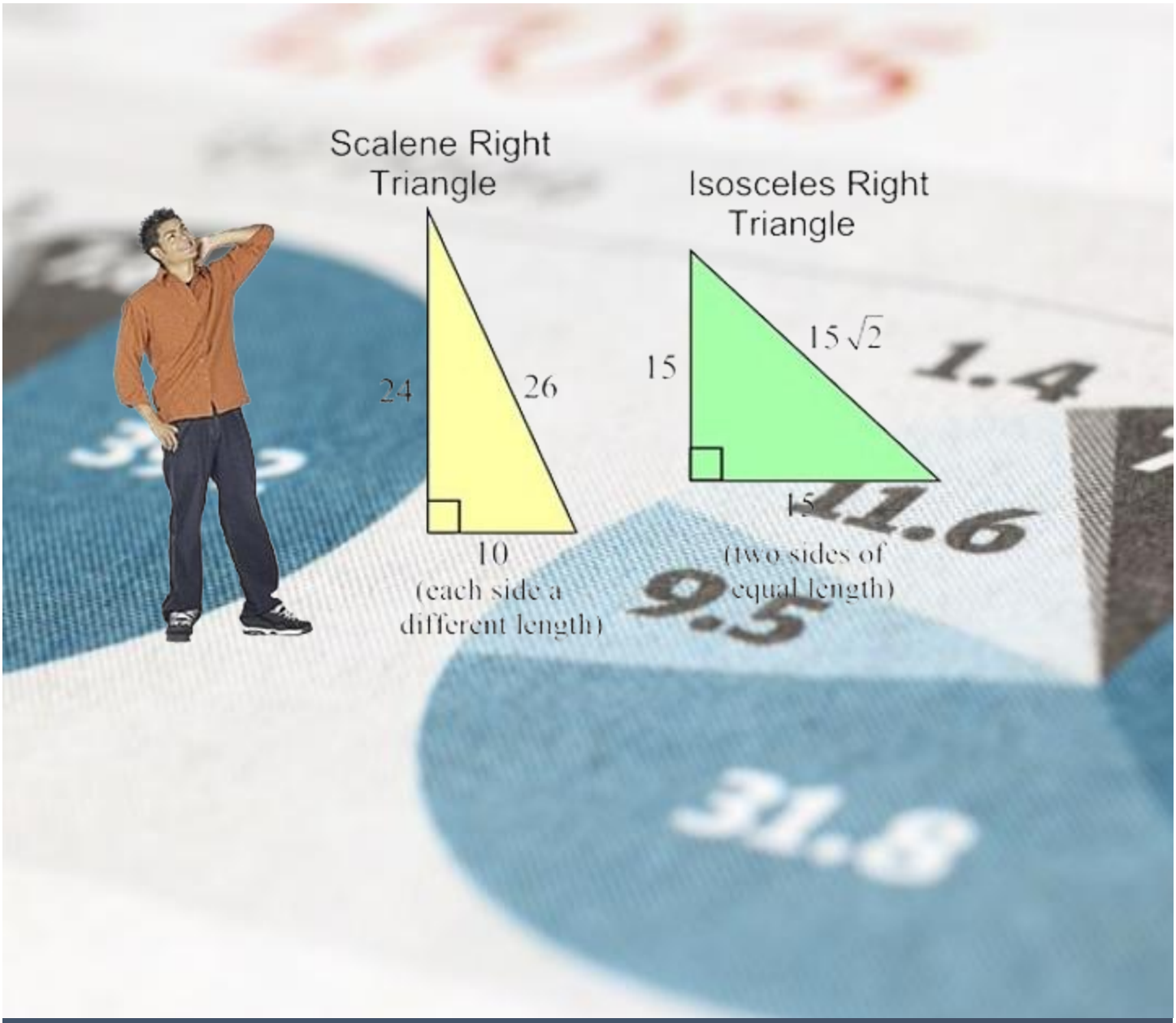
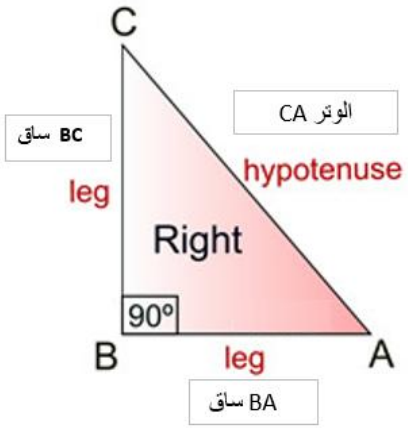


