الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

المُحدِّدات

المُحدِّدة (determinant) للمصفوفة المُربَّعة A هي عدد حقيقي يرتبط بالمصفوفة A، ويُرمَز إليه بالرمز $|A|$.

يُطلَق على مجموعة العناصر المُمتدَّة من الزاوية اليسرى العلوية إلى الزاوية اليمنى السفلية في المصفوفة اسم **القُطْر الرئيس** للمصفوفة (main diagonal).

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & -8 \\ 9 & 8 & 10 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

القُطْر الرئيس

للقُطْر الرئيس دور أساسي في إيجاد مُحدِّدة مصفوفة من أيِّ رتبة. وفي ما يأتي طريقة إيجاد مُحدِّدة المصفوفة ذات الرتبة 2×2، أو ما يُسمَّى **مُحدِّدة الدرجة الثانية** (second order determinant).

مراجعة : المصفوفة المربعة : هي المصفوفة التي تكون فيها عدد الصفوف = عدد الاعمدة (لها نفس الرتبة)

مثال :

- مصفوفة مربعة 2X2 هي مصفوفة مربعة لها عدد صفوف 2 و عدد أعمدة 2 تسمى أيضا مصفوفة مربعة من الدرجة الثانية
- مصفوفة مربعة 3X3 هي مصفوفة مربعة لها عدد صفوف 3 و عدد أعمدة 3 تسمى أيضا مصفوفة مربعة من الدرجة الثالثة
- مصفوفة مربعة 4X4 هي مصفوفة مربعة لها عدد صفوف 4 و عدد أعمدة 4 تسمى أيضا مصفوفة مربعة من الدرجة الرابعة

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

مراجعة مفاهيم وتعريف المصفوفة و عناصرها

ليكن المصفوفة A

$$A_{3X3}=\begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix}$$

- اسم المصفوفة هي الحرف الكبير A
- رتبة المصفوفة (mxn) = 3x3 = عدد الصفوف x عدد الاعمدة
- عناصر المصفوفة هي الأرقام او الاحرف التي تكون داخل المصفوفة
- يسمى العنصر بحرف صغير و يرمز له بموقعه (مكان الصف ثم مكان العمود
- a_{ij} حيث i هي رقم الصف و j رقم العمود
- a_{13} هو العنصر الذي يقع في الصف رقم 1 و العمود رقم 3
- a_{33} هو العنصر الذي يقع في الصف رقم 3 و العمود رقم 3
- a_{23} هو العنصر الذي يقع في الصف رقم 2 و العمود رقم 3
- a_{31} هو العنصر الذي يقع في الصف رقم 3 و العمود رقم 1

هذا شكل المصفوفة القياسي (دائما يبقى في الذاكرة)

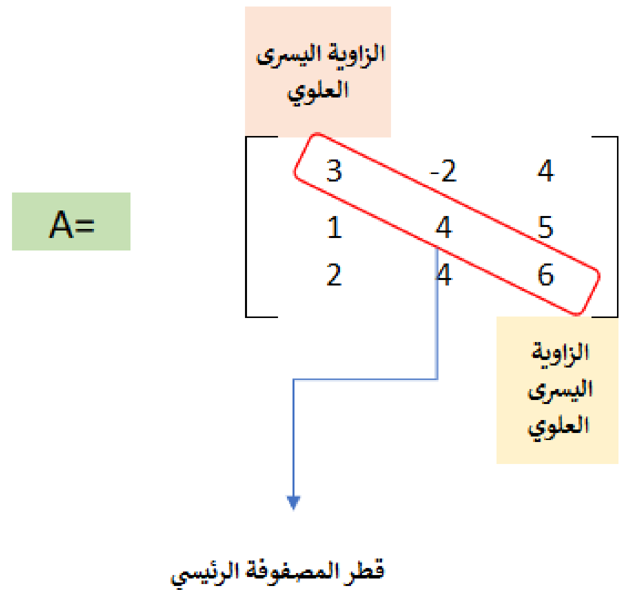
الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

