الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

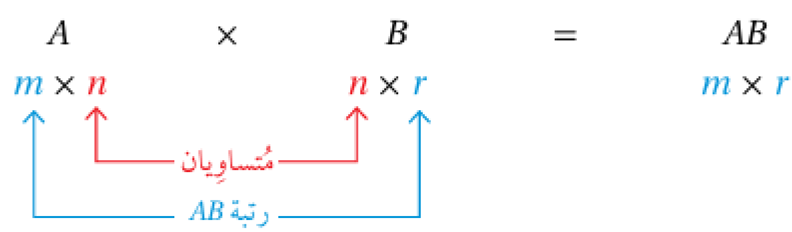
إذا كانت A وB أي مصفوفتين، فسيتم تعريف حاصل ضربهما AB فقط عندما يكون عدد الأعمدة في A مساويًا لعدد الصفوف في B.

إذا كان $A[a_{ij}]_{mxn}$ $B[b_{ij}]_{nxr}$، فإن حاصل ضربهما $AB = C = [c_{ij}]$ سيكون مصفوفة من الدرجة

$m \times r$

شروط ضرب المصفوفات

يُمكِن ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى مُساوِيًا لعدد صفوف المصفوفة الثانية. وعند ضرب المصفوفــة A التي رتبتها $m \times n$ في المصفوفة B التي رتبتها $n \times r$، فإنَّ رتبة المصفوفة الناتجة $A \times B$ هي: $m \times r$.



بمفهوم اخر يجب ان يكون هناك عامل مشترك بين المصفوفات التي نريد اجراء عملية الضرب عليها و العامل المشترك هو

أعمدة المصفوفة A = صفوف المصفوفة B = حسب المخطط أعلاه انظر الى الرقمين الداخليين

النتيجة مصفوفة تكون من رتبة (عدد صفوف A X عدد أعمدة B)

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

$A_{m\,n}$ $B_{n\,r}$ $c_{m\,r}$

A	B	=	C
m n	n r		m r

داخلي

خارجي

مصفوفة جديدة اخذت الرتبة

عدد الصفوف من الأولى و
عدد الاعمدة من الثانية

استخدم تعريف المصفوفات التالية للحكم فيما اذا نستطيع اجراء الضرب ام لا

$A_{2\;3}$ $B_{2\;2}$

غير متساويتان

لا يمكن اجراء الضرب

$A_{2\;3}$ $C_{3\;2}$

متساويتان

2X2

يمكن اجراء الضرب و المصفوفة الناتجة تكون من رتبة

$B_{2\;2}$ $C_{3\;2}$

غير متساويتان

لا يمكن اجراء الضرب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

أتحقَّق من فهمي

إذا كانت $A_{2\times2}$، وكانت $B_{3\times2}$، وكانت $C_{2\times3}$، فأُبيِّن إذا كانت عملية الضرب في كلٍّ ممّا يأتي مُمكِنة أم لا. وإنْ كانت كذلك، أُحدِّد رتبة مصفوفة الضرب الناتجة:

a) AB b) BC c) CA

A 2 2 B 3 2

غير متساويتان

لا يمكن اجراء الضرب

B 3 2 C 2 3

متساويتان

يمكن اجراء الضرب و المصفوفة الناتجة تكون من رتبة 3X3

C 2 3 A 2 2

غير متساويتان

لا يمكن اجراء الضرب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

هل يجوز ضرب مصفوفة صف من 3 أعمدة مع مصفوفة عمود مع 3 صفوف اذا كانت الإجابة نعم ما نوع المصفوفة الناتجة (الإجابة نعم)

$A_{1\ 3}$ $B_{3\ 1}$

متساويتان

3X1

يمكن اجراء الضرب و المصفوفة الناتجة تكون من رتبة

الناتج مصفوفة عمود من 3 صفوف

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

ضرب المصفوفات

تختلف عملية ضرب مصفوفتين عن عمليتـي جمعهما وطرحهما؛ إذ لا تُضرَب العناصر المُتناظِرة في بعضها كما في عمليتي جمع المصفوفات وطرحها.

كيفية اجراء الضرب تكون باختصار (ضرب صف في عمود)

- نأخذ الصف الأول من المصفوفة الأولى و نضربه كل مرة بعمود من المصفوفة الثانية ونجمع النتاج لكل صف Xعمود
- نأخذ الصف الثاني من المصفوفة الأولى و نضربه كل مرة بعمود من المصفوفة الثانية ونجمع النتاج لكل صف Xعمود

الصف الأول X (العمود الأول + العمود الثاني + العمود الثالث + ...)

الصف الثاني X (العمود الأول + العمود الثاني + العمود الثالث + ...)