الدرس الثالث نظرية فيثاغورس الصف الثامن المنهاج الجديد

م. محمد اسعد الخطيب

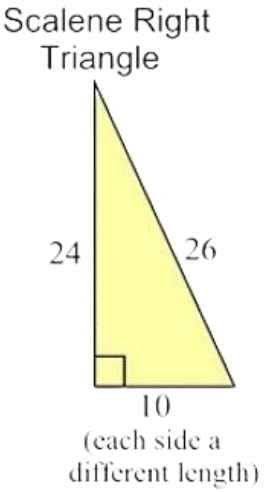
Facts about Right Triangles

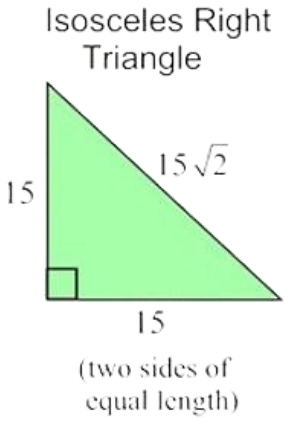
أشياء يجب تذكرها حول المثلثات القائمة:



- للمثلث القائم زاوية قائمة واحدة. الزاوية القائمة قياسها 90 درجة بالضبط .
- يُستخدم "مربع" للإشارة إلى موقع الزاوية القائمة.
- يُسمى أطول ضلع في المثلث القائم (المُقابل لـ"الزاوية القائمة") "وتر الزاوية القائمة"
- .يُطلق على الضلعين المتبقيين اسم "الساقين"، وقد يكونان متساويين في الطول أو لا.

- ملاحظة: من الممكن أن يكون المثلث القائم أيضًا غير متساوي الساقين أو متساوي الساقي.





غير متساوي الساقين

متساوي الساقين

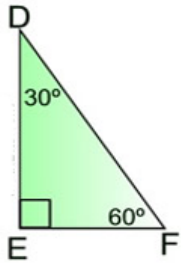
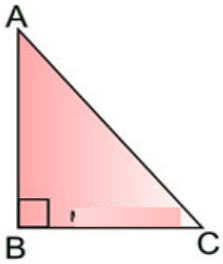
نظرية فيثاغورس : تستخدم لإيجاد طول ضلع مفقود (الوتر او احد الساقين)

وتنطبق فقط على مثلث قائم الزاوية سواء كان قائم الزاوية متساوي الساقين او قائم الزاوية غير متساوي الساقين

أشياء يجب تذكرها حول المثلثات القائمة:

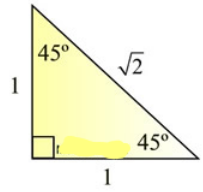
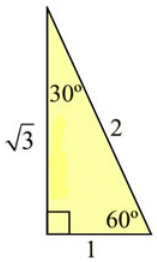
- أرجل المثلث القائم الزاوية متعامدة. & الزوايا الحادة في المثلث القائم الزاوية متكاملة (بإضافة 90 درجة).