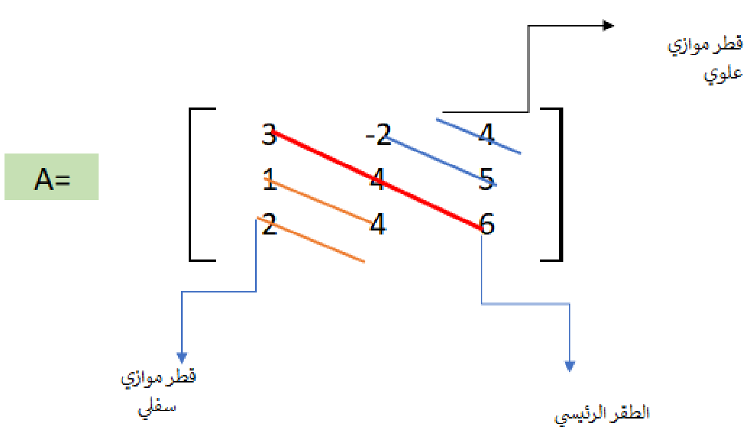
مفهوم جديد :

- ❖ اين يكون رقم الصف = رقم العمود
- ❖ الإجابة في العناصر التالية : a11,a22,a33
- ❖ هذه العناصر تشكل ما يسمى (القطر الرئيسي للمصفوفة)

اذن دائما العناصر التي تمتد من الزاوية اليسار (الطرف العلوي) الى الزاوية اليمنى (الطرف السفلي) تشكل قطر المصفوفة الرئيسية



يوجد اقطار موازية للقطر الرئيسي (فوق القطر الرئيسي و اسفل القطر الرئيسي



الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

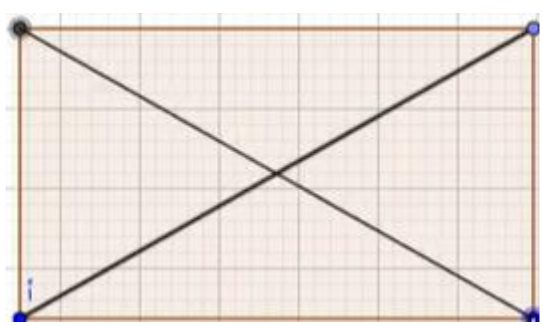
- يوجد قطر ثاني للمصفوفة لكنه ليس القطر الرئيسي و هو عكس القطر الرئيسي و يتكون من العناصر $a13,a22,a31$

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & \boxed{4} \\ 1 & \boxed{4} & 5 \\ \boxed{2} & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

قطر المصفوفة الثاني

تذكر من تعريف المصفوفة انها مستطيل

للمستطيل قطرين (الخط الواصل من الزاوية للزاوية هو القطر)



اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

- المحددة ؛ هي عدد حقيقي (يعني القيمة النهائية بعد حسابها ينتج عدد حقيقي مثل 3 و 5 و 9) و هكذا ، يرتبط في المصفوفة يعني نجده من خلال المصفوفة
- الفائدة من هذا الرقم هو قياس قدرة المصفوفة على التمدد او التقلص وهذه فائدة هندسية
- اذا كان المحدد = صفر فهذا يعني ان المصفوفة غير قابلة للعكس (إيجاد معكوس لها)
- اذا كان المحدد لا يساوي صفر يدل على ان هناك معكوس للمصفوفة

كيف نسمي المحددة

اذا كان هناك مصفوفة مربعة اسمها A فانه يرمز للمحددة $|A|$

تغير رمز المصفوفة الى
خط يشبه القيمة
المطلقة

$$[A] \longrightarrow |A|$$

طريقة إيجاد المحددة من الدرجة الثانية

أولا : للمصفوفة المربعة من الدرجة الثانية (يسمى محددة الدرجة الثانية)

يجب ان تكون المصفوفة مربعة و من الدرجة الثانية **الرتبة 2x2**

مُحدِّدة الدرجة الثانية

مفهوم أساسي

بالكلمات: يُرمَز إلى مُحدِّدة المصفوفة: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$، وتساوي قيمتها ناتج ضرب عنصري القُطْر الرئيس مطروحًا منه ناتج ضرب عنصري القُطْر الآخر.