الصف الثالث X العمود الأول + العمود الثاني + العمود الثالث + ...)

$$\begin{array}{r} \\ \text{صف 1} \\ \text{صف 2} \\ \text{صف 3} \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \end{bmatrix} \end{array} \;\mathbf{X}\; \begin{array}{ccc} \text{عمود 1} & \text{عمود 2} & \text{عمود 3} \end{array} \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \boxed{3} & \boxed{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{صف 1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \end{bmatrix} \;\mathbf{X}\; \begin{array}{c} \text{عمود 1} \\ \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{bmatrix} \end{array}$$

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

مثال 2

إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$، وكان: $B = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$، فأجد: AB.

$$A_{23} \text{ X } B_{3X2}$$

بما انها حققت الشرط اذن نستطيع اجراء عملية الضرب

- $[1 \ -5 \ \ 4] \ X \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = (1x4) + (-5x0) + (4x2)$ = 4+0+8=12
- $[1 \ -5 \ \ 4] \ X \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} =$ 1 (-5) + -5 (-1) + 4(0) = -5+5+0
- $[-3 \ \ 4 \ \ 7] \ X \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ = -3 (4) + 4 (0) +7 (2) = -12+0+14= 2
- $[-3 \ \ 4 \ \ 7] \ X \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} =$ -3 (-5) + 4 (-1)+ 7 (0) = 15-4+0 = 11

$$AB\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$$

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

أتحقّق من فهمي

a) إذا كان: $M = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$، وكان: $N = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$، فأجد: MN.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

- $\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$ X $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ = (3x4)+(1x6) = 12+6=18
- $\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$ X $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ = (3x0)+(1x-3)= 0 + -3 = -3
- $\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$ X $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ = (2x4)+(5x6) = 8 + 30 = 38
- $\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$ X $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ = (2x0)+(5x-3) = 0-15= -15

$$\begin{bmatrix} 18 & -3 \\ 38 & -15 \end{bmatrix}$$

b) إذا كان: $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$، وكان: $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$، فأجد: CD.

- $[1 \;\; 0]x\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ = 1x2 + 0 x1 = 2
- $[1 \;\; 0]x\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ = 1x1 + 0x-1 = 1
- $[1 \;\; 0]x\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ = 1x3 + 0x0 = 3
- $[2 \;\; 1]x\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ = 2x2+1x1 = 5
- $[2 \;\; 1]x\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ = 2x1+ 1x-1 = 1
- $[2 \;\; 1]x\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ = 2x3 + 1x0 = 6
- $[3 \;\; 2]x\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ = 3x2+2x1 = 8
- $[3 \;\; 2]x\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ = 3x1 + 2x-1 = 1

$$\boxed{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix}}$$

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

- $[3\ \ 2]x\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ = 3x3 +2x0 = 9

أتحقَّق من فهمي

كـرة قدم: يُبيِّن الجدول المجـاور نتائج 3 فِرَق لكرة القدم بعدمـا لعب كلٌّ منها 4 مباريات. إذا علمْـتُ أنَّ فوز الفريق في المباراة الواحدة يعني حصوله على 3 نقـاط، وأنَّ تعادله يعني حصوله على نقطـة واحـدة، وأنَّ خسـارته تعني عدم حصوله على أيِّ نقاط، فأستعمل المصفوفات في إيجاد عدد النقاط التي حصل عليها كل فريق لتحديد الفريق الفائز.

الفريق	ربح	تعادل	خسارة
A	1	0	3
B	3	1	0
C	1	1	2

a) شكل مصفوفة من الجدول لتكن المصفوفة A

b) فوز= 3 نقاط ...... تعادل = 1 نقطة ..... خسارة = 0 نقاط (هذه مصفوفة عمودية من 3 عناصر) لتكن المصفوفة B

c) جد ناتج ضرب المصفوفات A و B

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} X\ B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ لاحظ الرتبة لكل مصفوفة

3 X 3 = 3 X 2 متساويات نستطيع اجراء الضرب

- $[1\ \ 0\ \ 3\,]\,X \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ = 1X3 + 0 X1 + 3 X 0 = 3
- $[3\ \ 1\ \ 0\,]\,X \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ = 3X3 + 1X1 + 0X0 = 10
- $[1\ \ 1\ \ 2\,]\,X \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ = 1 X3 + 1X1 + 2X0 = 4

A	3
B	10
C	4

$\begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$

الفائز فريق B

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

خصائص عملية الضرب في المصفوفات

- ضرب المصفوفات ليس تبادليًا بشكل عام، أي بشكل عام $AB \neq BA$ (مهم جدا)
  - خاصية الضرب في الاعداد الحقيقة تبادلية بمعنى ان $2x3=3x2$ هذا لا ينطبق على المصفوفات
- عملية ضرب المصفوفات هي عملية ارتباطية، أي $(AB)C=A(BC)$.
  - في الاعداد الحقيقة $(3x2)x4 =3x(2x4)$ و هذا ينطبق على المصفوفات
- ضرب المصفوفات هو توزيعي على جمع المصفوفات (هام جدا)
- من اليسار $RS+ RT =R(S+T)$ (R ضرب S وليس العكس ، R ضرب T وليس العكس)

الحرف الموجود خارج القوس أولا

- من اليمين $RT+ST =(R+S)T$ (R ضرب T وليس العكس ، R ضرب S وليس العكس)

الحرف الموجود خارج القوس ثانيا

يعني يوجد مصفوفتين داخل القوس وواحدة خارج القوس (انتبه للترتيب) لان عملية الضرب ليست تبادلية (انتبه أي مصفوفة اول)

