٩٩٩	٢,٩٩	٢,٩
ق(س)	٧,١	٧,٠١	٧,٠٠١		٤,٩٩٩	٤,٩٩	٤,٩

١) نهـــا ق(س) $_{س \to ٣^{-}}$ ٢) نهـــا ق(س) $_{س \to ٣^{+}}$

٣) نهـــا ق(س) $_{س \to ٣}$

٤) ق(٣)

مثال٦٩ : بالاعتماد على الجدول التالي، جد ما يلي:

س	-١,٧	-١,٨	-١,٩	-٢	-٢,١	-٢,٢	-٢,٣
ق(س)	٣,٣	٣,٢	٣,١	٥	١,٩	١,٨	١,٧

١) نهـــا ق(س) $_{س \to -٢^{+}}$ ٢) نهـــا ق(س) $_{س \to -٢^{-}}$

٣) نهـــا ق(س) $_{س \to -٢}$

٤) ق(-٢)

إيجاد النهاية من الجدول مباشرة

مثال٧٠ : بالاعتماد على الجدول التالي، جد ما يلي:

س	٣,٩	٣,٩٩	٣,٩٩٩	٤	٤,١	٤,١١	٤,١١١
ق(س)	٦,٩	٦,٩٩	٦,٩٩٩	٥	٥,١	٥,١١	٥,١١١

١) نهـــا ق(س) $_{س \to ٤^{+}}$ ٢) نهـــا ق(س) $_{س \to ٤^{-}}$

٣) نهـــا ق(س) $_{س \to ٤}$

٤) ق(٤)

إيجاد النهاية بعد تكوين جدول

مثال٧١ : كون الجدول التالي،

من خلال الاقتران ق(س) = س + ١ ، ثم جد نهـــا ق(س) $_{س \to ٢}$

س	٢,٣	٢,٢	٢,١	٢	١,٩	١,٨	١,٧
ق(س)							

١) نهـــا ق(س) $_{س \to ٢^{+}}$ ٢) نهـــا ق(س) $_{س \to ٢^{-}}$

٣) نهـــا ق(س) $_{س \to ٢}$

مثال٧٢ : كون الجدول التالي، من خلال الاقتران ق(س) ، علماً أن

$$ق(س) = \begin{cases} ٢ & ، \quad س \geq ١ \\ ٢س & ، \quad س < ١ \end{cases}$$

س	١,٠٣	١,٠٢	١,٠١	١	٠,٩٩	٠,٩٨	٠,٩٧
ق(س)							

ثم جد:

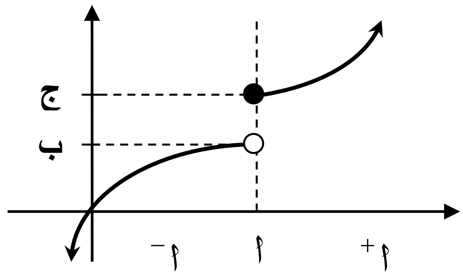
١) نهـــا ق(س) $_{س \to ١}$

نهـــا ق(س) $_{س \to ١^{+}}$ نهـــا ق(س) $_{س \to ١^{-}}$

٢) ق(١)

إيجاد النهاية من خلال الرسم

إيجاد النهاية من خلال الرسم نقوم **برسم خط متقطع عمودي** على محور السينات عند $(\text{س} = \text{أ})$ يوازي محور الصادات.



- **(النهاية من اليمين)** إذا مس **الخط المتقطع الاقتران** من جهة اليمين نأخذ الجواب من محور الصادات.

$$\underset{\text{س} \to \text{أ}^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \text{ج}$$

- **(النهاية من اليسار)** إذا مس **الخط المتقطع الاقتران** من جهة اليسار نأخذ الجواب من محور الصادات.

$$\underset{\text{س} \to \text{أ}^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \text{ب}$$

- **(الصورة)** الدائرة المغلقة أو **الخط المتصل**

تمثل صورة العدد (أ) وتكتب على الشكل $\text{ق(أ)} = \text{ج}$
وفي حال عدم وجود دائرة مغلقة تكون الصورة غير معرفة
وتكتب على الشكل $\text{ق(أ)} =$ **غير معرفة**

وبذلك يكون الحل على الشكل التالي:

١) $\underset{\text{س} \to \text{أ}^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \text{ج}$

٢) $\underset{\text{س} \to \text{أ}^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \text{ب}$

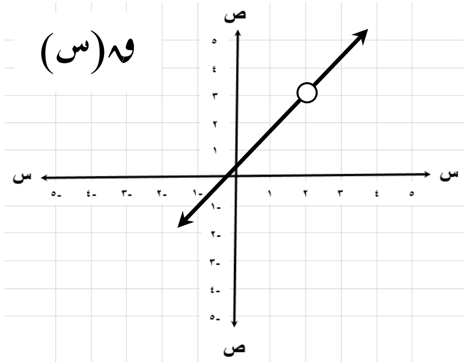
٣) $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} =$ غير موجودة

٤) $\text{ق(أ)} = \text{ج}$

ملاحظة:

- **النهاية موجودة**
(إذا كانت النهاية من جهة اليمين = النهاية من جهة اليسار)
وتساوي نفس الجواب.
- **النهاية غير موجودة (إذا وجد قفزة أو انقطاع في الاقتران)**

مثال ٧٣ : بالاعتماد على الشكل التالي، جد



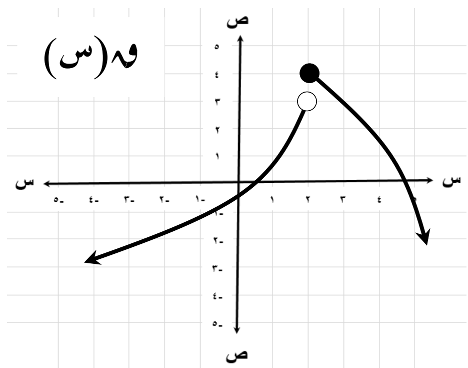
١) $\underset{\text{س} \to 2^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

٢) $\underset{\text{س} \to 2^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

٣) $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

٤) ق(٢)

مثال ٧٤ : بالاعتماد على الشكل التالي، جد



١) $\underset{\text{س} \to 2^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

٢) $\underset{\text{س} \to 2^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

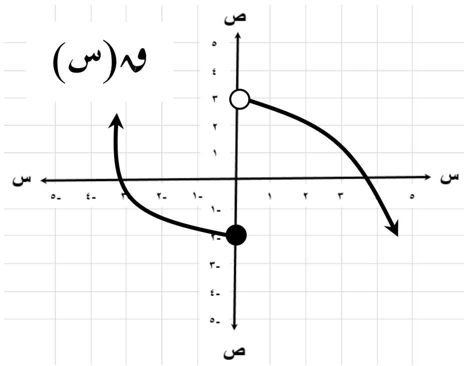
٣) $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

٤) ق(٢)

٥) ماهي قيم (أ) التي تجعل من النهاية غير موجودة.

إيجاد النهاية من خلال الرسم

مثال٧٥ : بالاعتماد على الشكل التالي، جد



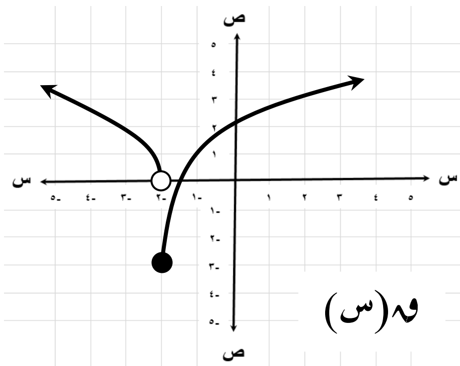
١) $\underset{\text{س}\rightarrow ٠^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

٢) $\underset{\text{س}\rightarrow ٠^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

٣) $\underset{\text{س}\rightarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ق(س)

٤) ق(٠)

مثال٧٦ : بالاعتماد على الشكل التالي، جد



١) $\underset{\text{س}\rightarrow -٢^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

٢) $\underset{\text{س}\rightarrow -٢^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

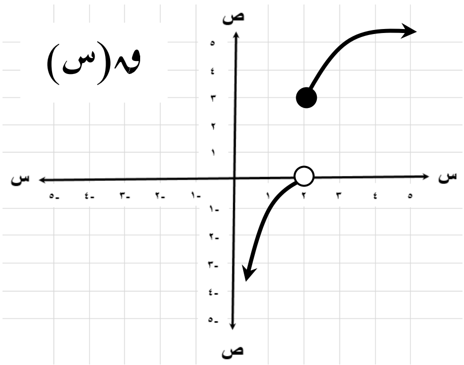
٣) $\underset{\text{س}\rightarrow -٢}{\text{نهـا}}$ ق(س)

٤) ق(−٢)

٥) قيمة الثابت (أ)، حيث $\underset{\text{س}\rightarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٠

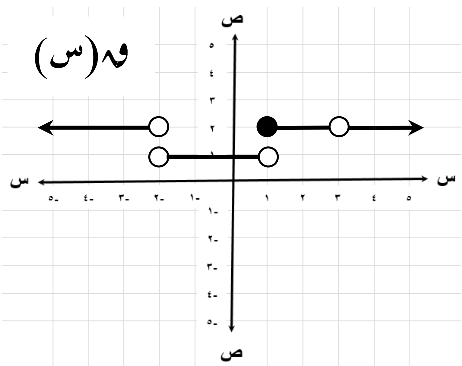
مثال٧٧ : يمثل الشكل منحنى ق(س)،

إذا كانت $\underset{\text{س}\rightarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}$ ق(س) غير موجودة، جد قيم (أ)



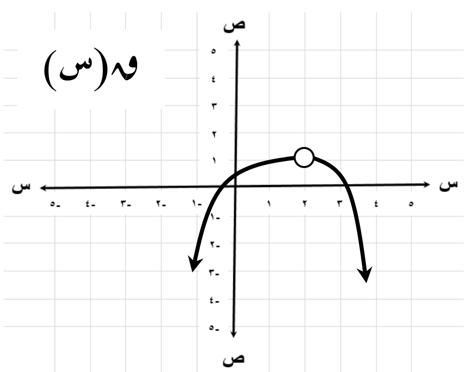
مثال٧٨ : من الشكل التالي، ما قيم (أ)

حيث يكون عندها $\underset{\text{س}\rightarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}$ ق(س) غير موجودة



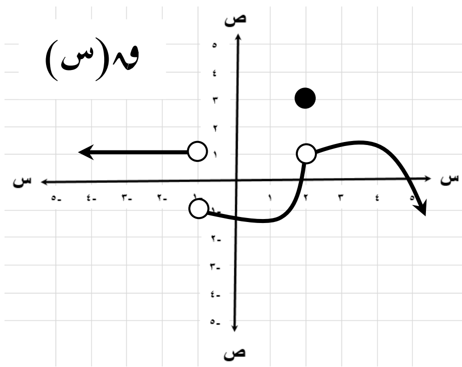
مثال٧٩ : مستعيناً بالرسم التالي للاقتران ق(س)، جد قيم (أ)

التي تجعل النهاية غير موجودة عل الفترة [١،٣]



إيجاد النهاية من خلال الرسم

مثال٨٠ : بالاعتماد على الشكل التالي، جد



١) $\underset{س\leftarrow ٢^{+}}{نهـا}$ ق(س)

٢) $\underset{س\leftarrow ٢^{-}}{نهـا}$ ق(س)

٣) $\underset{س\leftarrow ٢}{نهـا}$ ق(س)

٤) $\underset{س\leftarrow -١^{+}}{نهـا}$ ق(س)

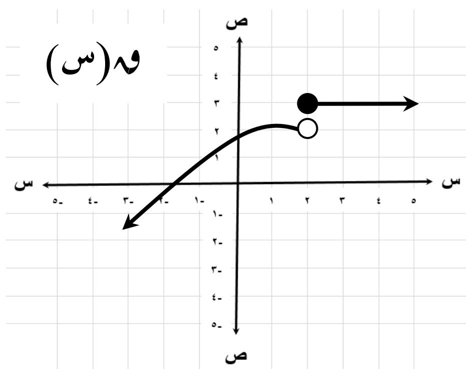
٥) $\underset{س\leftarrow -١^{-}}{نهـا}$ ق(س)

٦) $\underset{س\leftarrow -١}{نهـا}$ ق(س)

٧) ق(−١)

٨) ق(٢)

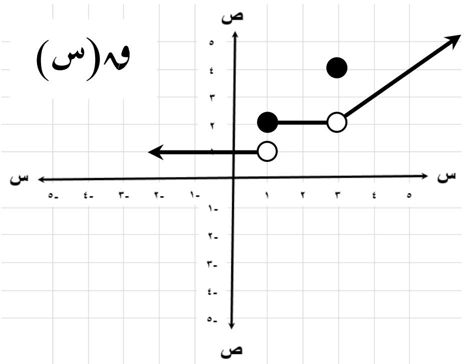
مثال٨١ : بالاعتماد على الشكل التالي، جد



١) $\underset{س\leftarrow ٢}{نهـا}$ ق(س)

٢) ق(٢)

مثال٨٢ : بالاعتماد على الشكل التالي، جد



١) $\underset{س\leftarrow ١^{+}}{نهـا}$ ق(س)

٢) $\underset{س\leftarrow ١^{-}}{نهـا}$ ق(س)

٣) $\underset{س\leftarrow ١}{نهـا}$ ق(س)

٤) $\underset{س\leftarrow ٣^{+}}{نهـا}$ ق(س)

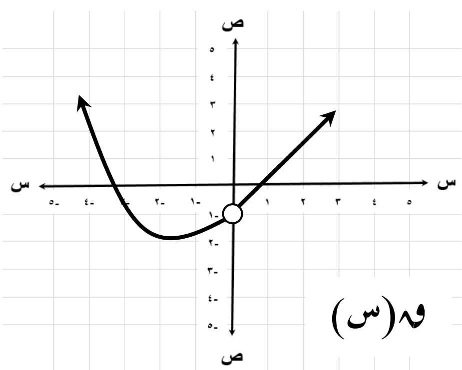
٥) $\underset{س\leftarrow ٠}{نهـا}$ ق(س)

٦) ق(١)

٧) ق(٣)

٨) ق(٠)

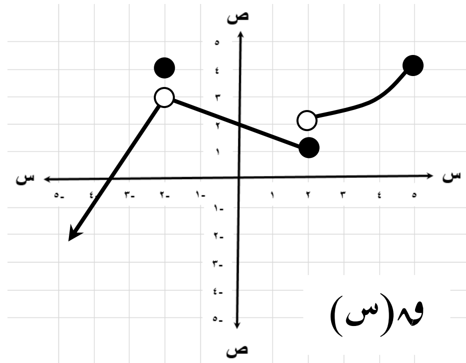
مثال٨٣ : بالاعتماد على الشكل التالي،



جد قيمة الثابت (ب)، حيث $\underset{س\leftarrow ب}{نهـا}$ ق(س) = ٠

إيجاد النهاية من خلال الرسم

مثال ٨٤ : بالاعتماد على الشكل التالي، جد



١) $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}}$ ق(س)

٢) $\underset{\text{س}\to ٤^{+}}{\text{نها}}$ ق(س)

٣) $\underset{\text{س}\to ٤^{-}}{\text{نها}}$ ق(س)

٤) $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نها}}$ ق(س)

٥) $\underset{\text{س}\to -٢^{+}}{\text{نها}}$ ق(س)

٦) $\underset{\text{س}\to -٢^{-}}{\text{نها}}$ ق(س)

٧) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}}$ ق(س)

٨) $\underset{\text{س}\to ٢^{+}}{\text{نها}}$ ق(س)

٩) $\underset{\text{س}\to ٢^{-}}{\text{نها}}$ ق(س)

١٠) $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نها}}$ ق(س)

١١) $\underset{\text{س}\to -٣^{-}}{\text{نها}}$ ق(س)

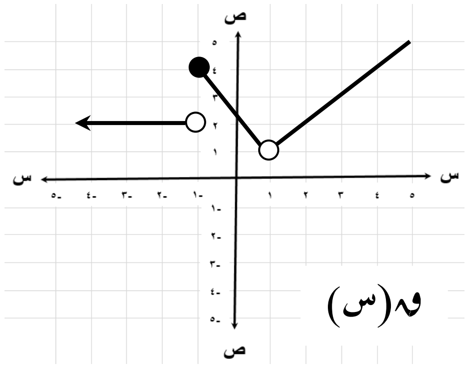
١٢) ق(−٢)

١٣) ق(٢)

١٤) ق(٥)

١٥) ماهي قيم (أ) التي تجعل من النهاية غير موجودة.