بالرموز: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ من المُحدِّدات الآتية:

a) $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$

D= $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ (0 x 4) – (-3 x 1) = 3

D= $\begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ (5 x 0) – (20 x 2) = -40

D= $\begin{vmatrix} 9 & 5 \end{vmatrix}$ (9 x #) – (5 x 3) = -33

طريقة إيجاد المحددة من الدرجة الثالثة

للمصفوفة المربعة من الدرجة الثالثة (يسمى محددة الدرجة الثالثة)يجب ان تكون المصفوفة مربعة و من الدرجة الثالثة الرتبة 3x3

الطريقة الأولى تسمى : طريقة قاعدة الأقطار

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

المطلوب هو تشكيل اقطار رئيسية كل قطر من 3 عناصر

اذا نظرت لأقطار المصفوفة الثلاثية نجد

- **القطر الرئيسي مكون من 3 عناصر**
- **القطر الموازي الأول مكون من 2 عنصر (مشكلة) يجب ان يتكون من 3 عناصر**
- **القطر الموازي الثاني مكون من عنصر 1 (مشكلة) يجب ان يتكون من 3 عناصر**

لحل المشكلة

- **نعيد كتابة العمود الأول و العمود الثاني على يمين المصفوفة ثم نشكل الأقطار**
- **نجد ان عدد العناصر لكل قطر أصبحت 3 عناصر و هو المطلوب**

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix}\begin{matrix} \mathbf{5} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{2} \end{matrix}$$

- تتشكل القطر الرئيسي مع الأقطار الموازية له
- نجد حاصل ضرب كل قطر من الأقطار الثلاث
- نجمع النواتج
  - القطر الرئيسي =(5x7x8) 280
  - القطر الموازي الأول =(-3x6x-2) 36
  - القطر الموازي الثاني =(1x4x2) 8
  - اجمع النواتج =(280+36+8) 324 1
- نعيد نفس الخطوات على الأقطار المعاكسة
- القطر الرئيسي المعاكس =(1x7x-2) -14
- القطر الموازي الأول =(5x6x-2) 60
- لقطر الموازي الثاني =(-3x4x8) -96
- اجمع النواتج =(14+60-96) -50 2

العمل على القطر المعاكس

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix}\begin{matrix} \mathbf{5} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{2} \end{matrix}$$

القيمة النهائية = ناتج 1 – ناتج 2 ..... = (324 - - 50) = (324 + 50) = 374

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر

Determinants and Cramer's Rule

الطريقة الثانية تسمى : استخدام محددة الدرجة الثانية

الفكرة هي تحويل المصفوفة الى ثنائية و يكون ذلك عن طريق 3 خطوات كل مرة نشطب قيمة عمود

أولا : نضع الإشارات التالية بالترتيب فوق كل عمود من المصفوفة

$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ \end{array}$ $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$	$+$ -4 $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$	$-$ -3 $\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$	$+$ 6 $\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$

نجمع النواتج

استخدام المحددة الثانية	الطريقة الثانية

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

دائما نغير إشارة العنصر الثانى فى الصف الأول

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} \quad + \quad -4 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -4\,(\,(\,5 \times 3\,) - (\,1 \times 6\,)\,) = -4\,(\,9\,) = -36$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} \quad - \quad -3 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3\,(\,(\,6 \times 3\,) - (\,1 \times 1\,)\,) = -3\,(\,17\,) = -51$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} \quad + \quad 6 \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 6\,(\,(\,6 \times 6\,) - (\,5 \times 1\,)\,) = 6\,(\,31\,) = 186$$

$$= (\,-36\,) + (\,-51\,) + (\,186\,) = \boxed{99}$$

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

تحقق من فهمي

طريقة الأقطار	العمل على القطر الرئيسي

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 7 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{matrix}$$

(1 x 3 x 2)=	6
(3 x 4 x -5)=	-60
(9 x -2 x 7)=	-126
	-180

العمل على القطر المعاكس

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 7 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{matrix}$$

(9 x 3 x -5)=	-135
(1 x 4 x 7)=	28
(3 x -2 x 2)=	-12
	-119

الطريقة الثانية	استخدام المحددة الثانية

دائما نغير إشارة العنصر الثانى فى الصف الأول

+ − +

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$+$ $1 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 1 ((3 \times 2) - (4 \times 7)) = 1 (-22) = -22$

$-$ $-3 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -3 ((-2 \times 2) - (4 \times -5)) = -3 (16) = -48$

$+$ $9 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = 9 ((-2 \times 7) - (3 \times -5)) = 9 (1) = 9$