الزوايا الحادة في المثلث القائم الزاوية متكاملة (بإضافة 90 درجة).	الساقين في المثلث القائم الزاوية متعامدين
متكاملة يعني مجموع الزاويتن الحادتين = 90 درجة فمثلا اذا كانت واحدة قياسها 30 درجة فالاخرى مكملة لل90 يعني قيهاسها 60 درجة	

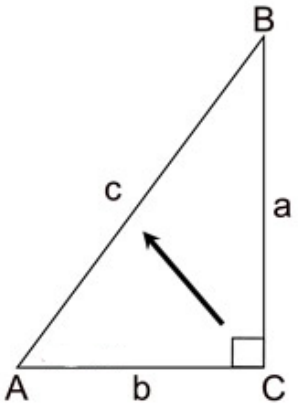
• The acute angles of a right triangle are complementary (add to 90°).	• The legs of a right triangle are perpendicular.
 *Example:* In the diagram, $m\angle D = 30°$ and $m\angle F = 60°$ These are complementary ∠s. $m\angle D + m\angle E + m\angle F = 180$ $m\angle E = 90$ $m\angle D + 90 + m\angle F = 180$ $m\angle D + m\angle F = 90$ $\angle D$ and $\angle F$ are complementary	 $\overline{AB} \perp \overline{BC}$

- مساحة المثلث : نص القاعدة مضروب بالارتفاع = $\frac{1}{2}$ BC X H

- للعلم: "المثلثات القائمة الزاوية الخاصة" هما مثلثان قائمان الزاوية شائعان جدًا في الرياضيات. خصائص هذه المثلثات تُسهّل الحسابات عليها. حتى أن هناك صيغًا خاصة لأضلاعها.[سيتكرر استخدام الصيغ الخاصة بهذه المثلثات في دروس الهندسة في المرحلة الثانوية وما بعدها. الصيغ المذكورة هنا للإشارة فقط.]

• Special Right Triangle 45° - 45°- 90°	• Special Right Triangle 30° - 60° - 90°
 Formulas: Let l = leg h = hypotenuse $h = l\sqrt{2}$ $l = \frac{h\sqrt{2}}{2}$ • (angles) ratio 1:1:2 • (sides) ratio 1:1:$\sqrt{2}$ This is an **isosceles right triangle**.	 Formulas: Let sl = short leg (opposite 30° ∠) ll = long leg (opposite 60° ∠) h = hypotenuse $sl = ½h$ $ll = ½h\sqrt{3}$ • (angles) ratio 1:2:3 • (sides) ratio 1:2:$\sqrt{3}$

نظرية فيثاغورس: في أي مثلث قائم الزاوية، مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين.



الوتر هو طول الضلع AB

الساق الأول هو CA

الساق الثاني هو CB

النظرية

$$AB^2 = CA^2 + CB^2$$

$$(\text{الوتر } c)^2 = (\text{الساق } b)^2 + (\text{الساق } a)^2$$

- **تذكر حل المعادلة التربيعية يتطلب اخذ الجذر التربيعي للطرفين**

تعمل نظرية فيثاغورس فقط في المثلث القائم الزاوية.

النظرية و عكس النظرية

نظرية فيثاغورس: إذا كان المثلث قائم الزاوية، فإن مربع طول الوتر (الضلع الأطول) يساوي مجموع مربعي طولي الساقين (الضلعين الآخرين).

عكس نظرية فيثاغورس: إذا كان مربع طول أطول ضلع في مثلث يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين، فإن المثلث يكون قائم الزاوية.

الثلاثيات الفيثاغورسية الأكثر شيوعًا هي

8,15,17	9,12,15	5,12,13	3,4,5

أتحققُ من فهمي:

3) 12, 5, 13

4) 24, 18, 25

المطلوب هو تحديد ما اذا كان المثلث قائم الزاوية ام لا

نطبق قاعدة عدة فيثاغورس اذا انطبقت يكون المثلث قائم الزاوية

3) 12, 5 , 13 المثلث القائم الزاوية ثلاثة اضلاع الأطول

$$a^2 + b^2 = c^2$$

الوتر هو الضلع الأطول اذن c = 13 و الاضلاع a و b تكون الباقية بغض النظر عن الترتيب

$$12^2 + 5^2 = 13^2$$

احسب طرف المعادلة الأيمن و طرف المعادلة الايسر اذا تساوى الطرفان تنطبق النظرية اذن المثلث قائم الزاوية

$$144 + 25 = 169$$

$$13^2 = 169$$

بما ان طرفي المعادلة متساويين اذن انطبقت النظرية و المثلث قائم الزاوية

---

4) 24,18, 25

الوتر هو الضلع الأطول اذن c = 25 و الاضلاع a و b تكون الباقية بغض النظر عن الترتيب

$$24^2 + 18^2 = 125^2$$

احسب طرف المعادلة الأيمن و طرف المعادلة الايسر اذا تساوى الطرفان تنطبق النظرية اذن المثلث قائم الزاوية