- يمكن أن يكون حاصل ضرب مصفوفتين مصفوفة فارغة في حين لا تكون أي منهما فارغة، أي إذا كان $AB = 0$، فليس من الضروري أن يكون $A = 0$ أو $B = 0$.
  - في الاعداد الحقيقة اذا كانت نتيجة الضرب = صفر بالتأكيد يكون احد الرقمين =0
  - هذا ليس شرط في المصفوفات
- حاصل ضرب المصفوفة في مصفوفة فارغة يكون دائمًا مصفوفة فارغة.
  - في الاعداد الحقيقة ناتج ضرب أي رقم بصفر = صفر
  - وينطبق هذا على المصفوفات (اذا ضربنا أي مصفوفة بمصفوفة فارغة او صفرية يعني كل عناصرها صفر) = النتيجة مصفوفة صفرية

الدرس 3

ضرب المصفوفات

Multiplying Matrices

- ضرب المصفوفة بنفسها عدة مرات تتمثل ب A^T

كما هو في الاعداد الحقيقة 4^3 يعني ضرب العدد 4 بنفسه 3 مرات

A^3 = A X A X A

ضرب المصفوفة بنفسها لا يحقق شرط الضرب

الا في المصفوفة المربعة فقط والتي لهما نفس الرتبة

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

أتحقق من فهمي

إذا كان: $H=\begin{bmatrix}7&5\\4&2\end{bmatrix}$, $G=\begin{bmatrix}0&1\\1&3\end{bmatrix}$, $F=\begin{bmatrix}4&-2\\3&5\end{bmatrix}$، وكان: $m=-4$، فأجد كُلًّا

$H=\begin{bmatrix}7&5\\4&2\end{bmatrix}$ $\quad$ $G=\begin{bmatrix}0&1\\1&3\end{bmatrix}$ $\quad$ $F=\begin{bmatrix}4&-2\\3&5\end{bmatrix}$

H = 2X2 $\quad$ G= 2X2 $\quad$ F = 2X2

متساويتان $\quad$ متساويتان

a) (F+G)H	يمكن جمع F و G ثم النتاج نضربه ب H **او توزيع الضرب (F+G)H= H = FH+GH** انتبه اول F مضروبة ب H وليس العكس و كذلك G مضروبة H و ليس العكس (خاصية التجميع من اليمين)
F+G	$\begin{bmatrix}4&-1\\4&8\end{bmatrix}$
(F+G) H	$\begin{bmatrix}4&-1\\4&8\end{bmatrix} X \begin{bmatrix}7&5\\4&2\end{bmatrix}$
	= 4X7 + (-1)(4) = 28 -4 = 24 = 4X5+ (-1) (2) = 20-2 = 18 = 4X7+8X4 = 28 +32 = 60 =4X5+8 X2 = 20 + 16 = 36 $=\begin{bmatrix}24&18\\60&36\end{bmatrix}$

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

الطريقة الثانية نطبق خاصية التجميع من اليمين

الحرف الموجود على اليمين اذن الحرف ثانيا (بهذا الترتيب غير ذلك خطا)

(F+G)H = FH+GH

1) $F = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} X\ H = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

= 4 X 7 + -2 X 4 = 20

= 4 X5 + -2 X 2 = 16

=3 X7 + 3 X 4 = 41

= 3X5 + 5 X2 = 25

$\begin{bmatrix} 20 & 16 \\ 41 & 25 \end{bmatrix}$.............1

+

2) $G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X\ H = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

= 0 X7 + 1 X4 = 4

= 0X 4 + 1 X2 = 2

= 1 X7 + 3 X4 = 19

= 1 X 4 + 3 X2 = 11

$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 19 & 11 \end{bmatrix}$............2

اجمع 1 مع 2

$$= \begin{bmatrix} 24 & 18 \\ 60 & 36 \end{bmatrix}$$

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

أتدرّب وأحُلّ المسائل

إذا كان: $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0.5 & 3 & 0 \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} 2 & -1.5 & -1 \\ 0.5 & 0 & 2 \\ 1.5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$، فأُبيِّــن إذا كانــت عملية الضرب في كلٍّ ممّا يأتي مُمكِنة أم لا. وإنْ كانت كذلك، أُحدِّد رتبة مصفوفة الضرب الناتجة:

AB غير متساوية **A** 2 2 **B** 3 2 لا يمكن الضرب رتبة المصفوفة الجديدة	
BC متساوية **B** 3 2 **C** 2 3 يمكن الضرب رتبة المصفوفة الجديدة **3X3**	
DC غير متساوية **D** 3 3 **C** 2 3 لا يمكن الضرب رتبة المصفوفة الجديدة	
BA متساوية **B** 3 2 **A** 2 2 يمكن الضرب رتبة المصفوفة الجديدة **3 X2**	

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

CD متساوية **C** **D** يمكن الضرب 2 3 3 3 رتبة المصفوفة الجديدة **2X3**	
BB غير متساوية **B** **B** لا يمكن الضرب 3 2 3 2 رتبة المصفوفة الجديدة	
CB متساوية **C** **B** يمكن الضرب 2 3 3 2 رتبة المصفوفة الجديدة **3X3**	
BCD غير متساوية	
BC متساوية **B** **C** يمكن الضرب 3 2 2 3 **k** رتبة المصفوفة الجديدة **2X2**	
KD غير متساوية **K** **D** لا يمكن الضرب 2 2 3 3 رتبة المصفوفة الجديدة	