$= (-22) + (-48) + (9) = \boxed{-61}$

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

اتحقق من فهمي

طريقة الأقطار	العمل على القطر الرئيسي

b)

0	-5	-1	0	-5	0	(0 x 1 x 9)=	0
4	1	6	4	1	-210	(-5 x 6 x 7)=	-210
7	8	9	7	8	-32	(-1 x 4 x 8)=	-32
					-242		-242

العمل على القطر المعاكس

0	-5	-1	0	-5	-7	(-1 x 1 x 7)=	-7
4	1	6	4	1	0	(0 x 6 x 8)=	0
7	8	9	7	8	-180	(-5 x 4 x 9)=	-180
					-187		-187

= (-242) - (-187) = -55

الطريقة الثانية	استخدام المحددة الثانية

دائما نغير إشارة العنصر الثانى فى الصف الأول

+	−	+

b)

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad + \quad 0 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 0\,((1 \times 9) - (6 \times 8)) = 0\,(-39) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad - \quad 5 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 5\,((4 \times 9) - (6 \times 7)) = 5\,(-6) = -30$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad + \quad -1 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -1\,((4 \times 8) - (1 \times 7)) = -1\,(25) = -25$$

= (0) + (-30) + (-25) = -55

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

حساب مساحة المُثلَّث باستعمال المُحدِّدات

يُمكِن حساب مساحة مُثلَّث عُلِمت إحداثيات رؤوسه في المستوى الإحداثي باستعمال القاعدة الآتية.

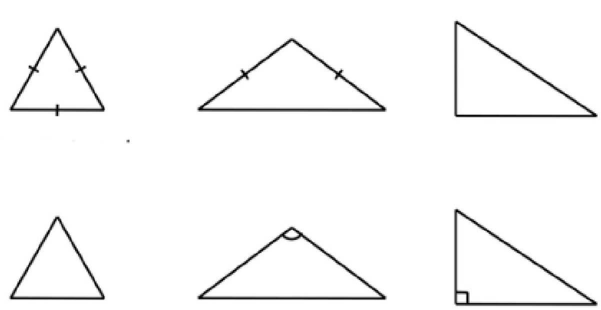
مفهوم أساسي مساحة مُثلَّث مرسوم في المستوى الإحداثي باستعمال المُحدِّدات

مساحة المُثلَّث الذي إحداثيات رؤوسه: $X(x_1, y_1), Y(x_2, y_2), Z(x_3, y_3)$، هي نصف القيمة المُطلَقة للعدد A، حيث:

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

المثلث هو عبارة عن شكل هندسي مكون من 3 اضلاع و 3 زوايا له أنواع مختلفة مثل

- متساوي الساقين (مراجعة قانون المسافة بين نقطتين و قانون منتصف المسافة)
- متساوي الاضلاع
- مختلف الاضلاع
- المثلث القائم الزاوية (مراجعة قانون فيثاغورس)



الدرس
4

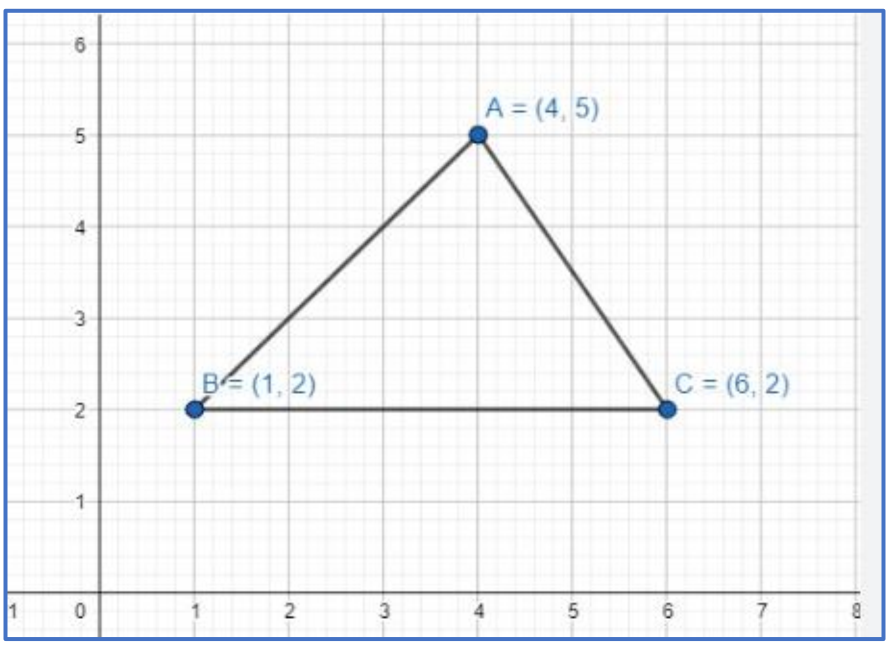
المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