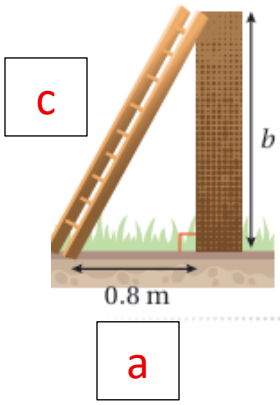
$$576 + 324 = 900$$

$$25^2 = 225$$

بما ان طرفي المعادلة غير متساويين اذن لا انطبقت النظرية و المثلث ليس قائم الزاوية

أتحققُ من فهمي:

يستندُ سلّمٌ طولُهُ 2 m إلى حائطٍ عموديٍّ، وتبعدُ قاعدتُهُ 0.8 m عَنِ الحائطِ.
أجدُ ارتفاعَ أعلى السلّمِ عَنِ الأرضِ (b).



المعطيات

طول السلم و هو الوتر C = 2 m طول القاعدة (احد الساقين a = 0.8 m)

المطلوب إيجاد الساق الاخر الارتفاع b

$$c^2 = a^2 + b^2$$

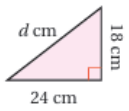
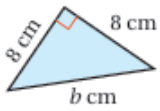
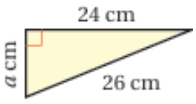
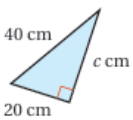
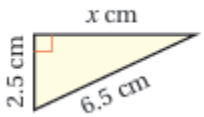
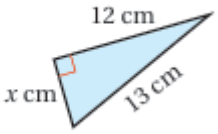
$$C = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$C = \sqrt{0.8^2 + 2^2}$$

$$C = \sqrt{0.64 + 4} = \sqrt{4.64} = 2.15 \text{ m}$$

أتدرب وأحل المسائل

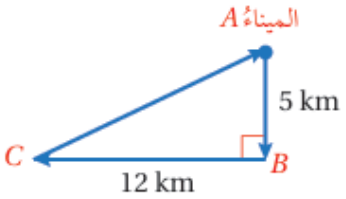
أجــدُ طولَ الضلعِ المجهولَ في كلِّ مثلثٍ قائمِ الزاويةِ ممّا يأتي (أقرّبُ إجابتي لأقربِ جزءٍ مِنْ عشرةٍ إذا لزمَ الأمرُ):

1 	$d^2 = 24^2 + 18^2$ $d^2 = 576 + 324$ $d^2 = 900$ $d = \sqrt{900} = 30$	المجهول الوتر
2 	$b^2 = 8^2 + 8^2$ $b^2 = 64 + 64$ $b^2 = 128$ $b =$ $\sqrt{128}=\sqrt{16 \times 2 \times 4}=8\sqrt{2}=11.3$	المجهول الوتر
3 	$26^2 = a^2 + 23^2$ $a^2 = 26^2 - 23^2$ $a^2 = 676 - 529$ $a^2 = 147$ $A = \sqrt{147} = \sqrt{49 \times 3} = 7\sqrt{3} = 12$	المجهول الساق a
4 	$40^2 = 20^2 + c^2$ $c^2 = 40^2 - 20^2$ $C = \sqrt{1600 - 400} = \sqrt{1200}=34.6$	المجهول الساق c انتبه للمسميات مش شرط الوتر دائما اسمه c
5 	$6.5^2 = 2.5^2 + x^2$ $x^2 = 6.5^2 - 2.5^2$ $x = \sqrt{42.25 - 6.25} = \sqrt{36} = 6$	المجهول الساق x
6 	$13^2 = x^2 + 12^2$ $x^2 = 13^2 - 12^2$ $X = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$	المجهول الساق x