مثال ٨٥ : بالاعتماد على الشكل التالي، جد



١) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}}$ ق(س)

٢) $\underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نها}}$ ق(س)

٣) $\underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نها}}$ ق(س)

٤) $\underset{\text{س}\to ٠^{-}}{\text{نها}}$ ق(س)

٥) $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}}$ ق(س)

٦) $\underset{\text{س}\to -١^{+}}{\text{نها}}$ ق(س)

٧) $\underset{\text{س}\to -١^{-}}{\text{نها}}$ ق(س)

٨) $\underset{\text{س}\to ٣^{+}}{\text{نها}}$ ق(س)

٩) $\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نها}}$ ق(س)

١٠) $\underset{\text{س}\to ٥^{+}}{\text{نها}}$ ق(س)

١١) $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}}$ ق(س + ٢)

١٢) $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}}$ (ق(س + ٢) − ٢س^{٢} + ٥)

١٣) ق(١)

١٤) ق(−١)

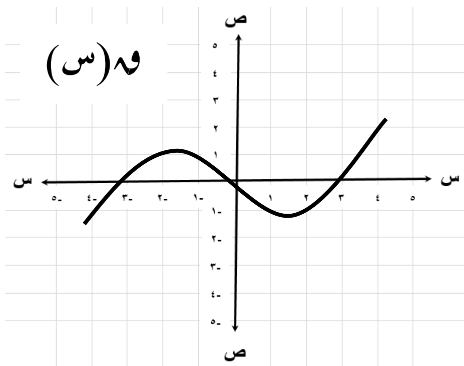
الاتصال

الاتصال من خلال الرسم

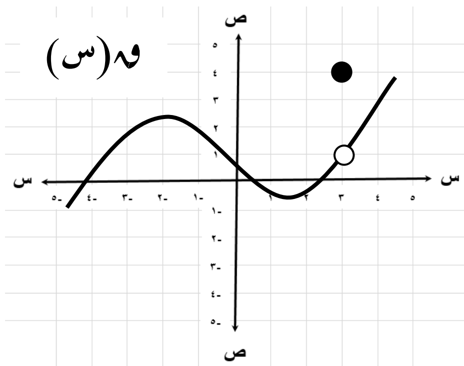
يكون الاقتران ق(س) **متصل** إذا كان المنحنى ق(س) مرسوم بدون قفزات أو انقطاع بالرسم أو نقطة مفتوحة.

مثال٨٦: جد قيم (س) التي يكون عندها منحنى الاقتران ق(س) غير متصل.

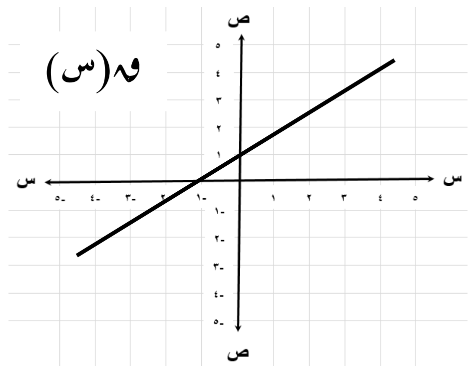
١)



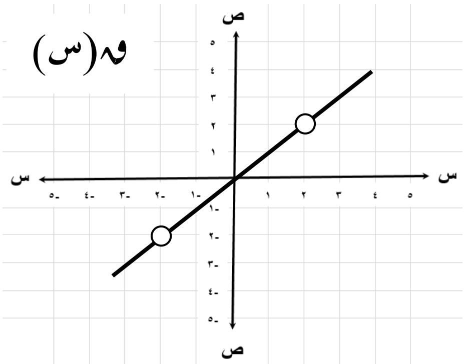
٢)



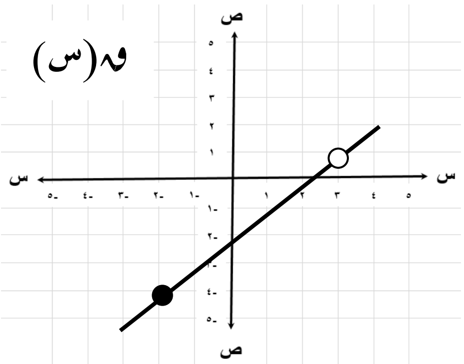
٣)



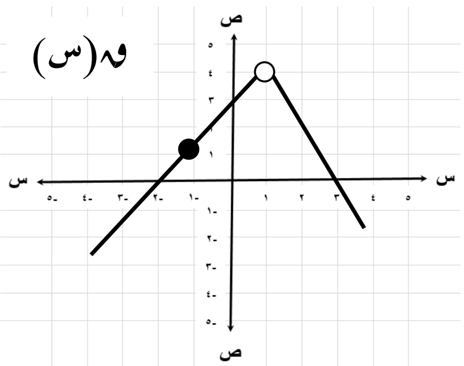
٤)



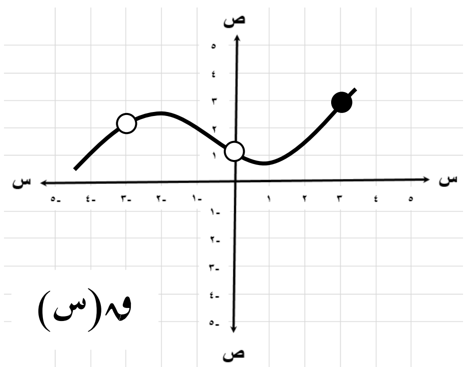
٥)



٦)



٧)



إيجاد الاتصال عند نقطة

يكون الاقتران ق(س) **متصلاً** عند النقطة (س = أ)
إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية معاً:

١) **ق(س) معرف عند (س = أ)**

ق(أ) = عدد حقيقي **(يوجد له صورة)**

٢) **نهـا~س←أ~ ق(س) موجودة،** إذا كان

نهـا~س←أ^+^~ ق(س) = نهـا~س←أ^-^~ ق(س)

٣) نهـا~س←أ~ ق(س) = ق(أ) **(النهاية = الصورة)**

ملاحظة: إذا اختل شرط واحد من الشروط السابقة نتوقف ويكون الاقتران **غير متصل** عند (س = أ)

نظرية: إذا كان **ق(س) اقتران كثير حدود،** فإن **ق(س) متصل دائماً** على جميع قيم (س) الحقيقية.

مثال٨٧: إذا كان ق(س) = $س^٣ + ١$
ابحث في اتصال ق(س) عند (س = ٣)

مثال٨٨: إذا كان ق(س) = $س^٢ - ٤$
ابحث في اتصال ق(س) عند (س = ٢)

مثال٨٩: إذا كان ق(س) = $٥ - \frac{١}{٣}س$
ابحث في اتصال ق(س) عند (س = ٠)

مثال٩٠: إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ + ١ & ، \quad س \geq ٢ \\ س^٣ - ٣ & ، \quad س < ٢ \end{cases}$
ابحث في اتصال ق(س) عند (س = ٢)

مثال٩١: إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٤س + ٥ & ، \quad س \geq ١ \\ ٣س + ١ & ، \quad س < ١ \end{cases}$
ابحث في اتصال ق(س) عند النقطة (س = ١)

إيجاد الاتصال عند نقطة

مثال٩٢: إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} ٣س + ١ &، س > ٣ \\ ٤س - ٢ &، س = ٣ \\ ٥س - ٥ &، س < ٣ \end{cases}$

ابحث في اتصال هـ(س) عند (س = ٣)

مثال٩٣: إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٢س + ٨ &، س < ٤ \\ ٣س + ٣ &، س = ٤ \\ س^٢ &، س > ٤ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) عند (س = ٤)

مثال٩٤: إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ٢٥}{س - ٥} &، س \neq ٥ \\ ٣س - ٥ &، س = ٥ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) عند (س = ٥)

مثال٩٥: إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ - ٢س}{س - ٢} &، س \neq ٢ \\ ٤ &، س = ٢ \end{cases}$

فابحث اتصال الاقتران ق(س) عندما (س = ٢)

مثال٩٦: إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ + ١ &، س > ١ \\ س + ١ &، س < ١ \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران ق(س) عند (س = ١)

إيجاد الاتصال عند نقطة

مثال٩٧: إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ - ٣س + ٢}{س - ١} & ، \quad س \neq ٢ \\ ٧ & ، \quad س = ٢ \end{cases}$$

ابحث في اتصال $ق(س)$ عند $(س = ٢)$

مثال٩٨: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س - ١ & ، \quad س > ١ \\ ٥ & ، \quad س = ١ \\ ١ - س & ، \quad س < ١ \end{cases}$

ابحث في اتصال $ق(س)$ عند $(س = ١)$

مثال٩٩: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٢ & ، \quad س \geq ٣ \\ س & ، \quad ٣ > س > ٠ \\ س^٣ & ، \quad س \leq ٠ \end{cases}$

ابحث في اتصال $ق(س)$

عند $(س = ٢)$ و $(س = ٣)$ و $(س = ٠)$

ايجاد الثوابت لاقتران متصل عند نقطة

مثال١٠٠: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} أس^{٢} & ، س < ٣ \\ ٢س - ١ & ، س \geq ٣ \end{cases}$

وكان ق(س) متصل عند (س = ٣)، فجد قيمة الثابت (أ)

مثال١٠١: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + أ & ، س \leq ٢ \\ س^{٣} & ، س > ٢ \end{cases}$

وكان ق(س) متصل عند (س = ٢)، فجد الثابت (أ)

مثال١٠٢: إذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٢س^{٣} + ٤ & ، س < -٢ \\ أس + ٦ & ، س \geq -٢ \end{cases}$

وكان الاقتران متصلاً عندما (س = -٢)، فجد قيمة الثابت (أ)

مثال١٠٣:

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} أس + ٣ & ، س < ١ \\ ٧ & ، س = ١ \\ س - ب & ، س > ١ \end{cases}$

وكان ق(س) متصلاً عندما (س = ١)،

فجد قيمة كل من الثابتين (أ،ب)

مثال١٠٤:

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} أس^{٢} + ب & ، س < ٢ \\ ١٦ & ، س = ٢ \\ ٣أس + ١ & ، س > ٢ \end{cases}$

وكان ق(س) متصل عند (س = ٢)، فجد (أ،ب)

ايجاد الثوابت لاقتران متصل عند نقطة

مثال١٠٥: إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{3 - س}{س - 3} & ، \quad س \neq 3 \\ م س + 2 & ، \quad س = 3 \end{cases}$

وكان الاقتران ق(س) متصلاً عندما (س = ٣)،

فجد قيمة الثابت (م)

مثال١٠٦:

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} 2أس^2 + ب & ، \quad س < 1 \\ 7 & ، \quad س = 1 \\ س^2 - 4ب - 6 & ، \quad س > 1 \end{cases}$

وكان الاقتران ق(س) متصلاً عندما (س = ١)،

فجد قيمة كل من الثابتين (أ،ب)

مثال١٠٧:

إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} س + أ & ، \quad س < 2 \\ 8 & ، \quad س = 2 \\ ب س + 6 & ، \quad س > 2 \end{cases}$

وكان الاقتران هـ(س) متصلاً عندما (س = ٢)،

فجد قيمة كل من الثابتين (أ،ب)

مثال١٠٨:

إذا كان ل(س) = $\begin{cases} أس - ب & ، \quad س < 1 \\ 4 & ، \quad س = 1 \\ أس^3 + ب + 2 & ، \quad س > 1 \end{cases}$

وكان الاقتران ل(س) متصلاً عندما (س = ١)،

فجد قيمة كل من الثابتين (أ،ب)

نظريات الاتصال

إذا كان الاقترانيين **ق(س)** و **هـ(س)** متصلاً عند $(س = أ)$ فإن:

١) $ق(س) + هـ(س)$ متصل عند $(س = أ)$

٢) $ق(س) - هـ(س)$ متصل عند $(س = أ)$

٣) $ق(س) \times هـ(س)$ متصل عند $(س = أ)$

٤) $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ متصل عند $(س = أ)$، بحيث $(س \neq ٠)$

مثال١٠٩: إذا كان $ق(س) = س^٢ - ١$،

$$هـ(س) = \begin{cases} ٣س - ١ & ، \quad س \geq ٣ \\ ٢س + ٢ & ، \quad س < ٣ \end{cases}$$

وكان $ل(س) = ق(س) - هـ(س)$

ابحث في اتصال $ل(س)$ عند $(س = ٣)$

مثال١١٠: إذا كان $م(س) = هـ(س) - ل(س)$

$$\text{وكان } هـ(س) = \begin{cases} ٥س + ١ & ، \quad س > ٢ \\ س^٣ + ٣ & ، \quad س = ٢ \\ ١٠س - ١٩ & ، \quad س < ٢ \end{cases}$$

وكان $ل(س) = س + ١$

ابحث في اتصال $م(س)$ عند $(س = ٢)$

نظريات الاتصال

مثال١١١: إذا كان ق(س) = م(س) × هـ(س)

وكان $م(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & ، \quad س > ٣ \\ ٥س & ، \quad س < ٣ \\ س^{٢} & ، \quad س = ٣ \end{cases}$

وكان هـ(س) = ٢س − ٦

ابحث في اتصال ق(س) عند (س = ٣)

مثال١١٢: إذا كان ق(س) = $س^{٢}$ − ٩ ،

وكان $هـ(س) = \begin{cases} س & ، \quad س < ٣ \\ ٠ & ، \quad س = ٣ \\ -س & ، \quad س > ٣ \end{cases}$

وكان ل(س) = ق(س) × هـ(س)

فبين أن ل(س) متصل عند (س = ٣)

نظريات الاتصال

مثال١١٣: إذا كان ق(س) = س^٣^ + ٥س ،

$$هـ(س) = \begin{cases} ٥س + ٤ & ، \quad س \leq ١ \\ ٨ + س^{٢} & ، \quad س > ١ \end{cases}$$

وكان ل(س) = (ق + هـ)(س)

فابحث اتصال الاقتران ل(س) عندما (س = ١)

مثال١١٤: إذا كان ق(س) = ٥س^٢^ + ٥س − ١ ،

$$هـ(س) = \begin{cases} س + ٩ & ، \quad س \leq ٢ \\ ٥س + ١ & ، \quad س > ٢ \end{cases}$$

وكان ل(س) = ٢ق(س) + هـ(س)

فابحث في اتصال الاقتران ل(س) عندما (س = ٢)

نظريات الاتصال

مثال١١٥:

إذا كان $(ق + هـ)(س)$ متصلاً عندما $(س = أ)$،
فهل نستنتج أن كلاً من ق$(س)$، هـ$(س)$ متصل
عندما$(س = أ)$، برر إجابتك.

الحل:

لا، ليس بالضرورة، لأن حاصل جمع الاقترانين غير متصلين قد يكون لدينا اقتران جديد متصل.

التوضيح:

$$هـ(س) = \begin{cases} -٥ & ، \quad س < ١ \\ ٤ & ، \quad س = ١ \\ ١ & ، \quad س > ١ \end{cases}$$ **(اقتران غير متصل)**

$$ل(س) = \begin{cases} ٧ & ، \quad س < ١ \\ -٢ & ، \quad س = ١ \\ ١ & ، \quad س > ١ \end{cases}$$ **(اقتران غير متصل)**

$$هـ(س) + ل(س) = \begin{cases} ٢ & ، \quad س < ١ \\ ٢ & ، \quad س = ١ \\ ٢ & ، \quad س > ١ \end{cases}$$ **(اقتران متصل)**

إيجاد الثوابت (نظريات الاتصال)

مثال١١٦: إذا كان الاقتران ق(س) متصلاً عند (س = ٧)، وكانت $\lim_{س \to ٧}$ (٢ق(س) + ٣س) = ١١، فما قيمة ق(٧)؟

مثال١١٧: إذا كان الاقتران ق(س) متصلاً عندما (س = ٢) وكانت $\lim_{س \to ٢}$ (٢ق(س) + س) = ٦، فجد قيمة ق(٢).