- يتم تمثيل المثلث على المستوى الاحداثي من خلال احداثيات رؤوس المثلث
- أي نقطة على المستوى تتمثل بقيمة x و y
- النقطة x,y في المصفوفات تتمثل في صف

A (x_1, y_1)   B (x_2, y_2)   C (x_3, y_3)

كل نقطة نضعها في صف من المصفوفة بالترتيب

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$



اعداد م. محمد اسعد الخطيب

حساب مساحة المثلث عن طريق المحدد

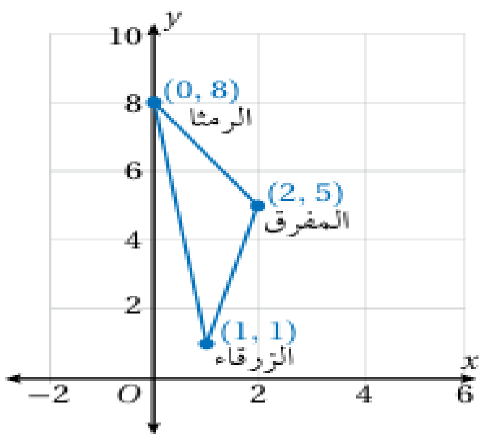
$A\left(\frac{1}{2}\right)$ x (القاعدة) x (الارتفاع)

- شكل من رؤوس المثلث محددة ثلاثية
- العمود الثالث دائما عناصره (1) (1) (1)
- جد المحدد الثلاثية و اقسمها على 2

مثال جد مساحة المثلث في الشكل المقابل

أتحقَّق من فهمي

خرائط: يظهر في المستوى الإحداثي المجاور إحداثيات كلٍّ من مدينة الزرقاء، ومدينة الرمثا، ومدينة المفرق. إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تُمثِّل 10 km، فأجد مساحة المنطقة التي رؤوسها هذه المدن الثلاث.



الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

العمل على القطر الرئيسي					طريقة الأقطار		
A	1	1	B	2	5	C	0	8

1	1	1	1	1	5	(1 x	5 x	1)=	5
2	5	1	2	5	0	(1 x	1 x	0)=	0
0	8	1	0	8	16	(1 x	2 x	8)=	16
					21				21

العمل على القطر المعاكس

1	1	1	1	1	0	(1 x	5 x	0)=	0
2	5	1	2	5	8	(1 x	1 x	8)=	8
0	8	1	0	8	2	(1 x	2 x	1)=	2
					10				10

= (21) - (10) =	11		
مساحة المثلث =	$\frac{1}{2}$ x القاعدة x الارتفاع		
مساحة المثلث =	0.5 11 =	5.50	
كل وحدة تمثل	10 km	55.00	KM^2

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

حلُّ أنظمة المعادلات والمُحدِّدات

يُمكِن استعمال المُحدِّدات لحلِّ أنظمة معادلات خطِّيَّة بمُتغيِّرين، كلٌّ منها مكتوب في صورة: $ax + by = c$. أُنشِئ أوَّلًا مصفوفة عناصرها معاملات المُتغيِّرين x و y، وهي تُسمّى **مصفوفة المعاملات** (coefficient matrix)، ثمَّ أحسُب مُحدِّدتها؛ فإذا كانت المُحدِّدة لا تساوي صفرًا، فإنَّه يوجد حلٌّ وحيد للنظام. أمّا إذا كانت المُحدِّدة تساوي صفرًا، فإمّا ألّا يكون للنظام حلٌّ، وإمّا أنْ يكون له عدد لانهائي من الحلول. وفي حال لم تكن قيمة مُحدِّدة مصفوفة المعاملات صفرًا، فيُمكِن استعمال **قاعدة كريمر** (Cramer's rule) لإيجاد حلِّ النظام كما هو مُبيَّن أدناه.