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

9 إذا كان: $AB = C$، وكانت رتبة المصفوفة A هي: 3×4، ورتبة المصفوفة C هي: 5×4، فما رتبة المصفوفة B؟

AB **A** **B** **C**

$4 \quad \boxed{3} \qquad \boxed{m} \quad n \quad = \quad 4 \quad \boxed{5}$

m= 3 n = 5

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي (إنْ أمكن):

10 $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

11 $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

12 $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

13 $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

14 $\begin{bmatrix} 8 & 10 & -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$

15 $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -5 & 6 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

16 $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix}$

17 $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & -14 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

18 $\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\right)^2$

19 $\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right)^2$

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

10

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{لايجوز} \end{bmatrix}$$

2X2	3X2	

11

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 9 \\ -8 & -20 & -12 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

3X1	1X3	3X3

12

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 22 & 5 \\ -4 & 14 & 18 \end{bmatrix}$$

2X3	3X3	2X3

(3 X 0)	+	(-1 X -2)	+	(2 X 4)	=	10
(3 X 3)	+	(-1 X 1)	+	(2 X 7)	=	22
(3 X 2)	+	(-1 X 5)	+	(2 X 2)	=	5

(4 X 0)	+	(2 X -2)	+	(0 X 4)	=	-4
(4 X 3)	+	(2 X 1)	+	(0 X 7)	=	14
(4 X 2)	+	(2 X 5)	+	(0 X 2)	=	18

الدرس 3

ضرب المصفوفات

Multiplying Matrices

13

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

2X2 2X2 2X2

(3 X 5) + (0 X 0)	=	15
(3 X 0) + (0 X 4)	=	0

(0 X 5) + (2 X 0)	=	0
(0 X 0) + (2 X 4)	=	8

14

$$\begin{bmatrix} 8 & 10 & -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix}$$

1X3 3X1 1X1

(8 X 1) + (10 X -3) + (-7 X -5)	=	13

15

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -5 & 6 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -18 & 11 \\ -45 & 24 & 21 \\ -15 & 12 & -9 \end{bmatrix}$$

3X2 2X3 3X3

(-2 X -5) + (-1 X 0)	=	10
(-2 X 6) + (-1 X 6)	=	-18
(-2 X -4) + (-1 X -3)	=	11

(9 X -5) + (-5 X 0)	=	-45
(9 X 6) + (-5 X 6)	=	24
(9 X -4) + (-5 X -3)	=	-21

(3 X -5) + (-1 X 0)	=	-15
(3 X 6) + (-1 X 6)	=	12
(3 X -4) + (-1 X -3)	=	-9

16

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ -5 & 20 \end{bmatrix}$$

2X1 1X2 2X2

(2 X -1)	=	-2
(2 X 4)	=	8
(5 X -1)	=	-5
(5 X 4)	=	20

17

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & -14 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -12 & 21 \end{bmatrix}$$

2X2 2X2 2X2

(2 X 8)	+	(4 X -4)	=	0
(2 X -14)	+	(4 X 7)	=	0

(0 X 8)	+	(3 X -4)	=	-12
(0 X -14)	+	(3 X 7)	=	21

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

18

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{2} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 16 & 23 \end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفة بنفسها لا يجوز الا اذا كانت مصفوفة مربعة لانها تحقق شرط الضرب

(	3	X	3	)	+	(	-1	X	2	)		=		7
(	3	X	-1	)	+	(	-1	X	5	)		=		-8

(	2	X	3	)	+	(	5	X	2	)		=		16
(	2	X	-1	)	+	(	5	X	5	)		=		23

19

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{2} = \underset{2 \times 3}{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}} \times \underset{2 \times 3}{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \text{لايجوز} \end{bmatrix}$$

غير متساويتان

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

20 **صناعة سيّارات:** تتوزَّع 3 مصانع لإحدى شركات صناعة السيّارات في 3 مدن، ويُبيِّن الجدول المجاور عدد ما يُنتِجه كل مصنع يوميًّا من 3 طرازات للسيّارات. إذا كان ربح الشركة في كل سيّارة من الطراز X هو JD1000، ومن الطراز D هو JD 2000، ومن الطراز R هو JD1500، فأستعمل ضرب المصفوفات في إيجاد ربح كل مصنع يوميًّا من جميع طرازات السيّارات (بافتراض أنَّ جميع السيّارات المُنتَجة مَبيعة).

	الطراز X	الطراز D	الطراز R
المدينة *A*	12	10	0
المدينة *B*	4	4	20
المدينة *C*	8	9	12

20

$$\underset{3X3}{\begin{bmatrix} 12 & 10 & 0 \\ 4 & 4 & 20 \\ 8 & 9 & 12 \end{bmatrix}} \mathbf{X} \underset{3X1}{\begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 2500 \end{bmatrix}} = \underset{3X1}{\begin{bmatrix} 32000 \\ 62000 \\ 56000 \end{bmatrix}}$$

(12 X 1000) + (10 X 2000) + (0 X 2500) =	32,000.00
(4 X 1000) + (4 X 2000) + (20 X 2500) =	62,000.00
(8 X 1000) + (9 X 2000) + (12 X 2500) =	56,000.00

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

21 إذا كان: $C = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$ فأُبيِّن أنَّ: $AB = AC$.