مثال١١٨: إذا كان ق، هـ اقترانيين متصلين عند (س = ٧)
وكان ق(٧) = ١٢، هـ(٧) = ٣،
أثبت أن $\lim_{س \to ٧} \frac{ق(س) - ٢}{هـ(س) + س} = ١$

مثال١١٩: إذا كان ق، هـ اقترانيين متصلين عند (س = ١)
وكان ٣ق(١) = ٦، $\frac{١}{٣}$ هـ(١) = −١،
أثبت أن $\lim_{س \to ١} \frac{٢ق(س) + س^{٢}}{هـ(س) + ٨} = ١$

إيجاد الثوابت (نظريات الاتصال)

مثال١٢٠: إذا كان ق ، هـ اقترانيين متصلين عند (س = ٣)
وكان ق(٣) = ١١، جد هـ(٣)
التي تجعل $\lim_{س \leftarrow ٣} \frac{ق(س) - س}{(هـ(س))^{٣}} = ١$

مثال١٢١: إذا كان ق ، هـ كثيري حدود
وكان $\lim_{س \leftarrow ١} \frac{ق(س) + ٩س}{٢هـ(س) - ٦} = ٦$ ، ق(١) = ٣
فجد هـ(١)

إيجاد نقاط عدم الاتصال

نقاط عدم الاتصال: هي جميع **النقاط الحرجة** التي عندها تكون النهاية لا تساوي الصورة $\lim\limits_{\text{س}\to\text{أ}} \text{ق(س)} \neq \text{ق(أ)}$.

أنواع الاقترانات

اقتران كثير الحدود

كثيرات الحدود دائماً متصلة
ولا يوجد نقاط عدم اتصال

$$\text{ق(س)} = \text{٣س}^{\text{٢}} - \text{س} + \text{١٢}$$

الاقتران النسبي

متصلة ماعدا أصفار المقام
أصفار المقام هي نقاط عدم الاتصال

$$\text{ق(س)} = \frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{١٢}}{\text{س} + \text{١}}$$

الاقتران المتشعب

متصلة فقط عندما تكون النهاية تساوي الصورة
ونقاط عدم الاتصال هي نقاط التشعب عندما النهاية لا تساوي الصورة

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{٢س} & \text{،} \quad \text{س} \geq \text{٢} \\ \text{س}^{\text{٢}} & \text{،} \quad \text{س} < \text{٢} \end{cases}$$

مثال١٢٢: جد نقاط عدم الاتصال للاقتران
$\text{ق(س)} = \text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٢س}^{\text{٣}}$

مثال١٢٣: جد نقاط عدم الاتصال للاقتران
$\text{ق(س)} = \text{س}^{\text{٢}} - \text{٣س} + \text{٩}$

مثال١٢٤: جد نقاط عدم الاتصال للاقتران $\text{ق(س)} = \text{س}^{\text{٢}}$

مثال١٢٥: جد نقاط عدم الاتصال للاقتران $\text{ق(س)} = -\text{٢}$

مثال١٢٦: إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{١} - \text{س} & \text{،} \quad \text{س} \geq \text{١} \\ \text{س} - \text{١} & \text{،} \quad \text{س} < \text{١} \end{cases}$

جد نقاط عدم الاتصال للاقتران ق(س)

مثال١٢٧: إذا كان $\text{م(س)} = \begin{cases} \text{س}^{\text{٣}} + \text{٣} & \text{،} \quad \text{س} < \text{٢} \\ \text{٦} - \text{س} & \text{،} \quad \text{س} \geq \text{٢} \end{cases}$

جد نقاط عدم الاتصال للاقتران م(س)

مثال١٢٨: إذا كان $\text{هـ(س)} = \begin{cases} \text{س}^{\text{٢}} & \text{،} \quad \text{س} > \text{٢} \\ \text{٢س} & \text{،} \quad \text{س} < \text{٢} \end{cases}$

جد نقاط عدم الاتصال للاقتران هـ(س)

إيجاد نقاط عدم الاتصال

مثال١٢٩: جد قيم (س) التي يكون عندها كل اقتران مما يأتي غير متصل

١) $ق(س) = \frac{س^٢ - ٩}{٢س - ٨}$

٢) $ع(س) = \frac{٥س^٢ - ٣}{٣س - ٢}$

٣) $ق(س) = \frac{٢}{س^٢ - ١}$

٤) $ل(س) = \frac{٢س}{س^٢ + ٤}$

٥) $ق(س) = \frac{س + ٣}{س^٢ - ٢س}$

٦) $ق(س) = \frac{٣س^٢ - س + ١}{س}$

٧) $م(س) = \frac{س + ٤}{(س - ٣)(س + ٢)}$

٨) $ق(س) = \frac{١}{(س - ٢)^٢} + \frac{٤}{س}$

٩) $هـ(س) = \frac{٣س}{٢٧ - س^٣} + \frac{١}{٣ - س}$

١٠) $ق(س) = \frac{١}{س^٢ - ٤} + \frac{٢}{س}$

١١) $ق(س) = \frac{٣س - ١}{س^٢ - ٣س + ٢}$

١٢) $ع(س) = \frac{س^٢ - س - ٦}{٥}$

الوحـدة الثانيـة: التفـــــاضـــل
لطلاب التخصص الأدبي والفندقي

إعداد/ مروان ابوديه

مقدار التغير ومعدل التغير

- **مقدار التغير في (س):** ورمزه (Δس) – وتقرأ دلتا س

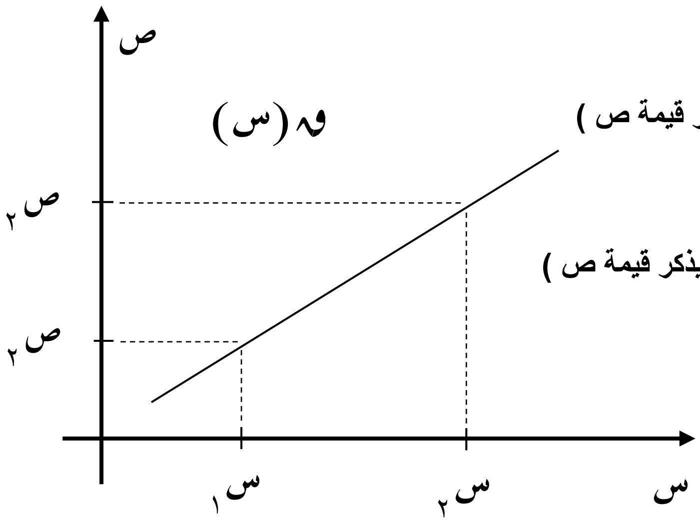
Δس = س$_٢$ – س$_١$ ، س$_١$ $\neq$ س$_٢$ **(مقدار التغير في (س)، حيث قيمة س لا تساوي صفر)**

- **مقدار التغير في (ص):** ورمزه (Δص) – وتقرأ دلتا ص

Δص = ص$_٢$ – ص$_١$ **(يستخدم القانون إذا ذكر قيم ص)**

Δص = ق(س$_٢$) – ق(س$_١$) **(يستخدم القانون إذا لم يذكر قيم ص)**، **يسمى أيضاً بقانون مقدار التغير في الاقتران**

- **معدل التغير في الاقتران**



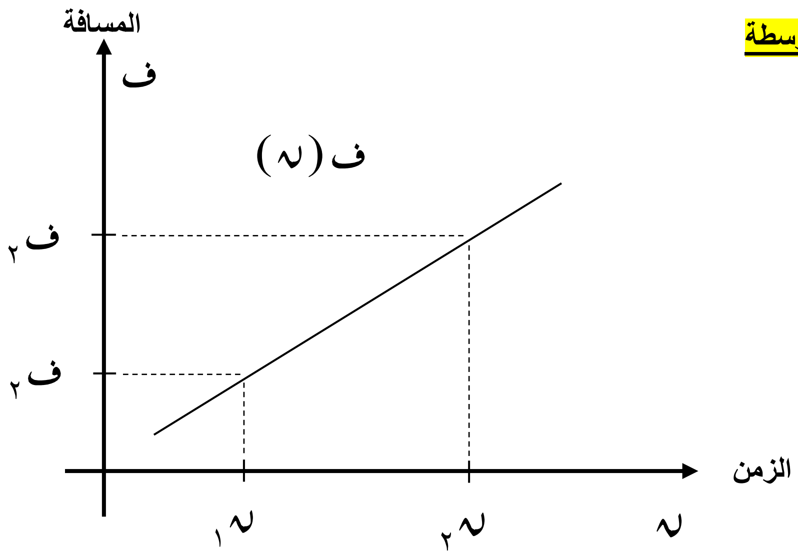
$\dfrac{\Delta ص}{\Delta س} = \dfrac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ **(يستخدم القانون إذا ذكر قيمة ص)**

$\dfrac{\Delta ص}{\Delta س} = \dfrac{ق(س_٢) - ق(س_١)}{س_٢ - س_١}$ **(يستخدم القانون إذا لم يذكر قيمة ص)**

مسميات أخرى لمعدل التغير:

١) المشتقة الأولى.
٢) الميل.
٣) ميل الخط المستقيم.
٤) ميل المماس.
٥) ميل القاطع.

- **يمكن من خلال قانون معدل التغير حساب السرعة المتوسطة**



$\dfrac{\Delta ف}{\Delta ن} = \dfrac{ف_٢ - ف_١}{ن_٢ - ن_١}$

$\dfrac{\Delta ف}{\Delta ن} = \dfrac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١}$

مقدار التغير في (س)

مثال١ : جد مقدار التغير في (س) لكل من الحالات التالية:

١) $س_١ = ٤$ ، $س_٢ = ٦$

٢) $س_١ = ٥$ ، $س_٢ = ٢$

٣) $س_١ = ٣$ ، $س_٢ = ١٠$

٤) $س_١ = -٤$ ، $س_٢ = -٣$

٥) في الفترة $[-١ , ٣]$

٦) $س_١ =$ صفر ، $س_٢ = -\frac{١}{٢}$

٧) $س_١ = \frac{١}{٣}$ ، $س_٢ = \frac{٧}{٣}$

٨) $س_١ = \frac{١}{٢}$ ، $س_٢ = \frac{٣}{٤}$

مثال٢ : إذا كانت $(س_١ = ٣)$ و $(\Delta س = ٥)$، جد $(س_٢)$.

مثال٣ : إذا كانت $(س_٢ = -٢)$ و $(\Delta س = ٤)$، جد $(س_١)$.

مثال٤ : إذا تغيرت (س) على الفترة $[٢, أ]$،
وكان مقدار التغير في (س) يساوي ١٦، جد قيمة (أ).

مثال٥ : إذا تغيرت (س) من (أ) إلى ١٣ ،
وكان مقدار التغير في (س) يساوي ٩، جد قيمة (أ).

مثال٦ : إذا تغيرت (س) على الفترة $[ب, ٣]$،
وكان مقدار التغير في (س) يساوي -٣، جد قيمة (ب).

مثال٧ : إذا علمت أن $ق(س) = ٤ - ٣س$،
وتغيرت قيمة (س) من (٣) إلى (٥)،
جد مقدار $(\Delta س)$.

مقدار التغير في (ص)

مثال٨ : إذا كانت $(ص_١ = ٥)$ و $(\Delta ص = -٢)$، جد $(ص_٢)$

مثال٩ : إذا كان ق(س) $= ٣س - س^٢$، حيث $(س_١ = ٢)$ و $(\Delta س = ١)$، جد مقدار التغير في الاقتران.

مثال١٠ : ما قيمة تغير الاقتران ص $= ٣س^٣$، عندما تتغير (س) من $(س_١ = ٢)$ بمقدار $(\Delta س = -١)$.

مثال١١ : مكعب معدني تعرض للحرارة بحيث تغير طول ضلعه من (١) سم إلى (٣) سم، جد مقدار التغير في حجم هذا المكعب.

✓ ملاحظة: حجم المكعب $= (س^٣)$

مثال١٢ : إذا كان ق(س) $= س^٢ - ٣$،
وتغيرت (س) من (٢) إلى (٧)، جد مقدار التغير في الاقتران.

مثال١٣ : إذا كانت ق(س) $= \sqrt{٣س + ١}$،
وتغيرت (س) من (١) إلى (٥)، جد مقدار التغير في الاقتران.

مثال١٤ : إذا كان ق(س) $= ١ - س^٣$،
جد مقدار التغير في الاقتران على الفترة $[-١, ٢]$.

مثال١٥ : إذا كان ص = ق(س) $= س^٢$، وتغيرت قيمة (س) من $(س_١ = ٢)$ إلى $(س_٢ = ٤)$، جد مقدار التغير في (ص).

معدل التغير

مثال١٦ : إذا كان ق(س) = س^{٢}+س ، وتغيرت (س) من (٢) الى (٤)، جد متوسط التغير في الاقتران ق(س).

مثال١٧ : إذا كان ق(س) = $\frac{٢٠}{س+١}$ وتغيرت (س) على الفترة [١, ٤]، جد متوسط التغير في الاقتران ق(س).

مثال١٨ : إذا علمت أن ق(٢) = ٧،
وتغيرت (س) من (٢) الى (٤)،
وكان متوسط التغير للاقتران يساوي (٥)، جد قيمة ق(٤).

مثال١٩ : إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} ٣س+١ & ، \quad س \geq ٣ \\ س^{٢}+١ & ، \quad س < ٣ \end{cases}$$

جد متوسط التغير للاقتران ق(س)،
عندما تتغير (س) من (٢) إلى (٥).

مثال٢٠ : إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢}-٢ & ، \quad ٠ \leq س \leq ٣ \\ ٢س+١ & ، \quad ٣ < س \leq ٧ \end{cases}$$

فجد معدل تغير الاقتران ق(س)،
عندما تتغير (س) من (١) إلى (٥).

مثال٢١ : إذا كان ق(س) = –٢ وتغيرت (س) من (١) الى (٦)، جد متوسط التغير في الاقتران ق(س).

معدل التغير

مثال٢٢ : في عام (٢٠٠٥) بلغت أرباح شركة أجهزة كهربائية (٢٠٠٠٠) دينار، وفي عام (٢٠١٢)م حققت الشركة أرباحاً قدرها (٣٤٠٠٠) دينار، ما قيمة التغير في ربح الشركة في أثناء هذه المدة؟ وما معدل التغير السنوي في أرباحها ؟

مثال٢٣ : إذا كان

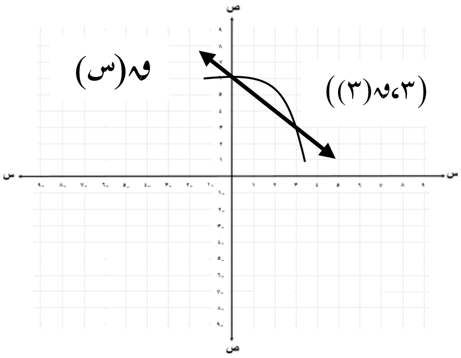
$$ق(س) = \begin{cases} س^{٣} & ، ١ \le س \le ٣ \\ أس & ، ٣ < س \le ٥ \end{cases}$$

وكان معدل تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير (س) من (٢) إلى (٥) يساوي (٤)، فجد قيمة الثابت (أ).

مثال٢٤ : إذا كان $ق(س) = \frac{أ}{س + ٢}$ ،

وكان معدل تغير الاقتران ق(س) يساوي (−١)، عندما تتغير (س) من (٠) إلى (٣)، فجد قيمة الثابت (أ).

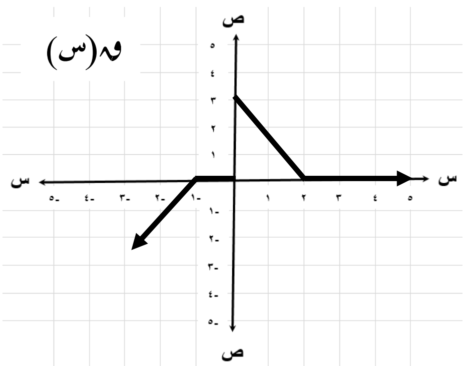
مثال٢٥ : إذا كان ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) في الشكل التالي يساوي (−١)، فجد قيمة ق(٣).



مثال٢٦ : اعتماداً على الشكل التالي الذي يمثل منحنى ق(س)، جد كلاً مما يأتي:

أ) قيم (س) التي تجعل الاقتران ق(س) غير متصل.