أحددُ ما إذا كانَ المثلثُ المعطاةُ أطوالُ أضلاعِهِ في كلٍّ ممّا يأتي قائمَ الزاويةِ أَمْ لا:

7 3, 4, 6 8 12, 35, 37 9 4, 8, 9 10 11, 60, 61

7 3, 4, 6	الوتر 6 $6^2 = 36$	الساقين $3^2 + 4^2 = 25$	غير قائم $36 \neq 25$
8 12, 35, 37	الوتر 37 $37^2 = 1369$	الساقين $35^2 + 12^2 = 1369$	قائم $1369 = 1369$
9 4, 8, 9	الوتر 9 $9^2 = 81$	الساقين $8^2 + 4^2 = 80$	غير قائم $81 \neq 80$
10 11, 60, 61	الوتر 61 $61^2 = 3721$	الساقين $11^2 + 60^2 = 3721$	قائم $3721 = 3721$



سُفُنٌ: أبحرَتْ سفينةٌ 5 km مِنَ الميناءِ A باتجاهِ الجنوبِ، ثُمَّ 12 km باتجاهِ الغربِ، ثُمَّ عادَتْ مباشرةً إلى الميناءِ كما في الشكلِ المجاورِ:

11 أجدُ المسافةَ الّتي قطعَتْها السفينةُ.

12 أجدُ المسافةَ الّتي تختصرُها السفينةُ لَوْ أبحرَتْ مباشرةً مِنَ النقطةِ A إلى النقطةِ C ذهابًا وإيابًا.

لا يجاد المسافة : يجب إيجاد طول الضلع الناقص و هو الوتر (لان السفينة قطعت محيط المثلث)

$ac^2 = 12^2 + 5^2$

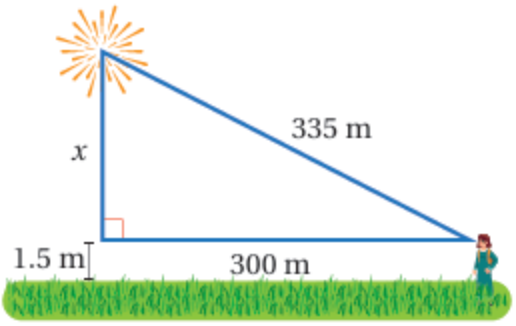
$ac^2 = 144 + 25$

$Ac = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$ km

المسافة التي قطعتها السفينة = 5 km+12 km+13 km = **30 km**

المسافة المختصرة = 30 km – 13 km = 17 km

13 **ألعـابٌ ناريّـةٌ:** رصـدَتْ بثينةُ عرضًـا للألعـابِ الناريةِ علـى بُعـدِ 335 m مثلَما يظهرُ فـي الشـكلِ الآتي. أجـدُ ارتفـاعَ الألعـابِ الناريةِ عَنْ سـطحِ الأرضِ.



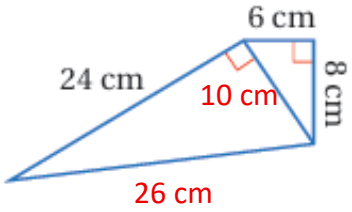
$335^2 = 300^2 + x^2$

$x^2 = 335^2 - 300^2$

X = $\sqrt{22225}$ = 149 ارتفاع الألعاب النارية من مستوى بثينة

ارتفاع الألعاب النارية من مستوى الأرض= x + 1.5 m = 149+1.5 = 150.6 m

14 أجدُ محيطَ الشكلِ المجاورِ.