21

$A = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}_{2X2}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2X2}$ $C = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}_{2X2}$

$AB = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}_{2X2} X \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2X2} = \begin{bmatrix} 48 & 76 \\ 36 & 57 \end{bmatrix}_{2X2}$

(12 X 4) + (4 X 0) =	48
(12 X 6) + (4 X 1) =	76
(9 X 4) + (3 X 0) =	36
(9 X 6) + (3 X 1) =	57

$AC = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}_{2X2} X \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}_{2X2} = \begin{bmatrix} 48 & 76 \\ 36 & 57 \end{bmatrix}_{2X2}$

(12 X 5) + (4 X -3) =	48
(12 X 8) + (4 X -5) =	76
(9 X 5) + (3 X -3) =	36
(9 X 8) + (3 X -5) =	57

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

إذا كان: $R=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, P=\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$، وكان: $n=-2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

22 $(QR)P$

23 $n(PQ)$

24 $R(PQ)$

25 $(nR)P$

22

$R=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ 3X2, $Q=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ 2X3, $P=\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$ 2X2

(QR)P QR: $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 10 & -14 \end{bmatrix}$

2X3, 3X2, 2X2

(3 X -2) + (-1 X 9) + (2 X 3) =	-9
(3 X -1) + (-1 X -5) + (2 X -1) =	0
(4 X -2) + (2 X 9) + (0 X 3) =	10
(4 X -1) + (2 X -5) + (0 X -1) =	-14

(QR) P: $\begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 10 & -14 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -108 & -36 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$

2X2, 2X2, 2X2

(-9 X 12) + (0 X 9) =	-108
(-9 X 4) + (0 X 3) =	-36
(10 X 12) + (-14 X 9) =	-6
(10 X 4) + (-14 X 3) =	-2

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

23

$$R = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

3X2   2X3   2X2

n(PQ)   PQ

$$\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 & -4 & 24 \\ 39 & -3 & 18 \end{bmatrix}$$

2X2   2X3   2X3

(12 X 3) + (4 X 4) =	52
(12 X -1) + (4 X 2) =	-4
(12 X 2) + (4 X 0) =	24
(9 X 3) + (3 X 4) =	39
(9 X -1) + (3 X 2) =	-3
(9 X 2) + (3 X 0) =	18

n (PQ)

$$2 \times \begin{bmatrix} 52 & -4 & 24 \\ 39 & -3 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104 & -8 & 48 \\ 78 & -6 & 36 \end{bmatrix}$$

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

24

$$R = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}_{3X2} \quad Q = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{2X3} \quad P = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}_{2X2}$$

R(PQ)

$$PQ = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}_{2X2} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{2X3} = \begin{bmatrix} 52 & -4 & 24 \\ 39 & -3 & 18 \end{bmatrix}_{2X3}$$

$$R\,(PQ) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}_{3X2} \times \begin{bmatrix} 52 & -4 & 24 \\ 39 & -3 & 18 \end{bmatrix}_{2X3} = \begin{bmatrix} -143 & 11 & -66 \\ 273 & -21 & 126 \\ 117 & -9 & 54 \end{bmatrix}_{3X3}$$

(12 X 3) + (4 X 4) =	52
(12 X -1) + (4 X 2) =	-4
(12 X 2) + (4 X 0) =	24
(9 X 3) + (3 X 4) =	39
(9 X -1) + (3 X 2) =	-3
(9 X 2) + (3 X 0) =	18
(-2 X 52) + (-1 X 39) =	-143
(-2 X -4) + (-1 X -3) =	11
(-2 X 24) + (-1 X 18) =	-66
(9 X 52) + (-5 X 39) =	273
(9 X -4) + (-5 X -3) =	-21
(9 X 24) + (-5 X 18) =	126
(3 X 52) + (-1 X 39) =	117
(3 X -4) + (-1 X -3) =	-9
(3 X 24) + (-1 X 18) =	54

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

25

$$R = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}_{3X2} \quad Q = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{2X3} \quad P = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}_{2X2}$$

(n R)

$$2 \times \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 18 & -10 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

(n R) P

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 18 & -10 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}_{3X2} \times \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}_{2X2} = \begin{bmatrix} -66 & -22 \\ 126 & 42 \\ 54 & 18 \end{bmatrix}_{3X2}$$

(-4 X 12) + (-2 X 9) =	-66
(-4 X 4) + (-2 X 3) =	-22
(18 X 12) + (-10 X 9) =	126
(18 X 4) + (-10 X 3) =	42
(6 X 12) + (-2 X 9) =	54
(6 X 4) + (-2 X 3) =	18

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

إذا كان: $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ y & 4 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ x & 3 \end{bmatrix}$، حيث x, y عددان صحيحان موجبان، فأجد:

26 AB بدلالة x, y.

27 BA بدلالة x, y.

28 أصغر قيمة صحيحة موجبة لكلٍّ من x، و y التي تجعل $AB = BA$.