ب) معدل التغير للاقتران ق(س) في الفترة [٢،٤].

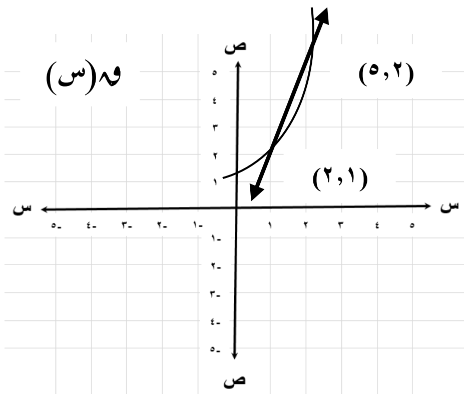


معدل التغير ومتوسط السرعة

مثال٢٧ : إذا كان $ق(س) = س^{٢} + ٢س$ ، جد ميل القاطع لمنحنى الاقتران $ق(س)$، والمار بالنقطتين $(١،٣)$، $(٤،٢٤)$.

مثال٢٨ : إذا كان $ق(س) = س + س^{٢}$ ، جد ميل القاطع لمنحنى الاقتران $ق(س)$، والمار بالنقطتين $\left(٢،ق(٢)\right)$، $\left(٣،ق(٣)\right)$

مثال٢٩ : معتمداً الشكل المجاور،
ما متوسط التغير للاقتران $ق(س)$ في الفترة $[١،٢]$.



مثال٣٠ : يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة $ف(ن) = ٣ن^{٢}$ ، حيث $(ن)$ الزمن بالثواني، $(ف)$ المسافة بالأمتار، احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية $[١،٣]$.

مثال٣١ : يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقاً للاقتران $ف(ن) = ٤ن^{٢} + ٢ن$ ، حيث $(ف)$ المسافة المقطوعة بالأمتار، $(ن)$ الزمن بالثواني، جد السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية $[١،٢]$.

مثال٣٢ : إذا كانت المسافة التي يقطعها جسيم أثناء سقوطه رأسياً إلى الأسفل تعطى بالعلاقة $ف(ن) = ١٠ن - ٥ن^{٢}$ ، حيث $(ف)$ المسافة المقطوعة بالأمتار، $(ن)$ الزمن بالثواني، فأحسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية $[١،٣]$.

معدل التغير

مثال٣٣ : إذا كان ق(س) = هـ(س) + س^{٢} ، وتغيرت (س) من (١) الى (٣)، وكان متوسط تغير الاقتران هـ(س) يساوي (٦)، جد متوسط التغير للاقتران ق(س) على نفس هذه الفترة.

مثال٣٥ : إذا كان م(س) = س^{٢} + ١ – ق(س)، وتغيرت (س) على الفترة [٢،٥]، وكان متوسط التغير للاقتران ق(س) يساوي (٤)،
جد متوسط تغير الاقتران م(س) على هذه الفترة.

مثال٣٤ : إذا كان معدل التغير في الاقتران ق(س) في الفترة [١،٣] يساوي (٤)، وكان هـ(س) = ق(س) –س ،
فجد معدل التغير للاقتران هـ(س) في الفترة [١،٣].

مثال٣٦ : إذا كان معدل التغير في الاقتران ق(س) في الفترة [–١،٢] يساوي (– ٣)،
وكان هـ(س) = ٢ق(س) + ٥س ،
فجد معدل التغير للاقتران هـ(س) في الفترة [–١،٢].

التعريف العام للمشتقة

المشتقة الأولى تعني نهاية **معدل التغير** عندما يقترب التغير من الصفر.

✓ **لو ذكر في السؤال اقتران، فإن المشتقة الأولى هي النهاية. وتحسب من خلال القانون العام للمشتقة.**

المشتقة الأولى للاقتران (ق)

المشتقة الأولى للاقتران ص = ق (س) المعرف على الفترة [أ،ب] هو اقتران آخر نرمز إليه بالرمز ق ′(س)، ويقرأ (ق فتحة لـ س)، حيث:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

✓ يستخدم هذا القانون غالباً في الأسئلة الموضوعية **(ضع دائرة)**.

ويمكن وضع ع = (س + هـ)، والتعبير عن **المشتقة الأولى**، **باستخدام التعريف** التالي:

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

✓ يستخدم هذا القانون دائماً في أسئلة الحل.

من رموز المشتقة الأولى ق′(س)، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ، ص′.

خطوات حل السؤال باستخدام التعريف العام للمشتقة

- كتابة القانون العام.
- كتابة **الاقتران الاصلي** بدلالة (ع).
- ننسخ ق(س) كما هو داخل **قوس** مضروب بـ **سالب**.
- **نفك الأقواس**، وأحياناً نجري **عمليات التحليل**.
- اختصار المقادير المتشابهة.
- نعوض (ع) بـ (س).

ملاحظة: يمكن التحقق من الحل من خلال استخدام قواعد الاشتقاق.

مثال٣٧ : جد المشتقة الأولى للاقتران ق، حيث ق(س) = ٣س ، باستخدام التعريف العام للمشتقة.

مثال٣٨ : باستخدام التعريف العام للمشتقة، جد المشتقة الأولى للاقتران ق(س) = ٧س − ٢

مثال٣٩ : إذا كان ق(س) = ٣ − ٢س ، فجد ق′(٣) باستخدام التعريف العام للمشتقة.

مثال٤٠ : باستخدام تعريف المشتقة، جد المشتقة الأولى للاقتران ق(س) = ٦

التعريف العام للمشتقة

مثال ٤١ : باستخدام تعريف المشتقة،
جد $ق'(٢)$ للاقتران $ق(س) = س^{٢}$

مثال ٤٢ : باستخدام التعريف العام للمشتقة،
جد $ق'(٣)$ للاقتران $ق(س) = ٣س^{٢} + ١$

مثال ٤٣ : باستخدام التعريف العام للمشتقة،
جد $ق'(٤)$ للاقتران $ق(س) = ١ - س^{٢}$

مثال ٤٤ : باستخدام تعريف المشتقة،
جد $ق'(٣)$ للاقتران $ق(س) = س^{٣}$

مثال ٤٥ : باستخدام تعريف المشتقة،
جد $ق'(٢)$ للاقتران $ق(س) = س^{٣} + ٣$

مثال ٤٦ : باستخدام تعريف المشتقة،
جد $ق'(٤)$ للاقتران $ق(س) = \sqrt{س}$

التعريف العام للمشتقة

مثال٤٧ : باستخدام التعريف العام للمشتقة،
جد $ق'(٦)$ للاقتران $ق(س) = \sqrt{س + ٣}$

مثال٤٨ : باستخدام التعريف العام للمشتقة، جد $ق'(٢)$
للاقتران $ق(س) = \sqrt{٢س - ٣}$ ، حيث $\left(س \geq \frac{٣}{٢}\right)$

مثال٤٩ : باستخدام تعريف المشتقة، جد المشتقة الأولى
للاقتران $ق(س) = \frac{٣}{س + ٢}$ ، $(س \neq -٢)$

مثال٥٠ : باستخدام تعريف المشتقة، جد $ق'(١)$ للاقتران
$ق(س) = \frac{٥}{٤ + ٣س}$ ، $\left(س \neq \frac{-٤}{٣}\right)$

التعريف العام للمشتقة

مثال ٥١ : باستخدام تعريف المشتقة، جد $ق'(٣)$
للاقتران $ق(س) = س^{٢} - ٤س$

مثال ٥٢ : باستخدام تعريف المشتقة، جد $ق'(٠)$
للاقتران $ق(س) = ٢س^{٣} - ٥س + ٤$

مثال ٥٣ : إذا كان $ص = ق(س)$، وكان مقدار تغير الاقتران $ق(س)$ هو $\left(س^{٢}هـ - ٢سهـ^{٢}\right)$، فجد $ق'(س)$.

مثال ٥٤ : إذا كان $ص = ق(س)$، وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران $(ق)$ عندما تتغير $(س)$ من $(س_{١})$ إلى $(س_{١} + هـ)$ هو $\Delta ص = ٤سهـ + ٢هـ^{٢}$، فجد $ق'(س)$.

مثال ٥٥ : إذا كان $ص = ق(س)$، وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران $(ق)$ عندما تتغير $(س)$ من $(س)$ إلى $(س + هـ)$ هو $\Delta ص = ٥س^{٢}هـ + ٨سهـ^{٢}$، فجد $ق'(٢)$.

قواعد الاشتقاق

القاعدة الأولى: مشتقة الثابت

- إذا كان $ق(س) = أ$ ، حيث $(أ)$ عدد ثابت

فإن $ق'(س) = $ صفر

مثال ٥٦ : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي:

١) $ق(س) = ٣$

٢) $ص = -٥$

٣) $م(س) = \frac{٢٢}{٧}$

٤) $ص = ٢\pi$

٥) $هـ = \sqrt{١٢}$

٦) $ع = ٣^{٢}$

القاعدة الثانية: مشتقة الاقترانات الخطية

- إذا كان $ق(س) = أس$ ، حيث $(أ)$ عدد ثابت

فإن $ق'(س) = أ$

مثال ٥٧ : جد $ق'(س)$ لكل مما يلي:

١) $ق(س) = ٧س$

٢) $ص = -٥ ١س$

٣) $م(س) = ٦ + س$

٤) $هـ(س) = ٧ - ٩س$

٥) $ق(س) = \frac{٣س}{٢}$

٦) $ق(س) = \sqrt{٣}س - ٣$

القاعدة الثالثة: مشتقة الاقترانات الغير خطية

- إذا كان $ق(س) = أس^{ن}$

فإن $ق'(س) = أ \times ن س^{ن-١}$

مثال ٥٨ : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي:

١) $ق(س) = س^{٢}$

٢) $ص = س^{٥}$

٣) $ق(س) = س^{-٤}$

٤) $ص = ٢س^{٢} - ٣س$

٥) $ق(س) = س^{٤} - ٢س^{٣} + ٨س - ٧$

٦) $ق(س) = ٢س^{-٣} - ٥س + ٦$

٧) $ق(س) = ٢س^{\frac{١}{٢}} - ٣س^{\frac{١}{٣}} - ١٠$

٨) $ص = \frac{١}{٢}س^{٤} + \frac{١}{٣}س^{٣} - ٦س + ٨$

٩) $ق(س) = س^{-٣} - ٣س^{\frac{٢}{٣}} + \frac{١}{٢}س$

مثال ٥٩ : $ق(س) = \frac{١}{٢}س^{٣} + س^{٢}$ ، فجد $ق'(١)$

قواعد الاشتقاق

القاعدة الرابعة: مشتقة ضرب اقترانيين

- إذا كان $ق(س) = هـ(س) \times ل(س)$

فإن $ق'(س) = هـ(س) \times ل'(س) + ل(س) \times هـ'(س)$

الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول

مثال٦٠ : إذا كان $ق(س) = س(٢س^{٢} - ٥)$، جد $ق'(٢)$.

مثال٦١ : إذا كان $ق(س) = (س^{٢} + ١)(٢س^{٣} - س)$،
فجد $ق'(١)$.

مثال٦٢ : إذا كان $ق(س) = ٥س - ٣$،
$هـ(س) = س^{٢} + س$، جد $(ق \times هـ)'(٢)$.

مثال٦٣ : إذا كان $ق(س) = س^{٢}(٣س^{٢} - س)$،
فجد $ق'(-١)$.

مثال٦٤ : إذا كان $هـ(س) = س^{٣} ق(س)$،
وكان $ق(٢) = ٨$ ، $ق'(٢) = ٣$ ، فجد $هـ'(٢)$

مثال٦٥ : جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

١) $ص = (٣س^{٢} + ٧)(س^{-٥} + ٣)$

٢) $ق(س) = (٥ - ٣س)(٤س^{٣} + ١)$،
عندما ($س = ١$)

٣) $ص = (٣س^{٢} - ٤)(س^{٢} - ١)$

مثال٦٦ : إذا كان $ق(٧) = ٣$ ، $ق'(٧) = ٥$
$هـ(٧) = ٢$ ، $هـ'(٧) = -٤$

فجد كلاً من:

١) $(ق \times هـ)'(٧)$

٢) $(ق + هـ)'(٧)$

٣) $\left((ق \times هـ)(٧)\right)'$.

٤) $\left(\frac{ق}{هـ}\right)'(٧)$

قواعد الاشتقاق

القاعدة الخامسة: مشتقة قسمة اقترانيين

- إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{ب}(\text{س})}{\text{م}(\text{س})}$ ، حيث $\text{م}(\text{س}) \neq ٠$

فإن $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{م}(\text{س}) \times \text{ب}'(\text{س}) - \text{ب}(\text{س}) \times \text{م}'(\text{س})}{(\text{م}(\text{س}))^{٢}}$

- إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{أ}}{\text{م}(\text{س})}$ ، حيث (أ) ثابت

فإن $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-\text{أ} \times \text{م}'(\text{س})}{(\text{م}(\text{س}))^{٢}}$

- إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{ب}(\text{س})}{\text{أ}}$ ، $(\text{أ} \neq ٠)$

فإن $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{ب}'(\text{س})}{\text{أ}}$

مثال ٦٧ : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} + ٥}{٣\text{س} - ٦}$ ، جد $\text{ق}'(\text{س})$.

مثال ٦٨ : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٢\text{س} + ٥}{٣ - \text{س}}$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

مثال ٦٩ : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٣\text{س}}{٢\text{س} - ٢}$ ، جد $\text{ق}'(٢)$.

مثال ٧٠ : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + \text{س}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = ٣\text{س} - ١$ ، جد $\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)'(١)$

مثال ٧١ : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{١ - ٣\text{س}}{٢}$ ، جد $\text{ق}'(١)$.

مثال ٧٢ : إذا كان $\text{ص} = \frac{١١}{\text{س}^{٣} + ٦}$ ، جد المشتقة الأولى

مثال ٧٣ : إذا كان $\text{ص} = \frac{-٣}{٢ - \text{س}}$ ، جد $\text{ص}'$.
عندما $(\text{س} = -٢)$

مثال ٧٤ : إذا كان $\text{ق}(٧) = ٣$ ، $\text{ق}'(٧) = ٥$
$\text{هـ}(٧) = ٢$ ، $\text{هـ}'(٧) = -٤$
جد $\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)'(٧)$

مثال ٧٥ : إذا كان الاقتران (هـ) اقتراناً قابلاً للاشتقاق،
عندما $(\text{س} = -٢)$ ، وكان $\text{هـ}(-٢) = ١$ ، $\text{هـ}'(-٢) = ٢$ ،
فجد $\text{ق}'(-٢)$ للاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س}) - \frac{\text{هـ}(\text{س})}{\text{س}}$

قواعد الاشتقاق

القاعدة السادسة: مشتقة الجذر التربيعي

- إذا كان $ق(س) = \sqrt{جـ(س)}$

فإن $ق'(س) = \frac{جـ'(س)}{٢\sqrt{جـ(س)}}$

مثال٧٦: إذا كان $ق(س) = \sqrt{س}$، جد $ق'(٩)$.

مثال٧٧: إذا كان $ق(س) = \sqrt{٢س^{٢} + ١}$، جد $ق'(س)$.

مثال٧٨: إذا كان $ق(س) = \sqrt{س^{٢} - س + ٣}$، جد $\frac{ءص}{ءس}$

مثال٧٩: إذا كان $ق(س) = ٢\sqrt{٧ - س^{٣}}$ ، جد $ق'(س)$.

مثال ٨٠ : إذا كان الاقتران (هـ) اقتراناً قابلاً للاشتقاق، عندما (س = −٢)، وكان $هـ(−٢) = ١$، $هـ'(−٢) = ٢$ ، فجد $ق'(−٢)$ للاقتران $ق(س) = \sqrt{س + ٦} \times هـ(س)$

القاعدة السابعة: مشتقة الجذر التكعيبي

- إذا كان $ق(س) = \sqrt[٣]{جـ(س)}$

فإن $ق'(س) = \frac{جـ'(س)}{٣\sqrt[٣]{جـ(س)}^{٢}}$

مثال٨١ : إذا كان $ق(س) = \sqrt[٣]{س}$، جد $ق'(−١)$.