مفهوم أساسي — **قاعدة كريمر**

إذا كان: $C = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات للنظام: $\begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix}$،

وكان: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$، حيث $D \neq 0$، فإنَّ حلَّ النظام هو:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{D}.$$

شرح المفهوم

1- نستخدم المحددة لتحديد ما اذا كان نظام المعادلات له حلول ام لا

2- اذا كانت قيمة المحددة = صفر يعني لا يوجد حل لنظام المعادلات او له عدد لا نهائي من الحلول

3- اذا كانت المحددة لا تساوي صفر (سواء موجب او سالب هذا يعني يوجد حل للنظام)

4- لايجاد هذا الحل نستخدم قاعدة كريمر

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

خطوات الحل

أتحقَّق من فهمي

أحُلّ كل نظام معادلات ممّا يأتي باستعمال قاعدة كريمر (إنْ أمكن):

a) $-2x + 7y = 12$, $x + y = 3$

b) $4x - 3y = 29$, $2y + 5x = -5$

رتب المعادلات (اذا لم تكن مرتبة)

a) $-2x + 7y = 12$

$x + y = 3$

شكل مصفوفة للارقام ما قبل إشارة المساواة ومصفوفة للارقام ما بعد المساواة

$$\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix} \text{............} ①$$

جد المحددة للطرف الايسر و يكون المحدد الرئيسي D

$$|D| = \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$|D| = (-2X1) – (7X1) = -2-7=-9$

لايجاد محدد X نشكل محددة نستبدل عمود X بالقيم التي بعد المساواة و نجد المحدد DX

$$|D_X| = \begin{vmatrix} 12 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \text{..................} ②$$

DX= 12 X 1 – 7 X3 = 12 -21 = 9

لايجاد محدد Y نشكل محددة نستبدل عمود Y بالقيم التي بعد المساواة و نجد المحدد DY

$$|D_Y| = \begin{vmatrix} -2 & 12 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \text{..................} ③$$

DY= -2 X 3 – 12 X1 = -6 -12 = -18

X = DX /D

Y = DY /D

$X = \frac{9}{-9} = -1$

$Y = \frac{-18}{-9} = 2$

b) $4x - 3y = 29$

$2y + 5x = -5$

رتب المعادلات بحيث x تحت بعض و Y تحت بعض

- **$4x - 3Y = 29$**
- **$5x + 2Y = -5$**

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -5 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

شكل مصفوفة للارقام ما قبل إشارة المساواة ومصفوفة للارقام ما بعد المساواة

$$|D| = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

جد المحددة للطرف الايسر و يكون المحدد الرئيسي D

$|D| = (4X2) - (-3X5) = 8 + 15 = 23$

$$|D_X| = \begin{vmatrix} 29 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

لايجاد محدد X نشكل محددة نستبدل عمود X بالقيم التي بعد المساواة و نجد المحدد DX

DX= 29 X 2 – (-3 X-5) = 58 -15 = 43

$$|D_Y| = \begin{vmatrix} 4 & 29 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

لايجاد محدد Y نشكل محددة نستبدل عمود Y بالقيم التي بعد المساواة و نجد المحدد DY

DY= 4 X -5 – (29x5) = -20-145= -165

X = DX /D

Y = DY /D

X = 43/23

Y = -165/23

أتحقَّق من فهمي

أحُلُّ كل نظام معادلات ممّا يأتي باستعمال قاعدة كريمر (إنْ أمكن):

a)

$$-2x + 7y = 12$$
$$1x + 1y = 3$$

رتب المعادلة
أنشئ مصفوفة للمعادلات
احسب المحددا الرئيسي
احسب محدد x و y

$$\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$|D| \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2 X 1) - (7 X 1) = -9$$

$$|DX| \begin{vmatrix} 12 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (12 X 1) - (7 X 3) = -9$$

$$x = \frac{DX}{D} \qquad x = 1$$

$$|DY| \begin{vmatrix} -2 & 12 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-2 X 3) - (12 X 1) = -18$$

$$y = \frac{DY}{D} \qquad y = 2$$

حل النظام	(1 , 2)