26

$$A = \underset{2X2}{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ X & 3 \end{bmatrix}} \quad B = \underset{2X2}{\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ Y & 4 \end{bmatrix}} \quad AB = \underset{2X2}{\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ (-2X)+3Y & 12 \end{bmatrix}}$$

27

$$B = \underset{2X2}{\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ Y & 4 \end{bmatrix}} \quad A = \underset{2X2}{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ X & 3 \end{bmatrix}} \quad BA = \underset{2X2}{\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ (2Y)+4X & 12 \end{bmatrix}}$$

28 أصغر قيمة صحيحة موجبة لكلٍّ من x، و y التي تجعل $AB = BA$.

28) -2X+3Y = 2Y+4X   -2(1)+3X6= -2+18= 16

-2X-4X = 2Y -3Y   2(6)+4(1) = 12 +4 = 16

-6X = -1 Y

X= 0 , Y= 0 الصفر ليس من ضمن الحل لأنه طالب قيمة صحيحة موجبة

X= 1 , Y = 6

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

29 **مُكسَّرات**: يُعبِّئ مَحمص خليطًا من المُكسَّرات والفواكه المُجفَّفة في نوعين من الأكياس كما في الجدول الأيسر، ويُبيِّن الجدول الأيمن عدد وحدات البروتين والكربوهيدرات والدهون في الغرام الواحد من المُكسَّرات والفواكه المُجفَّفة. أستعمل ضرب المصفوفات لإيجاد عدد وحدات البروتين والكربوهيدرات والدهون في كل نوع.

	بروتين	كربوهيدرات	دهون
مُكسَّرات	20	21	52
فواكه مُجفَّفة	3	65	1

	مُكسَّرات (g)	فواكه مُجفَّفة (g)
الكيس 1	150	150
الكيس 2	200	100

29

$$\begin{bmatrix} 150 & 150 \\ 200 & 100 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 20 & 21 & 52 \\ 3 & 65 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3450 & 12900 & 7950 \\ 4300 & 10700 & 10500 \end{bmatrix}$$

2X2   2X3   2X3

$(150 \times 20) + (150 \times 3) = 3450$

$(150 \times 21) + (150 \times 65) = 12900$

$(150 \times 52) + (150 \times 1) = 7950$

$(200 \times 20) + (100 \times 3) = 4300$

$(200 \times 21) + (100 \times 65) = 10700$

$(200 \times 52) + (100 \times 1) = 10500$

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

30 أحُلّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مسألة اليوم دوَّنت سلمى في الجدول المجاور عدد ما باعته في متجرها مــن أكواب حافظة للحرارة مُتعدِّدة الحجوم (كبيرة، مُتوسِّــطة، صغيــرة) في أحد الأيام. كذلــك دوَّنت طريقة بيع هذه الأكواب؛ وهي إمّا مباشــرة من المتجر، وإمّا عبر شبكة الإنترنت. إذا كان سعر الكوب الكبير 4.5 JD، وسعر الكوب المُتوسِّط 4 JD، وسعر الكوب الصغير 3.5 JD، فكيف يُمكِن استعمال ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الذي حصلت عليه سلمى من بيع الأكواب بكلتا طريقتي البيع؟

حجم الكوب	كبير	مُتوسِّط	صغير
عبر شبكة الإنترنت	5	4	2
من المتجر	3	5	9

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4.5 \\ 4.0 \\ 3.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45.5 \\ 65.0 \end{bmatrix}$$

2X3 3X1 2X1

(5 X 4.5) + (4 X 4) + (2 X 3.5) =	45.5
(3 X 4.5) + (5 X 4) + (9 3.5) =	65.0

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

مهارات التفكير العليا

31 أكتشف الخطأ: حَسَبت كلٌّ من رنا وعبير العنصر c_{23} في المصفوفة: $C = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 12 \\ -2 & 3 & 4 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & -2 & -6 \\ 11 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

كما يأتي:

إجابة عبير	إجابة رنا
$c_{23} = 12 - 8 - 18$	$c_{23} = -8 - 18 + 20$
$= -14$	$= -6$

أيُّهما إجابتها صحيحة؟ أُبرِّر إجابتي.

C 2 3 = (الصف الثاني من الاولى X العمود الثالث من الثانية)

= (-2X4) + (3X-6) + (4X5)

= -8 -18 +20 = -6 إجابة رنا هي الصحيحة

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

32 تبرير: إذا كان A, B مصفوفتين مُربَّعتين من الرتبة n، فلماذا $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$؟

أولا نتذكر ان عملية الضرب في المصفوفات ليست تبادلية

AB≠ BA

فك الاقواس في المسالة ثم استخدم خاصية التوزيع لإيجاد الإجابة

$(A+B)^2$= (A+B) (A+B)

= A^2+AB+BA+B^2 ≠ A^2+2AB+B^2

في المصفوفات لا يجوز كتابة AB وBA = 2AB لانهما ليست متساويتان في المصفوفات

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

33 مسألة مفتوحة: أكتب المصفوفتين A, B غير الصفريتين، بحيث يكون $AB = BA$.