مثال٨٢ : إذا كان $ق(س) = \sqrt[٣]{س - ١}$، جد $\frac{ءص}{ءس}$

مثال٨٣ : إذا كان $ق(س) = \sqrt[٣]{٢ - س}$، جد $ق'(−٦)$.

مثال٨٤ : إذا كان $ق(س) = \sqrt[٣]{س^{٢} - ١}$، جد $ق'(٠)$.

مثال٨٥ : إذا كان $ق(س) = \sqrt[٣]{س - س^{٢}}$ ، جد $ق'(٢)$.

قواعد الاشتقاق

القاعدة الثامنة: مشتقة القوس

- إذا كان $ق(س) = (م(س))^{ن}$

فإن $ق'(س) = ن\,(م(س))^{ن-١} \times م'(س)$

مثال ٨٦ : إذا كان $ق(س) = (س^{٢} - ٥س + ١)^{٤}$، جد $ق'(س)$

مثال ٨٧ : إذا كان $ق(س) = (س^{٢} - س)^{٣}$، جد $ق'(٢)$.

مثال ٨٨ : إذا كان $ق(س) = (٢س^{٣} + ٦)^{٣}$، جد $ق'(س)$.

مثال ٨٩ : إذا كان $ق(س) = (٢س^{٢} - ٦)^{٢}$، جد $ق'(٠)$.

مثال ٩٠ : إذا كان $ق(س) = (٣س^{٢} + ٥)^{\frac{١}{٢}}$، جد $ق'(٠)$.

مثال ٩١ : إذا كان $ص = (س^{٢} + ٤س + ٥)^{-٢}$، جد $\frac{دص}{دس}$

مثال ٩٢ : إذا كان $ق(س) = (٣س^{٢} + ٥)^{-٥}$، جد $\frac{دص}{دس}$

مثال ٩٣ : إذا كان $ق(س) = \sqrt[٣]{س^{٢}}$، جد $ق'(١)$.

مثال ٩٤ : إذا كان $ق(س) = \sqrt[٣]{٥س - ٦}$، جد $ق'(س)$.

مثال ٩٥ : إذا كان $ق(س) = \sqrt[٥]{(س^{٢} + ٢)^{٢}}$، جد $ق'(س)$.

مثال ٩٦ : إذا كان $ق(س) = \sqrt[٥]{(٢س - ١)^{٢}}$، جد $ق'(س)$

مثال ٩٧ : إذا كان $ق(س) = \frac{١}{\sqrt[٥]{(٣س^{٢} - ٣)^{٢}}}$، جد $ق'(س)$

قواعد الاشتقاق

القاعدة التاسعة: مشتقة الاقترانات الدائرية

- ق(س) =جاس ومشتقته ق′(س) =جتاس
- ق(س) =جتاس ومشتقته ق′(س) = –جاس
- ق(س) =ظاس ومشتقته ق′(س) =قا^{2}س

مثال٩٨ : جد المشتقة الأولى لكل من الاقترانات التالية:

١) ق(س) =جاس+جتاس–ظاس

٢) ص =٣جتاس–س

٣) ق(س) = سظاس + ٥

٤) ق(س) =جاسجتاس

٥) ص = $\frac{\text{ظاس}}{\text{س}^{٣}}$

٦) ق(س) = $\frac{٣}{\text{جتاس}}$

٧) هـ(س) = س^3+جاس–٢جتاس

مشتقة الاقترانات الدائرية (معادلة)

- ق(س) =جا **(المعادلة)**
  ق′(س) =جتا **(المعادلة)** × (مشتقة المعادلة)
- ق(س) =جتا **(المعادلة)**
  ق′(س) =–جا **(المعادلة)** × (مشتقة المعادلة)
- ق(س) =ظا **(المعادلة)**
  ق′(س) =قا^2 **(المعادلة)** × (مشتقة المعادلة)

مثال٩٩ : جد المشتقة الأولى لكل من الاقترانات التالية:

١) ق(س) =جتا٤س

٢) ص =جا٢س

٣) هـ(س) =ظا٥س

٤) هـ(س) = س^2 جا٣س

٥) ق(س) =ظا(٥س^2 – ١)

٦) م(س) =جا(٦–٣س^2)

قواعد الاشتقاق

مثال١٠٠ : جد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل من الاقترانات التالية:

١) $ق(س) = جا^٢ س$

٢) $ق(س) = جتا^٣ ٢س$

٣) $ق(س) = ظا^٥ (٣س)$

٤) $ق(س) = ظا^٣ (٥س^٢)$

٥) $ص = جا^٣ (٤س^٢)$

٦) $هـ(س) = س^٤ جتا^٣ س$

٧) $ص = جا^٢ س (١ - جتاس)$

مثال١٠١ : جد $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$

لكل من الاقترانات التالية:

١) $ق(س) = ٢جتا٤س + جا^٢ س - ظا(٥س + ١)$

٢) $ق(س) = \frac{جاس}{جتاس + ١}$

٣) $ق(س) = ٥س^٢ جتاس - ظاس$

٤) $ق(س) = س ظاس + (س^٢ + ١)^٢$

٥) $ق(س) = (جاس - جتاس)^{-٢}$

مجموعة أسئلة على الاشتقاق

مثال ١٠٢ : جد $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{3(\text{س} + \text{هـ})^{4} - 3\text{س}^{4}}{\text{هـ}}$

مثال ١٠٣ : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{3} + 2\text{س}$ ، جد $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{\text{ق}(2 + \text{هـ}) - \text{ق}(2)}{\text{هـ}}$

مثال ١٠٤ : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = 5\text{س}^{2} - \text{س}$ ، جد $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{\text{ق}(-3 + \text{هـ}) - \text{ق}(-3)}{\text{هـ}}$

مثال ١٠٥ : جد $\lim\limits_{\text{ع} \to \text{س}} \dfrac{\frac{3}{\text{ع}} - \frac{3}{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}}$

مثال ١٠٦ : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \left(2\text{س}^{3} - 6\right)^{3}$ ، جد $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$

مثال ١٠٧ : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{3}{\text{س}^{2}}$ ، جد $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{\text{ق}(-1 + \text{هـ}) - \text{ق}(-1)}{\text{هـ}}$

مثال ١٠٨ : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{3} + 8$ ، جد $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{\text{ق}(2 + \text{هـ}) - \text{ق}(2)}{\text{هـ}}$

مثال ١٠٩ : إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{جا}3\text{س}$ ، جد $\lim\limits_{\text{ع} \to \text{س}} \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

إيجاد الثوابت (المجاهيل)

إيجاد الثوابت: يمكن حساب قيمة الثوابت من خلال الاشتقاق أولاً، ثم تعويض قيمة (س = أ) ونساوي المقدار النهائي بالناتج.

مثال١١٠ : إذا كان ق(س) = س ^{٣} + أس – ١،
وكان ق$'$(٢) = ١٥، جد قيمة (أ).

مثال١١١ : إذا كان ق(س) = أس ^{٣} + ٣س ^{٢} – ٥ ،
وكان ق$'$(–١) = ١٥، جد قيمة (أ).

مثال١١٢ : إذا كان ق(س) = س ^{٣} + أس ^{٢} – س ،
وكان ق$'$(٢) = ١٦، جد قيمة (أ).

مثال١١٣ : إذا كان
ق(س) = ٣س ^{٢} – ٩س + س ^{٣} + ١٥
وكان ق$'$(ب) = ٠، جد قيمة الثابت (ب).

مثال١١٤ : إذا كان ق(س) = (٣ – س) ^{٤} ،
وكان ق$'$(س) = ٣٢ ، جد قيمة (س).

قاعدة السلسلة

القاعدة (١): قاعدة السلسلة

إذا كان ص = ق(ع) ، ع = هـ(س)، ص قابلاً للاشتقاق بالنسبة إلى (ع)، ع قابلاً للاشتقاق بالنسبة إلى (س)، فإن:

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$$

حيث:

- $\frac{دص}{دع}$: مشتقة الاقتران (ص) بدلالة (ع)
- $\frac{دع}{دس}$: مشتقة الاقتران (ع) بدلالة (س)

القاعدة (٢): قاعدة السلسلة

إذا كان ص = (هـ(س))^{ن}، ن عدداً حقيقياً، هـ اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فإن:

$$\frac{دص}{دس} = ن\,(هـ(س))^{ن-1} \times هـ'(س)$$

خطوات حل سؤال المشتقة بإستخدام قاعدة السلسلة

١) كتابة القانون العام.

٢) إيجاد مشتقة الاقتران الأول $\frac{دص}{دع}$

٣) إيجاد مشتقة الاقتران الثاني $\frac{دع}{دس}$

٤) ضرب المشتقتين معاً.

٥) تعويض قيمة (ع) **بالاقتران الأصلي.**

٦) المقدار النهائي يجب أن يكون بدلالة (س) فقط.

٧) إذا طلب في السؤال، جد $\frac{دص}{دس}$ عند (س = أ)

نعوض بدل (س) بقيمة (أ)، ثم ايجاد الناتج النهائي.

مثال١١٥ : إذا كانت ص = ع^{٢}، ع = ٣س ، جد $\frac{دص}{دس}$

مثال١١٦ : إذا كانت ص = ع^{٥}، ع = ٣س^{٢} – س ، جد $\frac{دص}{دس}$

مثال١١٧ : إذا كانت ص = ع^{٣}، ع = س^{٢} + ١ ، جد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=٢}$

مثال١١٨ : إذا كانت ص = ٢ع^{٤}، ع = $\sqrt{س}$ ، جد $\frac{دص}{دس}$

مثال١١٩ : إذا كانت ص = م^{٢} + ٣م – ٢، م = ٤س^{٢} ، جد $\frac{دص}{دس}$ ، عندما (س = ٢).

قاعدة السلسلة

مثال١٢٠ : إذا كانت ص $= ٢ع^{٣}$ ، ع $=$ جا٣س ، جد $\frac{دص}{دس}$

مثال١٢١ : إذا كانت ص $= ع^{٣} + ع$ ، ع $=$ س^{٢} $+ ١$ ،
جد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=١}$

مثال١٢٢ : إذا كانت ص $= \sqrt{ع}$ ، ع $=$ ٣س^{٢} $+ ٣$ ،
جد $\frac{دص}{دس}$

مثال١٢٣ : إذا كانت ص $= \frac{١}{ع}$ ، ع $=$ س^{٢} $+$ ٢س $+ ٤$ ،
جد $\frac{دص}{دس}$

مثال١٢٤ : إذا كانت ص $= ع^{٣} + ١$ ، ع $= ($٢س $- ١)^{٥}$ ،
جد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=١}$

مثال١٢٥ : إذا كانت ص $= ع^{٣}$ ، ع $= \frac{١}{س + ٢}$ ، جد $\frac{دص}{دس}$

مثال١٢٦ : إذا كانت ص $= \frac{ع}{ع - ١}$ ، ع $=$ ٢س $- ٢$ ،
جد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=٠}$

قاعدة السلسلة

مثال١٢٧ : إذا كانت $ص = \sqrt{ع + ١}$ ، $ع = ١ - ٢س$ ،
جد $\frac{دص}{دس}$ ، **حيث** $(ع \geq -١)$.

مثال١٢٨ : إذا كانت $ص = \sqrt{٢ع + ٥}$ ، $ع = ٤س^{٣} - ٩$ ،
جد $\frac{دص}{دس}$

مثال١٢٩ : إذا كانت $ص = ل^{٣}$ ، $ل = ٨س$ ، **جد** $\frac{دص}{دس}$
عندما $(س = \frac{١}{٤})$.

مثال١٣٠ : إذا كانت $ص = ٣م^{٣} - ٢م + ١$ ،
$م = ٢س + ٣$ ، **جد** $\frac{دص}{دس}$ ، **عندما** $(س = ٠)$.

يمكن حل الأمثلة التالية على استخدام القاعدة الثانية لقاعدة السلسلة

مثال١٣١ : جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

١) $ق(س) = \left(٣ + ٢س^{٢}\right)^{-٣}$

٢) $م(س) = \left(٤س + ١\right)^{٣}$

٣) $ص = \sqrt{٥ + ٣س^{٢}}$ ، $(س = ٠)$

٤) $ص = -٥\left(١ - ٣س^{٣}\right)^{-٢}$ ، $(س = -١)$

الوحدة الثالثة: تطبيقات التفـــــاضل لطـلاب التخصص الأدبـــي والفنـدقي

إعداد/ مروان ابوديه

التفسير الهندسي

المشتقة هندسياً تعني (الميل)، ويرمز لها بالرمز (م)

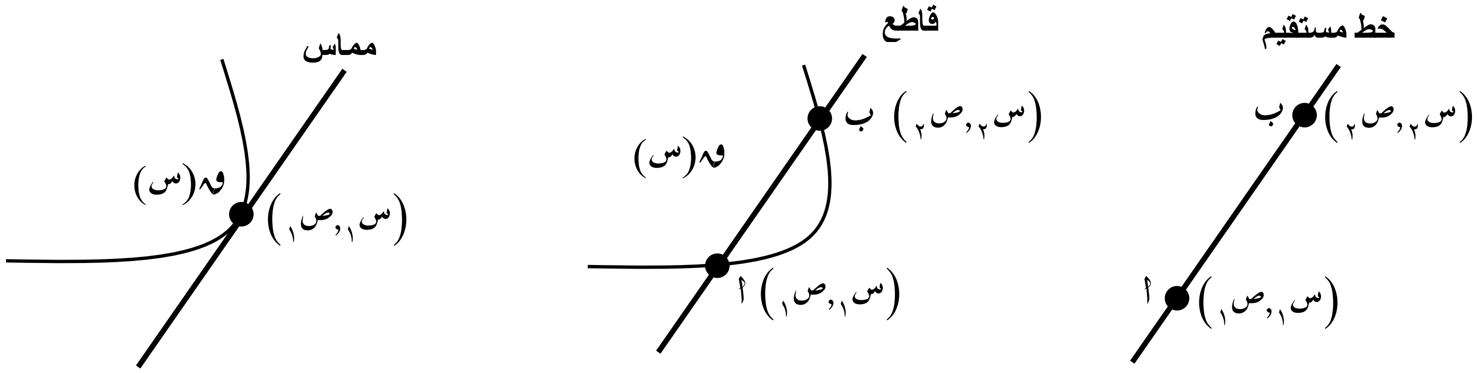
وهو ميل المماس لمنحنى $ق(س)$ عند $(س = أ)$

ويحسب على الشكل التالي: $م = ق'(أ)$

- **نجد المشتقة ونعوض قيمة** (س)

مسميات أخرى للميل

- **ميل الخط المستقيم**، نحتاج نقطتين $(س_1، ص_1)$،$(س_2، ص_2)$
- **ميل القاطع**، نحتاج نقطتين $(س_1، ص_1)$،$(س_2، ص_2)$
- **ميل المماس**، نحتاج قيمة **(س)** أو نقطة المماس $(س_1، ص_1)$



معادلة المماس (معادلة الخط المستقيم)

- **معادلة المماس هي:** $ص - ص_1 = م(س - س_1)$

خطوات إيجاد معادلة المماس (معادلة الخط المستقيم)

- **نحدد قيمة** **$(س_1)$**، وتعطى دائماً في السؤال **(هي نفسها س)**.
- **نجد قيمة** **$(ص_1)$**، من خلال تعويض **$(س_1)$** في الاقتران الأصلي.
وأحياناً تعطى **$(س_1، ص_1)$** في نص السؤال على شكل نقطة.
- **نجد مشتقة الاقتران**، ثم نعوض فيها قيمة **$(س_1)$**.
- **نكتب معادلة المماس**، ونستبدل **$(ص_1، س_1، م)$**، بالقيم الجديدة.