رتب المعادلة
أنشئ مصفوفة للمعادلات
احسب المحددا لرئيسي
احسب محدد x و y

b)

$$4x + -3y = 29$$
$$5x + 2y = -5$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$D \quad \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (4 \times 2) - (-3 \times 5) = 23$$

$$DX \quad \begin{vmatrix} 29 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = (29 \times 2) - (-3 \times -5) = 43$$

$$x = \frac{DX}{D} \qquad x = 2$$

$$DY \quad \begin{vmatrix} 4 & 29 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = (4 \times -5) - (29 \times 5) = -165$$

$$y = \frac{DY}{D} \qquad y = -7$$

حل النظام	(2 , -7)

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أجد قيمة كلٍّ من المُحدِّدات الآتية:

1. $D = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ $(2 \times 3) - (-5 \times 1) = 11$

2. $D = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$ $(0 \times 1) - (5 \times -4) = 20$

3. $D = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ $(3 \times 4) - (6 \times 2) = 0$

4. $D = \begin{vmatrix} -5 & 1 \end{vmatrix}$ $(-5 \times 4) - (1 \times 3) = -23$

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

أجد قيمة كلٍّ من المُحدِّدات الآتية باستعمال قاعدة الأقطار، ثمَّ باستعمال مُحدِّدة المصفوفة 2 × 2:

5

العمل على القطر الرئيسي							طريقة الأقطار	
0	-3	1	0	-3	0		(0 x 8 x 3)=	0
5	8	-2	5	8	24		(-3 x -2 x 4)=	24
4	7	3	4	7	35		(1 x 5 x 7)=	35
					59			59

العمل على القطر المعاكس								
0	-3	1	0	-3	32		(1 x 8 x 4)=	32
5	8	-2	5	8	0		(0 x -2 x 7)=	0
4	7	3	4	7	-45		(-3 x 5 x 3)=	-45
					-13			-13

= (59) - (-13) = 72

استخدام المحددة الثانية	الطريقة الثانية

+	−	+

دائما نغير إشارة العنصر الثانى فى الصف الأول

5

0 -3 1 5 8 -2 4 7 3	+ 0	8 -2 7 3	= 0 ((8 x 3) - (-2 x 7)) =	0 (38)=	0
0 -3 1 5 8 -2 4 7 3	− 3	5 -2 4 3	= 3 ((5 x 3) - (-2 x 4)) =	3 (23)=	69
0 -3 1 5 8 -2 4 7 3	+ 1	5 8 4 7	= 1 ((5 x 7) - (8 x 4)) =	1 (3)=	3

= (0) + (69) + (3) = 72

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

طريقة الأقطار	العمل على القطر الرئيسي

6

-4	3	2	-4	3	-40	(-4 x 5 x 2)=	-40
6	5	1	6	5	-12	(3 x 1 x -4)=	-12
-4	3	2	-4	3	36	(2 x 6 x 3)=	36
					-16		-16

العمل على القطر المعاكس

-4	3	2	-4	3	-40	(2 x 5 x -4)=	-40
6	5	1	6	5	-12	(-4 x 1 x 3)=	-12
-4	3	2	-4	3	36	(3 x 6 x 2)=	36
					-16		-16

= (-16) - (-16) = 0

الطريقة الثانية	استخدام المحددة الثانية

دائما نغير إشارة العنصر الثانى فى الصف الأول

+	–	+

6

-4	3	2	+			
6	5	1	-4	5	1	= -4 ((5 x 2) - (1 x 3)) = -4 (7)= -28
-4	3	2		3	2	

-4	3	2	–			
6	5	1	-3	6	1	= -3 ((6 x 2) - (1 x -4)) = -3 (16)= -48
-4	3	2		-4	2	

-4	3	2	+			
6	5	1	2	6	5	= 2 ((6 x 3) - (5 x -4)) = 2 (38)= 76
-4	3	2		-4	3	

= (-28) + (-48) + (76) = 0

طريقة الأقطار	العمل على القطر الرئيسي

7

-6	-1	-2	-6	-1	-30	(-6 x 5 x 1)=	-30
2	5	0	2	5	0	(-1 x 0 x 4)=	0
4	3	1	4	3	-12	(-2 x 2 x 3)=	-12
					-42		-42