- لتحقيق الشرط AB = BA، يجب أن تكون المصفوفتان A وB مصفوفتين مربعتين متساويتين في الحجم،
- أن يكون بينهما تبادل. على سبيل المثال، إذا كانت A هي مصفوفة الوحدة (يعني قطرها الرئيسي = 1)، فإن أي مصفوفة مربعة B بنفس الحجم ستحقق الشرط AB = BA = B،
- أو إذا كانت A وB مصفوفتين قطريتين (يعني القطر الرئيسي لا يساوي صفر و باقي العناصر = 0) متساويتين في الحجم، فإن حاصل ضربهما AB وBA سيكون متطابقًا.

مثال 1) اختار A مصفوفة وحدة و B أي مصفوفة بشرط مربعة لها نفس رتبة A

$$A\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{2X2} \times B\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}_{2X2} = AB\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}_{2X2}$$

(1 x 2) + (0 x 4) =	2
(1 x 3) + (0 x 5) =	3
(0 x 2) + (1 x 4) =	4
(0 x 3) + (1 x 5) =	5

$$B\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}_{2X2} \times A\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{2X2} = BA\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}_{2X2}$$

(2 x 1) + (3 x 0) =	2
(2 x 0) + (3 x 1) =	3
(4 x 1) + (5 x 0) =	4
(4 x 0) + (5 x 1) =	5

AB = BA

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

مثال 2 نختار المصفوفة A و B مصفوفات قطرية مربعة من نفس الرتبة

$$A\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x3} \times B\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3x3} = AB\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$B\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3x3} \times A\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x3} = BA\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{2X2}$$

$AB = BA$

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

34 تحدٍّ: أجد قيمة كلٍّ من e, f, g, h التي تجعل المعادلة الآتية صحيحة:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$$

اجري عملية الضرب سننتج معادلات حل كل معادلتين تحتوي على نفس المجاهيل

- (3e+4g)= 1 1
- (3f+4h)=12.................... 2
- (-e+5g)= 6 3
- -f + 5h = 15 4

حل معادلات بطريقة الحذف (1 و 3)	حل معادلات 2 و 4
3e+4g= 1 -e+5g= 6 ضرب ب 3 وجمع المعادلتين) 3e+4g= 1 -3e+15g=18 19 g = 19 $g = \frac{19}{19} = 1$ عوض لإيجاد 3 e + 4 (1) = 1 3e = 1- 4 $e=\frac{-3}{3}$ = -1	3f+4h=12 -f+5h=15 ضرب ب 3 وجمع المعادلتين 3f+4h = 12 -3f+15h=45 19h= 57 $h=\frac{57}{19} = 3$ عوض لايجاد 3(f) +4x3= 12 3f+12=12 3f= 12-12 f=0

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Matrix Multiplication

إذا كانت $A_{5\times3}$، وكانت $B_{2\times3}$، وكانت $C_{3\times5}$، فأُحدِّد عمليات الضرب المُمكِنة ممّا يأتي، ثمَّ أجد رتبة المصفوفة الناتجة:

1

5 3 — 2 3 غير متساوية

لايمكن اجراء الضرب

2 AC

A — C متساوية

5 3 — 3 5 يمكن الضرب

رتبة المصفوفة الجديدة 5X5

3 CA

C — A متساوية

3 5 — 5 3 يمكن الضرب

رتبة المصفوفة الجديدة 3X3

4 BC

B — C متساوية

2 3 — 3 5 يمكن الضرب

رتبة المصفوفة الجديدة 2X5

5 CB

C — B غير متساوية

3 5 — 2 3 لايمكن اجراء الضرب

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي (إنْ أمكن):

⑥ AB

$$A \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad B \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad AB \begin{bmatrix} 23 & 7 & -20 \\ -11 & 7 & 26 \end{bmatrix}$$

⑦ BA

$$B \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad A \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad BA \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}$$

2X3 2X2 لا يجوز

⑧ BC

$$B \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad C \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad BC \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ -5 & 30 \end{bmatrix}$$

2X3 3X2 2X2

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

⑨ CB

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad CB = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 10 \\ -32 & -9 & 29 \\ -15 & 8 & 33 \end{bmatrix}$$

3X2 2X3 3X3

⑩ BD

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \quad BD = \begin{bmatrix} -7 \\ -16 \end{bmatrix}$$

2X3 3X1 2X1

⑪ **2A+3BC**

$$2A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \quad BC = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ -5 & 30 \end{bmatrix} \quad 3BC = \begin{bmatrix} -12 & 27 \\ -15 & 90 \end{bmatrix}$$

2X2

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

$$2A\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} + 3BC\begin{bmatrix} -12 & 27 \\ -15 & 90 \end{bmatrix} \quad 2A+3BC\begin{bmatrix} -6 & 23 \\ -13 & 98 \end{bmatrix}$$

2X2 2X2 2X2

⑫ A^2

$$A\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad A\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad AA\begin{bmatrix} 7 & -14 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}$$

2X2 2X2 2X2

⑬ A^3

$$AA\begin{bmatrix} 7 & -14 \\ 7 & 14 \end{bmatrix} \quad A\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad AAA\begin{bmatrix} 7 & -70 \\ 35 & 42 \end{bmatrix}$$

2X2 2X2 2X2

⑭ $(CB)^2$

$$CB = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 10 \\ -32 & -9 & 29 \\ -15 & 8 & 33 \end{bmatrix}$$

$$CB \begin{bmatrix} 2 & 8 & 10 \\ -32 & -9 & 29 \\ -15 & 8 & 33 \end{bmatrix} \quad CB \begin{bmatrix} 2 & 8 & 10 \\ -32 & -9 & 29 \\ -15 & 8 & 33 \end{bmatrix} \quad CBCB \begin{bmatrix} -402 & 24 & 582 \\ -211 & 57 & 376 \\ -781 & 72 & 1171 \end{bmatrix}$$

3X3 3X3 3X3

⑮ إذا كانت: $\begin{bmatrix} 7 & -7 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ x & 2 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x، و y.