أنواع الأسئلة

١ ← [جد الميل]
نشتق الاقتران ونعوض قيمة س

٢ ← [جد الثابت]
نشتق الاقتران ونجد قيمة الثابت من خلال حل المعادلة

٣ ← [رسم]
٤ ← [جد الميل وذكر نقطتين]

نستخدم القانون التالي إذا ذكر قيمة الصادات

$$م = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

نستخدم القانون التالي إذا لم يذكر قيمة الصادات

$$م = \frac{\Delta ق(س)}{\Delta س} = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$$

٥ ← [جد معادلة المماس]

- $ص_1 = ق(س_1)$
- $م = ق'(س_1)$

نعوض جميع القيم بالمعادلة التالية

$$ص - ص_1 = م(س - س_1)$$

ملاحظة: (معدل التغير = الميل = ميل القاطع = ميل المماس)

التفسير الهندسي

مثال ١ : جد ميل المماس لمنحنى الاقتران

$ق(س) = س^{٣} - ٣س + ١$، عند (س = ٢)

مثال ٢ : إذا ق(س) = $س^{٢} - ٣س$،

فجد ميل المماس لمنحنى الاقتران (ق) عند النقطة (٢، −٢)

مثال ٣ : جد ميل المماس لمنحنى الاقتران

$ق(س) = -٣س + ٧$، عند (س = ٨)

مثال ٤ : جد ميل المماس لمنحنى الاقتران

$ق(س) = \frac{-س}{٥} + ٦$، عند (س = ٠)

مثال ٥ : جد ميل المماس لمنحنى الاقتران

$ق(س) = \frac{٢}{س} + ٣س^{٢}$، عند (س = −١)

مثال ٦ : جد ميل المماس لمنحنى الاقتران

$ق(س) = (٢س^{٢} - ٣)^{٣}$، عند (س = ١)

مثال ٧ : ما ميل المماس لمنحنى الاقتران

$ق(س) = \frac{س + ٣}{٢س + ١}$، عند (س = −٢)

مثال ٨ : جد ميل المماس لمنحنى الاقتران

$ق(س) = (٢س^{٢} - ١)(٤س + ٥)$، عند (س = −١)

مثال ٩ : جد ميل المماس لمنحنى الاقتران

$ق(س) = \sqrt[٣]{٤س}$، عند (س = −٢)

مثال ١٠ : ما ميل المماس لمنحنى الاقتران

$ق(س) = \frac{٢س - س^{٢}}{٦}$، عند (س = ٢)

مثال ١١ : إذا ق(س) = $س^{٥} + ٤س^{٢}$،

فجد ميل المماس للاقتران (ق) عندما (س = ١)

التفسير الهندسي

مثال١٢ : ما قيمة (س) التي تجعل ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} − ٦س + ١ يساوي (٢).

مثال١٣ : إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٣} − ٢أس^{٢} + ٥س + ١ عند النقطة (س = ٢) يساوي ١، جد قيمة الثابت (أ)

مثال١٤ : إذا كان ق(س) = (٣س − ٤)^{٣}، فجد قيمة (س) التي تجعل ق′(س) = ٣٦

مثال١٥ : جد قيمة / قيم (س) التي تجعل ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{١}{٣}$س^{٣} − ٢س^{٢} + ٤س يساوي (صفر)

مثال١٦ : جد قيم (س) التي تجعل ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} + ٩ يساوي (صفر)

مثال١٧ : إذا كان ميل المماس للاقتران ص = (٢ − س)^{٤} عند النقطة (س$_{١}$، ص$_{١}$)، يساوي (٤)، فجد قيمة (س$_{١}$)

مثال١٨ : إذا كان ق(س) = أس^{٢} + ٤س − ٣، حيث (أ) ثابت، وكان ميل المنحنى عندما (س = ٣) يساوي (٢٢)، فجد قيمة الثابت (أ).

التفسير الهندسي

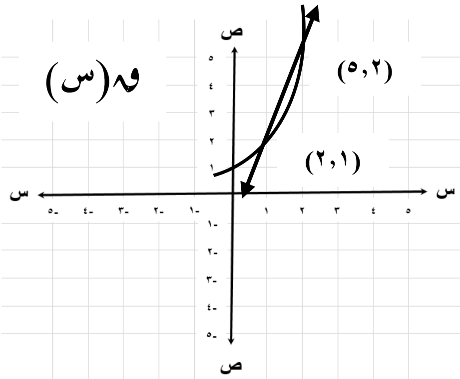
مثال ١٩ : إذا كان $ق(س) = ٢س^{٢}$ ،
جد ميل القاطع المار بالنقطتين (١،٢)، (٣،١٨)

مثال ٢٠ : إذا كان $ق(س) = س^{٢} + ٢س$ ، جد ميل القاطع
لمنحنى الاقتران ق(س) والمار بالنقطتين (١،٣)، (٤،٢٤)

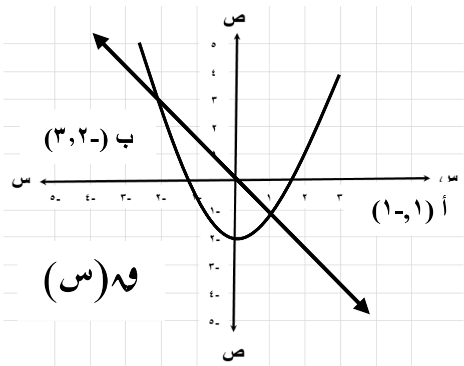
مثال ٢١ : إذا كان $ق(س) = ٣س$ ،
جد ميل القاطع المار بالنقطتين (٠،ق(٠))، (٣،ق(٣))

مثال ٢٢ : إذا كان $ق(س) = س + س^{٢}$ ، جد الميل لمنحنى
الاقتران ق(س) والمار بالنقطتين (٢،ق(٢))، (٣،ق(٣))

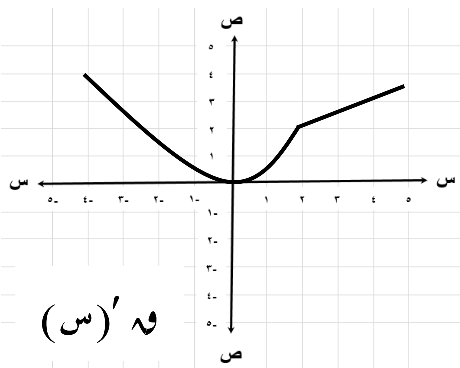
مثال ٢٣ : معتمداً الشكل المجاور، ما معدل التغير للاقتران
ق(س) في الفترة [١،٢].



مثال ٢٤ : معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران
ق(س)، ما ميل القاطع المار بالنقطتين (أ،ب) ؟



مثال ٢٥ : معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى
للاقتران ق(س) جد ميل المماس المرسوم لمنحنى الاقتران
ق(س)، عندما (س = ٥)



التفسير الهندسي

مثال٢٦ : جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران
$ق(س) = س^{٢} + س$ ، عند $(س = ٣)$

مثال٢٧ : جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران
$ق(س) = ٣س + ٥$ ، عند $(س = ٢)$

مثال٢٨ : جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران
$ق(س) = س^{٣} - ٢$ ، عند $(س = ٢)$

مثال٢٩ : جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران
$ق(س) = (٢س - ١)^{٣}$ ، عند $(س = ١)$

التفسير الهندسي

مثال ٣٠ : ما معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$ق(س) = (س + ٣)(٢ - س^{٢})$ ، عند $(س = -١)$

مثال ٣١ : جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$ق(س) = \sqrt{٢س + ١}$ ، عند $(س = ٤)$

مثال ٣٢ : ما معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$ق(س) = \frac{٦}{س^{٢} + ١}$ ، عند $(س = -١)$

مثال ٣٣ : جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$ق(س) = \sqrt[٣]{س}$ ، عند $(س = -١)$

التفسير الهندسي

مثال ٣٤ : جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$ق(س) = س(٣س - ١)^{٢}$ ، عند $(س = ١)$

مثال ٣٥ : ما معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$ق(س) = (٢س - ٤)(س^{٢} + ١)$، عند $(س = ٠)$

مثال ٣٦ : ما معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$ق(س) = \frac{٢س + ٢}{س^{٢} + ١}$ ، عند $(س = ١)$

مثال ٣٧ : إذا كان $ق(س) = (٣س^{٢} - ٢)^{٤}$ ، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $(ق)$ عند النقطة $(-١، ق(-١))$

التفسير الهندسي

مثال ٣٨ : أوجد معادلة المماس المرسوم لمنحنى ص = ق(س) عند نقطة التماس (٢،٥)، حيث ق′(٢) = ٤.

مثال ٣٩ : إذا كانت معادلة المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند نقطة (–٣،١) هي ٢س + ص = ٩، فما قيمة ق′(–٣).

مثال ٤٠ : إذا كانت معادلة المماس المرسوم لمنحنى ق(س) عند نقطة (٣،٨) هي ٢ص – س = ١٣، جد ق′(٣).

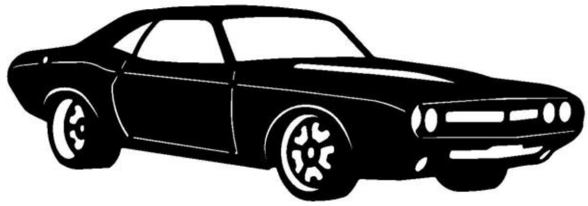
مثال ٤١ : إذا كانت معادلة المماس للاقتران ق(س)، عند النقطة (٢،٣) هي ٢س + ٦ص – ٢٢ = ٠
جد ميل المماس.

مثال ٤٢ : أوجد معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران ص = ق(س) = س^{٢} – ٣س + ٥، عند نقطة تقاطعه مع محور الصادات.

مثال ٤٣ : أوجد معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران ص = ق(س) = س^{٣} – ٢٧، عند نقطة تقاطعه مع محور السينات.

مثال ٤٤ : إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٦س ،
فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران (ق) عند النقطة (١،٧).

التفسير الفيزيائي



عند حركة أي جسيم في الطبيعة يتولد منه ثلاث اقترانات مهمة، وهي:

- **المسافة** ف(ن)، وتقاس بوحدة المتر (م)
- **السرعة** ع(ن)، وتقاس بوحدة المتر/ الثانية (م / ث)
- **التسارع** ت(ن)، وتقاس بوحدة المتر/ الثانية ^{2} (م / ث^{2})

حيث (ن) يمثل الزمن، ويقاس بوحدة الثانية.

سلوك المشتقة فيزيائياً يتلخص بـ **(مسافة، سرعة، تسارع)**
حيث أن **المسافة** معلومة بنص السؤال ويرمز بـ ف(ن)

يكون الاشتقاق بدلالة (ن)

ويمكن الحصول على السرعة والتسارع من اشتقاق المسافة

- **السرعة اللحظية = مشتقة المسافة** ع(ن) = ف′(ن)
- **التسارع اللحظي = مشتقة السرعة** ت(ن) = ع′(ن)

معلومات مهمة تفيد في حل الأسئلة

- انعدام التسارع ت(ن) = ٠
- انعدام السرعة ع(ن) = ٠
- وصول الجسيم لأقصى ارتفاع ع(ن) = ٠
- المسافة، السرعة، التسارع | الابتدائي (ن = ٠)
- التسارع = ٨ م/ث^{2} ت(ن) = ٨
- السرعة = ١٣ م/ث ع(ن) = ١٣

المسافة (م) | المسافة دائماً موجبة، لا يوجد مسافة سالبة

السرعة (م/ث) | السرعة الموجبة (الجسيم يسير إلى الأمام/ الأعلى)
| السرعة السالبة (الجسيم يسير إلى الخلف/ الأسفل)

التسارع (م/ث^{2}) | التسارع الموجب (الجسيم في حالة تسارع)
| التسارع السالب (الجسيم في حالة تباطؤ)

الزمن (ث) | الزمن دائماً موجبة، لا يوجد زمن سالب

هام جداً قبل حل السؤال على التفسير الفيزيائي

يجب تحديد الاقترانات الثلاثة قبل حل السؤال (صندوق ف ع ت)

ف(ن) ع(ن) ت(ن)

نستخدم القانون $\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_{2}) - ف(ن_{1})}{ن_{2} - ن_{1}}$
ونعوض الزمن الأول والثاني للحصول على النتيجة

أنواع الأسئلة

1. حدد زمن واحد ← تعويض الزمن (ن) في الاقتران المناسب
2. لم يحدد في السؤال الزمن ← نحدد الزمن (ن) من خلال المعطيات نجد المطلوب بتعويض الزمن (ن)
3. حدد زمن واحد وطلب جد الثابت ← نعوض الزمن (ن) في الاقتران المناسب ثم نجد الثابت من خلال حل المعادلة
4. حدد زمنين (ن١ ، ن٢) وطلب السرعة المتوسطة ← نستخدم القانون

التفسير الفيزيائي

مثال ٤٥ : يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة التالية:

$$ف(ن) = ن^{٣} + ن^{٢} - ٣$$

حيث (ف) المسافة بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني،
جد سرعة وتسارع الجسيم بعد مرور (٢) ثانية من بدء الحركة.

مثال ٤٦ : يتحرك جسيم حسب العلاقة التالية:

$$ف(ن) = ن^{٣} - ٣ن^{٢} + ١٥ن$$

حيث (ف) المسافة بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني، جد ما يلي:

أ) المسافة المقطوعة بعد مرور (٣) ثواني.
ب) التسارع الإبتدائي.
ج) على ماذا تدل ناتج التسارع.

مثال ٤٧ : يتحرك جسيم مبتعداً عن نقطة الأصل وفق العلاقة التالية:

$$ف(ن) = ٢ن^{٣} - ٣ن^{٢} + ١٢$$

حيث (ف) المسافة بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني، جد ما يلي:

أ) المسافة المقطوعة بعد مرور (نصف ثانية).
ب) التسارع بعد مرور (نصف دقيقة).

مثال ٤٨ : انطلق صاروخ العاب نارية إلى السماء مبتعداً عن سطح الأرض حسب العلاقة التالية: $ف(ن) = \left(٣ن^{٢} - ٣\right)^{٢}$

حيث (ف) المسافة بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني،
جد تسارع الصاروخ بعد مرور (١) ثانية.

التفسير الفيزيائي

مثال٤٩ : يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة التالية:

$$ف(ن) = ن^{٣} - ٣ن^{٢} + ١٥ن$$

حيث (ف) المسافة بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني،

جد سرعة الجسيم لحظة انعدام التسارع.

مثال٥٠ : يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة التالية:

$$ف(ن) = ن^{٣} - ١٢ن + ٨$$

حيث (ف) المسافة بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني،

جد تسارع هذا الجسيم لحظة انعدام السرعة.

مثال٥١ : يتحرك جسيم وفق العلاقة:

$$ف(ن) = ن^{٣} + ٢ن^{٢} - ٥$$

حيث (ف) المسافة بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني،

جد سرعة هذا الجسيم عندما يصبح تسارعه (١٦) م/ث^{٢}.

مثال٥٢ : تتحرك سيارة وفق المعادله التالية:

$$ف(ن) = ن^{٣} - ٥ن + ١١$$

حيث (ف) المسافة بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني،

جد تسارع الجسيم عندما تصبح سرعته (٢٢) م/ث.

التفسير الفيزيائي

مثال٥٣ : انطلق جسيم إلى الأعلى وفق العلاقة:

$$ف(ن) = ن^{٢} - ن + ٨$$

حيث (ف) المسافة بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني،
جد تسارع هذا الجسيم عندما يصل لأقصى إرتفاع.

مثال٥٤ : تتحرك دراجة هوائية وفق المعادلة التالية:

$$ف(ن) = \frac{ن^{٣}}{٣} - ن^{٢} - ن + ٩$$

حيث (ف) المسافة بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني،
احسب تسارع الدراجة عندما تكون سرعتها (٢) م/ث.

مثال٥٥ : يتحرك جسيم وفق العلاقة:

$$ف(ن) = ن^{٣} - ن^{٢} - ٥ن - ٤ ،\ (ن \geq ١)$$

حيث (ف) المسافة بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني،
جد الزمن لحظة انعدام السرعة.

مثال٥٦ : إذا كان $ف(ن) = ن^{٣} - ٩ن^{٢} + ١٥ن ،\ (ن > ١)$
هو اقتران المسافة التي يقطعها الجسيم، حيث (ف) المسافة بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني،
جد تسارع الجسيم في لحظة انعدام السرعة.

التفسير الفيزيائي

مثال٥٧ : إذا كان ف$(ن) = \frac{1}{3}ن^3 - 3ن^2 + 5$، $(ن \geq 0)$
هو اقتران المسافة التي تقطعها السيارة، حيث (ف) المسافة بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني،
جد تسارع السيارة عندما تنعدم السرعة.