لا يجاد المحيط يجب إيجاد اطوال الاضلاع

المثلث الصغير (ضلع مفقود وهو الوتر بالنسبة للمثلث الصغير وهو ايضا مشترك مع المثلث الكبير)

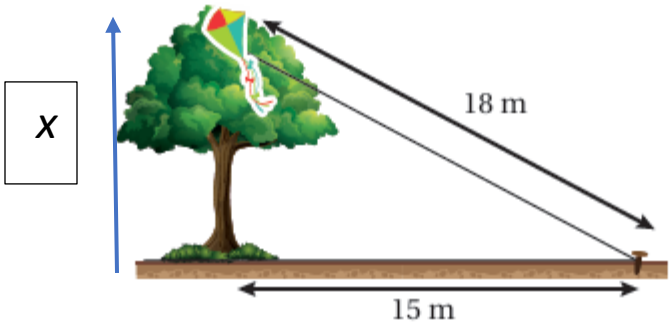
X = $\sqrt{6^2 + 8^2}$ = $\sqrt{36 + 64}$ = $\sqrt{100}$ = 10

ثم نجد الوتر للمثلث الكبير (كون ان ساقه المفقود تم ايجاده و هو مشترك مع المثلث الصغير)

y = $\sqrt{10^2 + 24^2}$ = $\sqrt{100 + 576}$ = $\sqrt{676}$ = 26

المحيط = 6+8+10+24+26= 74 cm

15 علقَتْ طائرةُ عبدِ اللهِ الورقيةُ أعلى شجرةٍ، فربطَ الخيطَ في وتدٍ على الأرضِ يبعدُ 15 m عَنْ قاعدةِ الشجرةِ مثلَما يظهرُ في الشكلِ الآتي. إذا كانَ طولُ خيطِ الطائرةِ 18 m فأجدُ ارتفاعَ الشجرةِ.

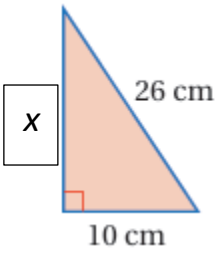


$x^2 = 18^2 - 15^2$

$X = \sqrt{324 - 225} = \sqrt{99} = 9.9$ m

---

16 أجدُ مساحةَ المثلثِ المجاورِ.



مساحة المثلث =

$\frac{1}{2}$ x القاعدة x الارتفاع

يجب إيجاد الساق المفقود x وهو الارتفاع

$x^2 = 26^2 - 10^2$

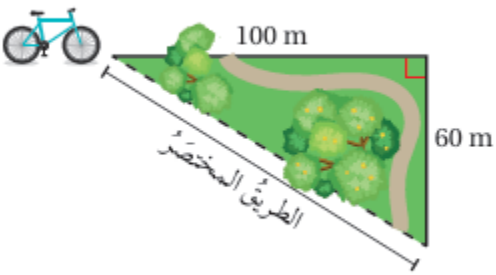
$X = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24$ cm

المساحة= $\frac{1}{2}(10)\ x\ 24 = 5 \times 24 = 120\ cm^2$

17 أعودُ إلى فقرةِ (أستكشفُ) بدايةَ الدرسِ، وأحلُّ المسألةَ.

أستكشفُ

أرادَ خالدٌ الخروجَ مِنَ الحديقةِ راكبًا دراجتَهُ الهوائيةَ مارًّا بالطريقِ المختصَرِ كما يظهرُ في الشكلِ المجاورِ. ما طولُ الطريقِ المختصَرِ؟

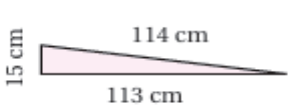


$x^2 = 100^2 + 60^2$

$X = \sqrt{10000 + 3600} = \sqrt{13600} = 116.6$ m

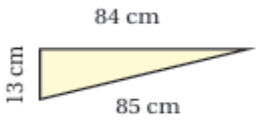
مهاراتُ التفكيرِ العُليا

18 **أكتشفُ المختلفَ:** أيُّ المثلثاتِ الآتيةِ مختلفٌ؟ أبرّرُ إجابتي:



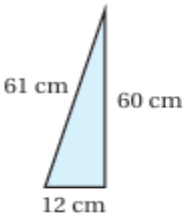
$114^2 = 15^2 + 113^2$

$12994 = 12994$



$85^2 = 84^2 + 13^2$

$7225 = 7225$



$61^2 = 12^2 + 60^2$

$3721 = 3744$

المثلث المختلف

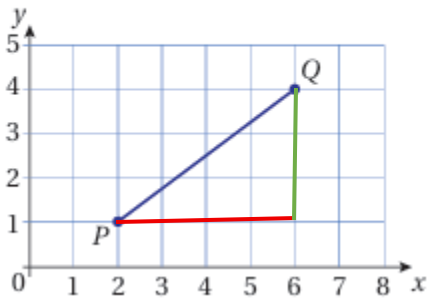
المثلثات القائمة هي مثلثات متشابها أي اننا نبحث اذا وجدنا مثلث غير قائم يكون هو المختلف

19 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** ثلاثيّاتُ فيثاغورس هِيَ مجموعاتٌ مِنْ ثلاثةِ أعدادٍ موجبةٍ a وَ b وَ c تحققُ نظريةَ فيثاغورس؛ أيْ تشكّلُ أطوالًا لمثلثٍ قائمِ الزاويةِ. مثلًا: 3 وَ 4 وَ 5 . أجدُ مجموعتَينِ مِنْ ثلاثياتِ فيثاغورس.

الثلاثيات الفيثاغورسية الأكثر شيوعًا هي

8,15,17	9,12,15	5,12,13	3,4,5

20 **تحدٍّ:** في الشكل الآتي، أجدُ طولَ $\overline{PQ}$ مِنْ دونِ استعمالِ المسطرةِ.



اكمل المثلث و من خلال المقياس نعرف طول الساقين

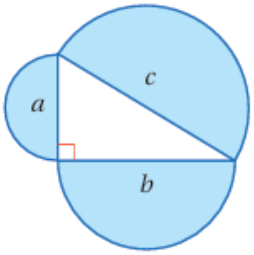
طول الساق الأخضر = 3 مربعات طول الساق الأحمر = 4 مربعات

طول الوتر PQ = $\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ مربعات

أتذكّرُ

مساحةُ الدائرةِ $A = \pi r^2$

21 **تبريرٌ:** أقارنُ بَيْنَ مساحةِ نصفِ الدائرةِ الكبيرةِ ومساحةِ نصفَيِ الدائرتَينِ الصغيرتَينِ، مبررًا إجابتي.



نجد نصف مساحة كل دائرة (نصف الدائرة c و نصف الدائرة a ونصف الدائرة b)

$A_C = \frac{\pi C^2}{2}$ نقسم على 2 لأننا نريد نصف مساحة الدائرة

$A_b = \frac{\pi b^2}{2}$ نقسم على 2 لأننا نريد نصف مساحة الدائرة

$A_a = \frac{\pi a^2}{2}$ نقسم على 2 لأننا نريد نصف مساحة الدائرة

$$A_C = A_b + A_a$$

$$\frac{\pi C^2}{2} = \frac{\pi b^2}{2} + \frac{\pi a^2}{2}$$

$\frac{\pi}{2}$ عامل مشترك

$$\frac{\pi C^2}{2} = \frac{\pi}{2}(b^2 + a^2)$$

النتيجة $c^2 = b^2 + a^2$

النتيجة : مربع مساحة نصف الدائرة على الوتر = مجموع مربعات انصاف مساحات الدوائر على الساقين

أكتبُ كيفَ أجدُ طولَ ضلعٍ مجهولًا في مثلثٍ قائمِ الزاويةِ باستخدامِ نظريةِ فيثاغورس؟

يجب ان نحدد الضلع المفقود اذا كان الوتر نسميه c و نطبق $c^2 = b^2 + a^2$

اذا كان المفقود احد الساقين نطبق **الساق المفقود ^{2} = الوتر ^{2} − الساق المعلوم ^{2}**