- 1(Y) + 3(3) = 7 ....① Y + 9 = 7 Y = 7-9 = -2
- 1(-1) +3(-2) = -7 ....② -1-6=-7
- XY + 2(3) = 8..............③ XY + 6 = 8 XY = 8- 6 =2
- X(-1) +2(-2) = -3.............④ -X +4 = -3 -X = -3+4 = -1

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 7 & -7 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$$

2 X 2   2 X 2   2X2

16 أجد ناتج: $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \times [3 \quad 2 \quad -4]$.

$$KQ = \begin{bmatrix} 5 & 16 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \quad KQR = \begin{bmatrix} -18 & 90 \end{bmatrix}$$

1X2   2X2   1X2

$$K = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad KQ = \begin{bmatrix} 5 & 16 \end{bmatrix}$$

1X3   3X2   1X2

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

17 إذا كان: $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$، فأوجد B^3.

B $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

2X2

B $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

2X2

BB $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2X2

BB $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2X2

B $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

2X2

BBB $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

2X2

الدرس
3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

18 إذا كان: $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \end{bmatrix}$، فأجد المصفوفة C، بحيث يكون $A + C = BC$.

$$A = \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \end{bmatrix} + C = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} . C \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

مصفوفة C يجب ان تكون 2X1 لكي تحقق شروط الجمع

شكل معادلات و حل المسالة

A+C = $\begin{bmatrix} 6 + x \\ 18 + y \end{bmatrix}$ = BC = $\begin{bmatrix} 3x + 4y \\ 2x - y \end{bmatrix}$

1) 6 + x = 3x + 4 y

- 6 + x -3x = 4 y
- 6 -2x = 4 y
- -2x = 4y – 6
- X = -2y +3
- X = 3-2y

$$B \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad C \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} \quad BC \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \end{bmatrix}$$

2) 18 + y = 2x -y

- 18+y = 2 (3-2y) -y
- 18+y = 6 -4y-y
- 18+y = 6-5y
- Y+5y = 6 -18
- 6y = -12
- Y = -2
- X=3-2x-2 = 3+4 = 7

$$A \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} \quad A+C \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \end{bmatrix}$$

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

مبيعات: يُبيِّن الجدول الأيمن قيمة مبيعات أحذية الرجال والنساء والأطفال (بالدنانير) لثلاثة مندوبي مبيعات، ويُبيِّن الجدول الأيسر نسب العمولة القديمة والجديدة للمبيعات. أُجيب عن السؤالين التاليين اعتمادًا على المعلومات الواردة في هذين الجدولين:

	أحذية الرجال	أحذية النساء	أحذية الأطفال
المندوب 1	1200	2300	900
المندوب 2	3100	2800	1100
المندوب 3	3700	2600	800

	النسبة القديمة	النسبة الجديدة
أحذية الرجال	9%	9.5%
أحذية النساء	9%	10%
أحذية الأطفال	13%	12%

19 أجد المصفوفة التي تُمثِّل ما يجنيه كلٌّ من المندوبين الثلاثة وَفق النسبة الجديدة والنسبة القديمة

$$A = \begin{bmatrix} 1200 & 2300 & 900 \\ 3100 & 2800 & 1100 \\ 3700 & 2600 & 800 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 9\% & 9.50\% \\ 9\% & 10\% \\ 13\% & 12\% \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 432.00 & 452.00 \\ 674.00 & 706.50 \\ 671.00 & 707.50 \end{bmatrix}$$

3X3 3X2 3X2

المجوع				
منودوب 1	**884.00**	=	452.00	+ 432.00
منودوب 2	**1,380.50**	=	706.50	+ 674.00
منودوب 3	**1,378.50**	=	707.50	+ 671.00

20 أُحدِّد المندوب الأكثر استفادة من تغيير نسب العمولة، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

المندوب الثاني

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Multiplying Matrices

أُحدِّد إذا كانت كل عبارة ممّا يأتي صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا، ثمَّ أُبرِّر إجابتي:

21 إذا أمكن إيجاد AB وBA، فإنَّ المصفوفة A والمصفوفة B مُربَّعتان.

22 إذا كان AB مصفوفة صفرية، فإنَّ A مصفوفة صفرية، أو B مصفوفة صفرية.

21) ليست صحيحة دائما لأنه يجب ان تكون مربعتان و من نفس الحجم أي نفس الرتبة

22) أي مصفوفة تضرب بمصفوفة صفرية الناتج مصفوفة صفرية العبارة صحيحة دائما

اعداد م. محمد اسعد الخطيب