مثال٥٨ : يتحرك جسيم وفقاً للعلاقة التالية:
ف$(ن) = 3ن^2 - 2ن^3$، حيث (ف) المسافة بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني، احسب سرعة الجسيم عندما ينعدم التسارع.

مثال٥٩ : إذا كان ف$(ن) = \frac{1}{3}ن^3 - \frac{5}{2}ن^2 + 6ن + 5$
اقتران المسافة لجسيم، حيث (ف) المسافة بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني، جد بعد الجسيم عن نقطة الأصل عندما تنعدم السرعة.

مثال٦٠ : إذا كان ف$(ن) = ن^3 - 9ن^2 + 15ن$، $(ن > 1)$
هو اقتران المسافة التي يقطعها الجسيم، حيث (ف) المسافة بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني، جد تسارع الجسيم في لحظة انعدام السرعة.

السرعة المتوسطة

مثال٦١: يتحرك جسيم حسب العلاقة التالية: ف(ن) = ٣ن^{٢} ،
حيث (ن) الزمن بالثواني، (ف) المسافة بالأمتار،
احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [١،٣].

مثال٦٢: يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقاً للاقتران التالي:
ف(ن) = ٤ن^{٢} + ٢ن ، حيث (ف) المسافة المقطوعة بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني،
جد السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [١،٢].

مثال٦٣: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسيم أثناء سقوطه إلى أسفل تعطى بالعلاقة: ف(ن) = ١٠ن – ن^{٢} ،
حيث (ف) المسافة المقطوعة بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني،
جد السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [١،٤].

مثال٦٤: يتحرك جسيم حسب العلاقة التالية:
ف(ن) = ن^{٣} + ١،
حيث (ف) المسافة بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني،
جد السرعة المتوسطة لهذا الجسيم في الفترة الزمنية [١،٣].

مثال٦٥: يتحرك جسيم حسب العلاقة: ف(ن) = ن^{٢} + ٢ن
حيث (ف) المسافة بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني، جد سرعة الجسيم المتوسطة عندما تتغير (ن) من (٠) إلى (٣).

مثال٦٦: يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقاً للاقتران:
ف(ن) = ٦ – ١ن^{٢} + ٢ن ،
حيث (ف) المسافة المقطوعة بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني،
جد السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [٢،٣].

إيجاد الثوابت (المجاهيل)

مثال٦٧ : يتحرك جسيم وفق المعادلة التالية:

$ف(ن) = ن^{٣} - أن^{٢} - ٥$ ،

حيث (ف) المسافة بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني،

أوجد قيمة (أ) التي تجعل تسارع الجسيم يساوي (٣٠) م/ث^{٢}،

بعد مرور (٣) ثواني من بدء الحركة.

مثال٦٨ : يتحرك جسيم وفق المعادلة التالية:

$ف(ن) = أن^{٣} - ٣ن^{٢} + ٢$ ،

حيث (ف) المسافة بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني،

أوجد قيمة (أ) التي تجعل تسارع الجسيم يساوي (١٨) م/ث^{٢}،

بعد مرور ثانية من بدء الحركة.

مثال٦٩ : يتحرك جسيم وفق العلاقة: $ف(ن) = أن^{٢} - ن^{٣}$ ،

حيث (ف) المسافة بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني، إذا كانت سرعة الجسيم المقطوعة بعد ثانتين من بدء الحركة تساوي (٢٤) م/ث، فجد قيمة الثابت (أ).

مثال٧٠ : يتحرك جسيم وفق العلاقة: $ف(ن) = أ(٢ن - ١)^{٢}$ ،

حيث (ف) المسافة بالأمتار، (ن) الزمن بالثواني،

أوجد قيمة (أ) التي تجعل من سرعة الجسيم بعد مرور (٣) ثواني تساوي (٣٦) م/ث.

القيم الحرجة والتزايد والتناقص والقيم القصوى

من أهم التطبيقات على التفاضل هو **اختبار المشتقات** والتي تستخدم في العديد من التطبيقات الفيزيائية والهندسية والاقتصادية، حيث تعطي هذه الاختبارات دلالات واضحة لطبيعة وسلوك الاقتران من حيث التزايد والتناقص والقيم القصوى.

وقد يتغير سلوك الاقتران من حيث التزايد والتناقص عند نقاط محددة وتسمى بـ **النقاط الحرجة.**

- ✓ **القيمة الحرجة هي القيمة التي تفصل بين التزايد والتناقص.**
- ✓ **القيمة الحرجة هي التي تحدد القيم العظمى والصغرى (القيم المحلية القصوى).**

القيم الحرجة: هي اصفار المشتقة الأولى، أي هي القيم التي تجعل من المشتقة **تساوي صفر.**

تعريف النقاط الحرجة

يطلق على الأعداد (جـ) الواقعة في مجال الاقتران ق(س)، التي يكون عندها ق′(جـ) = ٠، اسم **النقاط الحرجة** للاقتران ق(س)، وتسمى النقط (جـ،ق(جـ)) الواقعة على منحنى الاقتران ق(س) نقطاً حرجةً.

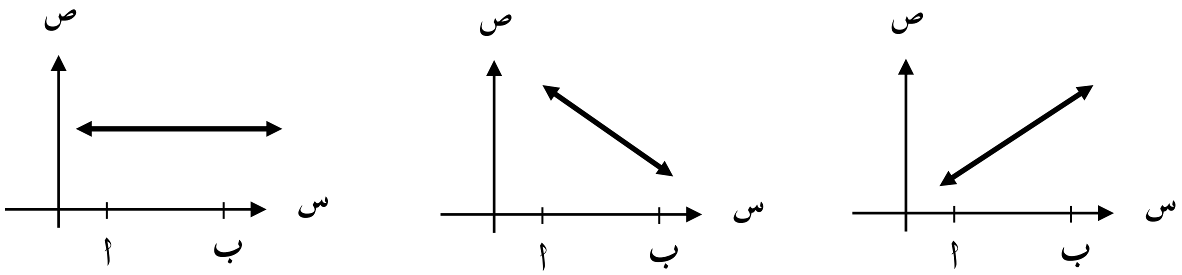
تعريف التزايد والتناقص

إذا كان الاقتران ق(س) معرفاً على الفترة [أ،ب]، وكان س$_1$،س$_2$ ∈ [أ،ب]، فإن:

١) الاقتران ق(س) يكون **متزايداً** في الفترة [أ،ب] إذا كان ق(ب) > ق(أ) عندما (ب > أ)

٢) الاقتران ق(س) يكون **متناقصاً** في الفترة [أ،ب] إذا كان ق(ب) < ق(أ) عندما (ب > أ)

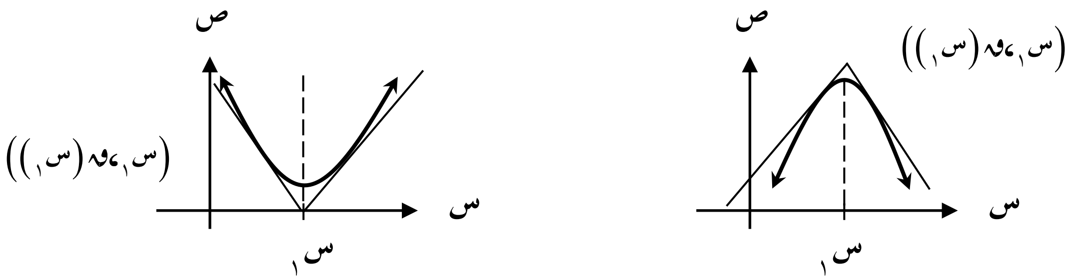
٣) الاقتران ق(س) يكون **ثابتاً** في الفترة [أ،ب] إذا كان ق(ب) = ق(أ) عندما (ب = أ)



تعريف القيم المحلية القصوى

١) يكون للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية، عندما (س$_1$ =جـ)، حيث إن ق(جـ) > ق(س)، وتكون القيمة العظمى هي ق(جـ)

٢) يكون للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية، عندما (س$_1$ =جـ)، حيث إن ق(جـ) < ق(س)، وتكون القيمة الصغرى هي ق(جـ)



القيم الحرجة

مثال ٧١ : جد القيم الحرجة للاقتران ق(س) = ٢س^{٢} – ٨س + ١

مثال ٧٢ : جد القيم الحرجة للاقتران ق(س) = س^{٣} – ١٢ س

مثال ٧٣ : جد النقاط الحرجة لـ ق(س) = س^{٣} – ٦س^{٢} + ٨

مثال ٧٤ : جد القيم الحرجة للاقتران ق(س) = (٣س – ٦)^{٦}

مثال ٧٥ : جد القيم الحرجة للاقتران ق(س) = ٩س – ٧

مثال ٧٦ : إذا كان للاقتران ق(س) = س^{٢} + أس + ٧، قيم حرجة عند (س = ٣)، جد (أ).

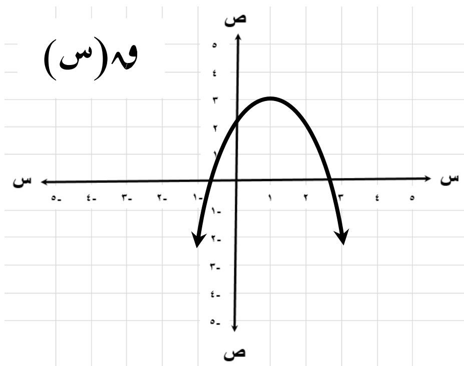
مثال ٧٧ : إذا كان للاقتران ق(س) = أس^{٢} + ١٢ س، قيم حرجة عند (س = ٢)، جد (أ).

مثال ٧٨ : إذا كان للاقتران ق(س) = أس^{٢} – أس – ٦، قيم حرجة عند (س = ١)، جد (أ).

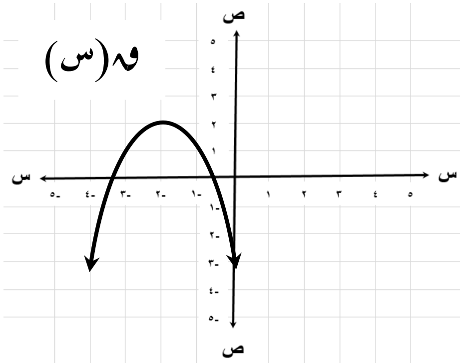
مثال ٧٩ : إذا كان للاقتران ق(س) = ب س^{٢} – ٤س + ١، قيمة حرجة عند النقطة (٣،٨)، فما قيمة الثابت (ب)

القيم الحرجة

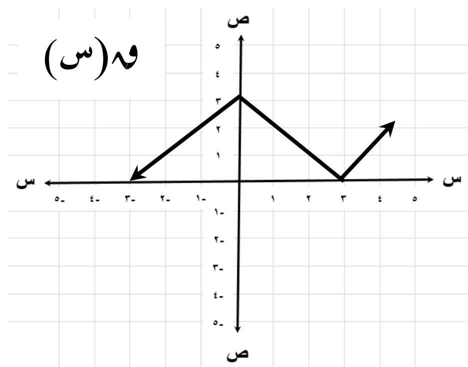
مثال ٨٠ : معتمـداً الشكل الذي يمثل الاقتران ق(س)، جد النقاط الحرجة.



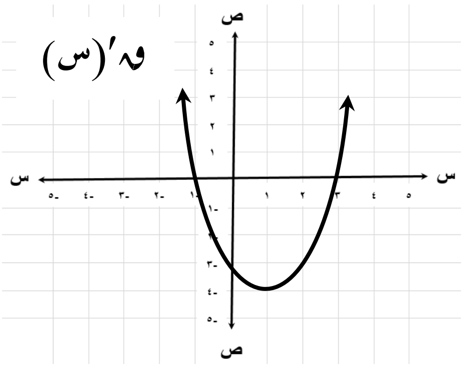
مثال ٨١ : معتمـداً الشكل الذي يمثل الاقتران ق(س)، جد النقاط الحرجة.



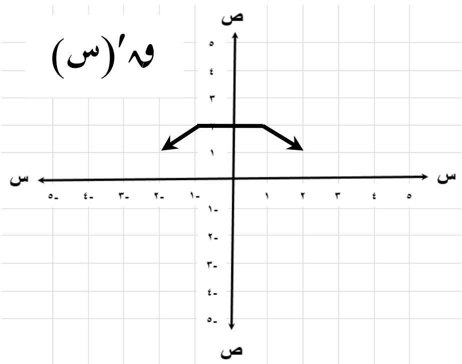
مثال ٨٢ : معتمـداً الشكل الذي يمثل الاقتران ق(س)، جد النقاط الحرجة.



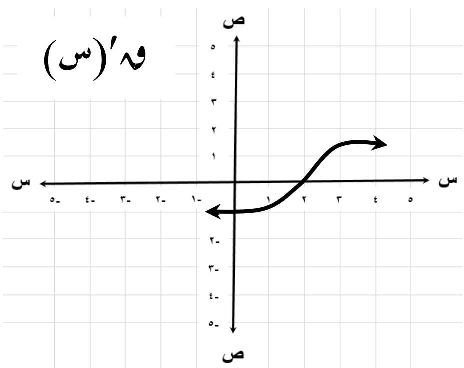
مثال ٨٣ : معتمـداً الشكـل الـذي يمثـل منحـى المشـتقة الأولـى للاقتران ق(س)، جد النقاط الحرجة.



مثال ٨٤ : معتمـداً الشكـل الـذي يمثـل منـحـى الاقـتران ق′(س) المعرف على الفترة [−٢،٢]، جد النقاط الحرجة.



مثال ٨٥ : اعتمـاداً على الشكـل الـذي يمثل منـحـى الاقـتران ق′(س) في الفترة [−١،٥]، جد النقاط الحرجة.



التزايد والتناقص

مثال٨٦ : حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$ق(س) = س^{٢} - ٤س + ١$

مثال٨٧ : حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$ق(س) = (٢س - ٤)^{٢}$

مثال٨٨ : حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$ق(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ١$

مثال٨٩ : حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران

$ق'(س) = س^{٢} - س - ٦$

التزايد والتناقص

مثال ٩٠ : إذا كان ق(س) = س(١٢ – س ^٢^)،
فجد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س).

مثال ٩١ : جد فترات التزايد والتناقص للاقتران
$ق(س) = ١٦س - \frac{س^٣}{٣}$

مثال ٩٢ : ليكن $ق(س) = \frac{١}{٢}س^٢ - ٢س + ٤$،
فجد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س).

مثال ٩٣: ليكن $ق(س) = \frac{١}{٣}س^٣ - \frac{١}{٢}س^٢ - ١٢س + ١٠$،
فجد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س).

التزايد والتناقص

مثال ٩٤ : إذا كان ق(س) = ٣س – ٨ ،
فجد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س).

مثال ٩٥ : إذا كان ق(س) = ٣ – ٤س ،
فجد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س).

مثال ٩٦ : جد فترات التزايد والتناقص للاقتران
ق(س) = ٢س^{٣} + ٣س

مثال ٩٧ : ليكن ق(س) = $\frac{١}{٣}$س^{٣} – ٢س^{٢} + ٤س + ٩ ،
جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س).

مثال ٩٨ : ليكن ق′(س) = (س + ٢)(س + ٣) ،
جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س).

حاول حل السؤال لو كان ق(س) = (س + ٢)(س + ٣)

القيم القصوى

مثال٩٩ : إذا كان الاقتران $ق(س) = ٣س^{٢} - ١٢س + ٦$،
جد القيم القصوى للاقتران $ق(س)$.

مثال١٠٠ : إذا كان الاقتران $ق(س) = س^{٣} - ١٢س + ٣$،
جد القيم المحلية القصوى (إن وجدت).

مثال١٠١ : إذا كان الاقتران $ق(س) = ٢س\left(١٢ - ٣س^{٢}\right)$،
جد القيم القصوى للاقتران $ق(س)$، محدداً نوعها.

مثال١٠٢ : إذا كان الاقتران $ق(س) = ٤س^{٣} - ٦س^{٢} + ٢$،
جد القيم القصوى المحلية للاقتران $ق(س)$.

القيم القصوى

مثال١٠٣ : إذا كان $ق(س) = ٩س^{٢} - س^{٣} + ٨$،
جد (س) التي يكون عندها قيمة عظمى أو صغرى وحدد نوعها.

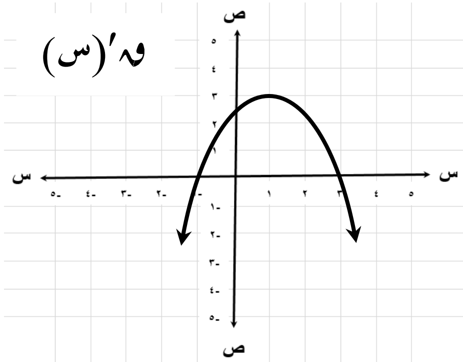
مثال١٠٤ : إذا كان الاقتران $ق(س) = س(س^{٢} - ٣)$،
جد القيم المحلية القصوى للاقتران ق(س).

مثال١٠٥ : ليكن $ق(س) = \frac{١}{٢}س^{٢} - ٢س - ٩$،
فجد القيم العظمى والصغرى (إن وجدت).

مثال١٠٦ : ليكن $ق(س) = \frac{١}{٣}س^{٣} - \frac{١}{٢}س^{٢} - ٢س + ٧$،
فجد القيم العظمى والصغرى (إن وجدت).

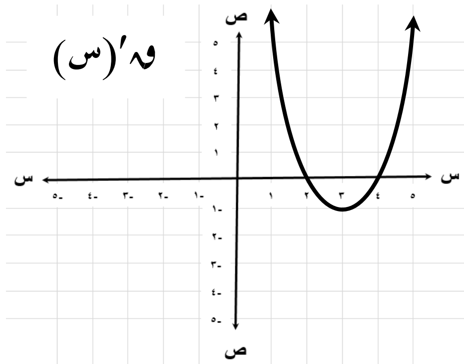
القيم القصوى

مثال١٠٧ : معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران ق′(س)، جد القيم القصوى.

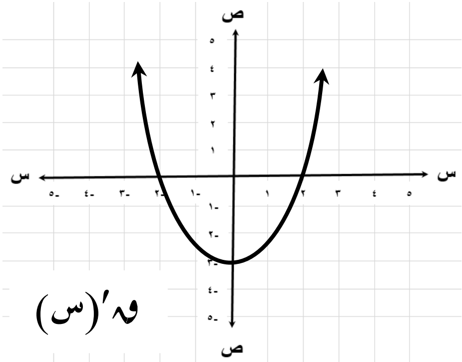


مثال١٠٨ : معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى المشتقة الاولى للاقتران ق(س)، جد كلاً من:

١) قيم (س) التي يكون عندها قيمة قصوى للاقتران ق(س).
٢) القيم القصوى، محدداً

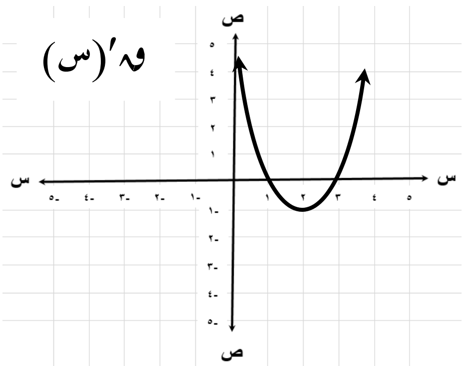


مثال١٠٩ : معتمداً الشكل يمثل منحى المشتقة الأولى للاقتران ق(س)، جد القيم القصوى.



مثال١١٠ : معتمداً على الشكل الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق(س)، جد كلاً من:

١) قيم (س) التي يكون عندها قيمة قصوى للاقتران ق(س).
٢) القيم القصوى، محدداً.

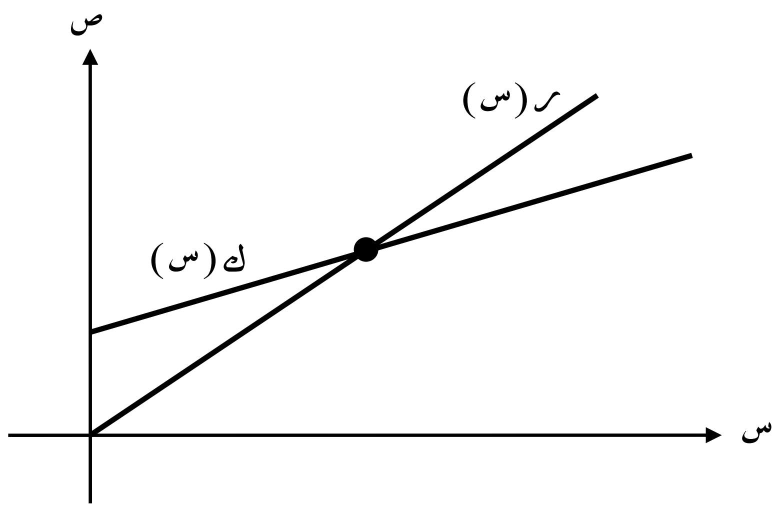


التطبيقات الاقتصادية

التطبيقات الاقتصادية تتلخص في **(الايرادات، التكاليف، الربح)**، واليك أهم المعادلات المستخدمة في **التطبيقات الاقتصادية:**

الإيرادات الكلية $د(س)$	الربح الكلي $ر(س)$	التكاليف الكلية $ك(س)$
$د(س) = ر(س) + ك(س)$	$ر(س) = د(س) - ك(س)$	$ك(س) = د(س) - ر(س)$
قانون لحساب الايراد الكلي	**قانون لحساب الربح الكلي**	**قانون لحساب التكاليف الكلية**
$د(س) =$ س $\times$ سعر البيع	$ر(س) =$ س $\times$ مقدار الربح	$ك(س) =$ س $\times$ سعر التكلفة
الإيراد الحدي $د'(س)$	الربح الحدي $ر'(س)$	التكاليف الحدية $ك'(س)$
الإيراد عند لحظة معينة	**الربح عند لحظة معينة**	**التكاليف عند لحظة معينة**

- حيث تمثل عدد الوحدات



طبيعة الأسئلة

✓ إذا طلب في السؤال التكلفة الحدية عندما $(س = أ)$

نشتق اقتران التكلفة ونعوض بقيمة $(أ)$

$ك'(أ) =$

✓ إذا طلب في السؤال الإيراد الحدي عندما $(س = أ)$

نشتق اقتران الإيراد ونعوض بقيمة $(أ)$

$د'(أ) =$

✓ إذا طلب في السؤال الربح الحدي عندما $(س = أ)$

نشتق اقتران الربح ونعوض بقيمة $(أ)$

$ر'(أ) =$

✓ إذا طلب في السؤال عدد السلع $(س)$ التي تحقق أعلى ربح

نحسب الربح $ر(س)$

نشتق الربح $ر'(س)$

نساوي الناتج بالصفر $ر'(س) = ٠$

نجد قيمة $(س)$ من خلال حل المعادلة

✓ إذا طلب في السؤال عدد السلع $(س)$ التي تحقق أدنى تكاليف

نحسب التكاليف $ك(س)$

نشتق التكاليف $ك'(س)$

نساوي الناتج بالصفر $ك'(س) = ٠$

نجد قيمة $(س)$ من خلال حل المعادلة

التطبيقات الاقتصادية

مثال١١١ : إذا كان اقتران التكلفة الكلية لإنتاج (س) وحدة من منتج ما، يعطى بالعلاقة: ك(س) = ١٠٠ – ٦س + س^{٢}،
جد التكلفة الحدية عندما (س = ٥).

مثال١١٢ : إذا كان ك(س) = ٤٠ + ٣س^{٢} دينار،
اقتران التكلفة الكلية لإنتاج (س) من قطعة من سلعة ما،
فجد التكلفة الحدية لإنتاج (٢٠) قطعة من هذه السلعة.

مثال١١٣ : إذا كان اقتران الإيراد الكلي لبيع (س) قطعة من منتج ما، يعطى بالعلاقة: د(س) = ٢٠س + ٣س^{٢}،
جد الإيراد الحدي عندما (س = ١٠).

مثال١١٤ : إذا كان مصنع يبيع الجهاز الواحد بسعر (٢٠٠) دينار، فجد الإيراد الكلي لبيع (س) من الأجهزة.

مثال١١٥ : إذا كان (س) عدد الوحدات المنتجة، حيث يتم بيع الوحدة بـ (٤٠) دينار، جد الإيراد الحدي لبيع (٨) وحدات.

مثال١١٦ : إذا كان اقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو:
د(س) = ١٠س – س^{٣} دينار، واقتران التكلفة الكلية هو:
ك(س) = ٥٠ + ٢س دينار، حيث (س) عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما، فجد الربح الحدي.

مثال١١٧ : إذا كان اقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو:
د(س) = ٢س + س^{٢} دينار، واقتران التكلفة الكلية هو:
ك(س) = ٣٦ – ٥س دينار، جد الربح الحدي عندما (س = ١٠).

مثال١١٨ : يبيع أحد المصانع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بمبلغ (٩٠) ديناراً، فإذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج (س) وحدة من هذه السلعة أسبوعياً تعطى بالعلاقة:
ك(س) = ٠.٢س^{٢} + ٧٠س + ١٠٠ دينار،
جد الربح الحدي.

التطبيقات الاقتصادية

مثال ١١٩ : إذا كان اقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو:
$ء(س) = ٨٠س + س^{٢}$ دينار، واقتران التكلفة الكلية هو:
$ك(س) = ٤٠ + ٦٠ ١س$ دينار، حيث (س) عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما، فجد الربح الحدي.

مثال ١٢٠ : يبيع أحد المصانع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بمبلغ (١٠٠) ديناراً، فإذا كانت التكلفة الكلية بالدنانير لإنتاج (س) وحدة من هذه السلعة أسبوعياً تعطى بالعلاقة:
$ك(س) = ٠.٠٣س^{٢} + ٤٠س + ٧٠$ دينار،
جد الربح الحدي.

مثال ١٢١ : إذا كان اقتران التكاليف الكلية هو:
$ك(س) = ٠.٠٤س^{٢} + ١٧س + ٣٠٠$، واقتران الربح الكلي هو: $ر(س) = ٣٤س - ٠.٠٤س^{٢} - ٣٠٠$،
حيث (س) عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما،
فجد الإيرادات الحدية عندما (س = ٥٠).

مثال ١٢٢ : إذا كان اقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو:
$ء(س) = ١٠س - س^{٢}$ دينار، واقتران الربح الكلي هو:
$ر(س) = ٢س - س^{٢}$ دينار، حيث (س) عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما، فجد التكاليف الحدية عندما (س = ١٠).

مثال ١٢٣ : مصنع يبيع الوحدة الواحدة من سلعة ما بسعر (١٠٠ - س) ديناراً، وكانت التكاليف الكلية تعطى بالاقتران: $ك(س) = ٣٠٠ + ٢س^{٣} + ٣س$ دينار،
فجد الربح الحدي لبيع وحدة واحدة.

التطبيقات الاقتصادية

مثال١٢٤ : إذا كان الإيراد الكلي عن بيع (س) قطعة من منتج ما هو: د(س) = ١٠س – س^{٢} ، والتكلفة الكلية هي:
ك(س) = ٨س ، فجد قيمة (س) التي تجعل الربح أكبر ما يمكن.

مثال١٢٥ : ينتج مصنع للدراجات (س) دراجة أسبوعياً، فإذا كانت تكلفة الإنتاج الكلي الأسبوعي تعطى بالعلاقة:
ك(س) = ١٠٠٠+٢٠س + س^{٢} ، وكان المصنع يبيع الدراجة الواحدة بمبلغ (١٠٠) دينار، جد عدد الدراجات (س) التي يجب أن يبيعها المصنع أسبوعياً ليحقق أكبر ربح.

مثال١٢٦ : ينتج مصنع (س) من أجهزة الحاسوب في الشهر ويبيع الجهاز الواحد بمبلغ (٢٠٠ – س) ديناراً. إذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج (س) من الأجهزة تعطى بالعلاقة: ك(س) = ٢٩٠+٤٠س + س^{٢} ديناراً ،
فما عدد الأجهزة التي يجب أن ينتجها ويبيعها المصنع شهرياً حتى يكون ربحه أكبر ما يمكن.

مثال١٢٧ : يبيع مصنع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بسعر (٤٠) ديناراً، فإذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج (س) وحدة من هذه السلعة تعطى بالعلاقة:
ك(س) = ٠.٢س^{٢} + ٦س ديناراً، جد عدد الوحدات التي تجعل الربح أكبر ما يمكن.

التطبيقات الاقتصادية

مثال١٢٨ : يبيع مصنع سلعة معينة بسعر (٥٠) ديناراً، فإذا كانت التكلفة الكلية بالدينار لإنتاج (س) وحدة من هذه السلعة أسبوعياً تعطى بالعلاقة: $ك(س) = ٢٥٠٠ + ٢٠س + ٠.٠٠٢س^{٢}$
فما عدد السلع التي يجب إنتاجها وبيعها أسبوعياً لتحقق للمصنع أكبر ربح ممكن ؟

مثال١٢٩ : يقوم مصنع للأجهزة الكهربائية بإنتاج وبيع (س) ثلاجة سنوياً، بحيث تكون التكلفة الكلية حسب العلاقة التالية:
$ك(س) = ٢س^{٢} - ٦٤٠٠س + ٥٠$،
جد عدد الثلاجات اللازم إنتاجها لتكون التكاليف أقل ما يمكن.

مثال١٣٠ : ينتج مصنع للثلاجات (س) ثلاجة شهرياً، فإذا كانت تكلفة إنتاجها تعطى بالعلاقة:
$ك(س) = ٣٦٠٠٠ + ٤س + س^{٢}$، وكان سعر الثلاجة الواحدة (٥٠٠) دينار، فجد عدد الثلاجات (س) التي يجب أن يبيعها المصنع شهرياً لتحقيق أكبر ربح ممكن.

مثال١٣١ : يبيع مصنع للألعاب لعبة بسعر (١٥) ديناراً، فإذا كانت التكلفة الكلية بالدينار لإنتاج (س) لعبة أسبوعياً تعطى بالعلاقة: $ك(س) = ٠.٠٤س^{٢} + ٥س + ٩٨٠$،
فما عدد الألعاب التي يجب إنتاجها وبيعها أسبوعياً لتحقق للمصنع أكبر ربح ممكن ؟

التطبيقات الاقتصادية

مثال١٣٢ : إذا كان مصنع يربح (١٠) دنانير في بيع الوحدة وكان الإيراد الكلي له هو: د(س) = ٩٠س – ٥س^{٢} ، جد

١) عدد الوحدات التي تجعل الإيراد أكبر ما يمكن.
٢) عدد الوحدات التي تجعل التكاليف أقل ما يمكن.

ملاحظة: ر(س) = س× مقدار الربح

مثال١٣٣ : إذا كانت تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة في مصنع (٢٠) دينار، وكان الربح الكلي: ر(س) = ٣٠٠ – ٢س^{٢} ، جد

١) أكبر إيراد لهذا المصنع.
٢) عدد الوحدات التي تجعل الإيراد أكبر ما يمكن.

ملاحظة: ك(س) = س× سعر التكلفة

مثال١٣٤ : إذا كان ك(س) اقتران التكلفة الكلية، د(س) اقتران الإيراد الكلي لمصنع، حيث (س) عدداً الوحدات المنتجة أسبوعياً، متى يكون الربح الأسبوعي أكبر ما يمكن ؟

مثال١٣٥ : إذا كان الربح الكلي لمصنع أثاث مكتبي هو: ر(س) = ٥٠س – س^{٢} ، وكان سعر بيع القطعة (٢٠) دينار، فجد عدد الوحدات التي تحقق أقل تكلفة ممكنة.

ملاحظة: د(س) = س× سعر البيع

مثال١٣٦ : يبيع أحد المصانع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بمبلغ (١٠٠) دينار، فإذا كانت التكلفة الكلية بالدنانير لإنتاج (س) وحدة من هذه السلعة أسبوعياً تعطى بالعلاقة التالية:
ك(س) = ٠.٣س^{٢} + ٤٠س + ٧٠ ديناراً، فجد

١) معدل التغير في الربح بالنسبة لعدد الوحدات المنتجة.
٢) الربح الحدي.
٣) معدل التغير في التكلفة.
٤) أقل تكلفة ممكنة.