العمل على القطر المعاكس

-6	-1	-2	-6	-1	-40	(-2 x 5 x 4)=	-40
2	5	0	2	5	0	(-6 x 0 x 3)=	0
4	3	1	4	3	-2	(-1 x 2 x 1)=	-2
					-42		-42

= (-42) - (-42) = 0

الطريقة الثانية	استخدام المحددة الثانية

\+ – +

دائما نغير إشارة العنصر الثانى فى الصف الأول

7

-6	-1	-2	+			
2	5	0	-6	5	0	= -6 ((5 x 1) - (0 x 3)) = -6 (5)= -30
4	3	1		3	1	

-6	-1	-2	–			
2	5	0	1	2	0	= 1 ((2 x 1) - (0 x 4)) = 1 (2)= 2
4	3	1		4	1	

-6	-1	-2	+			
2	5	0	-2	2	5	= -2 ((2 x 3) - (5 x 4)) = -2 (-14)= 28
4	3	1		4	3	

= (-30) + (2) + (28) = 0

طريقة الأقطار	العمل على القطر الرئيسي

8

6	0	4	6	0	-36	(6 x -3 x 2)=	-36
0	-3	0	0	-3	0	(0 x 0 x 1)=	0
1	0	2	1	0	0	(4 x 0 x 0)=	0
					-36		-36

العمل على القطر المعاكس

6	0	4	6	0	-12	(4 x -3 x 1)=	-12
0	-3	0	0	-3	0	(6 x 0 x 0)=	0
1	0	2	1	0	0	(0 x 0 x 2)=	0
					-12		-12

= (-36) - (-12) = **-24**

الطريقة الثانية	استخدام المحددة الثانية

دائما نغير إشارة العنصر الثانى فى الصف الأول

+	−	+

8

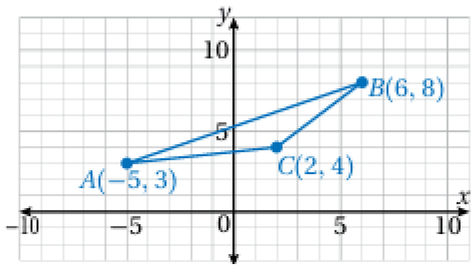
6	0	4	+		
0	-3	0	6	-3 0	= 6 ((-3 x 2) - (0 x 0)) = 6 (-6)= -36
1	0	2		0 2	
6	0	4	−		
0	-3	0	0	0 0	= 0 ((0 x 2) - (0 x 1)) = 0 (0)= 0
1	0	2		1 2	
6	0	4	+		
0	-3	0	4	0 -3	= 4 ((0 x 0) - (-3 x 1)) = 4 (3)= 12
1	0	2		1 0	

= (-36) + (0) + (12) = **-24**

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

9 أجد مساحة المُثلَّث ABC المرسوم في المستوى الإحداثي أدناه.



العمل على القطر الرئيسي						طريقة الأقطار		
A	-5	3	B	2	4	C	6	8

-5	3	1	-5	3	-20	(	-5 x	4 x	1	)=	-20
2	4	1	2	4	18	(	3 x	1 x	6	)=	18
6	8	1	6	8	16	(	1 x	2 x	8	)=	16
					14						14

العمل على القطر المعاكس

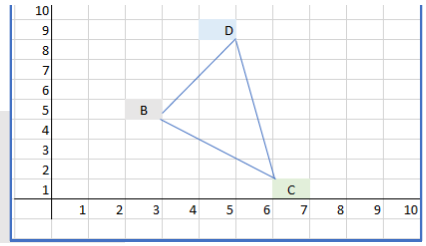
-5	3	1	-5	3	24	(	1 x	4 x	6	)=	24
2	4	1	2	4	-40	(	-5 x	1 x	8	)=	-40
6	8	1	6	8	6	(	3 x	2 x	1	)=	6
					-10						-10

= (14) - (-10)	=	24
مساحة المثلث	=	$\frac{1}{2}$ x القاعدة x الارتفاع
مساحة المثلث	=	0.5 24 = 12.00

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

10 خرائط: يقع منزل خولة عند النقطة $B(3, 5)$ على خريطة إحداثية للمدينة، ويقع منزل فدوى عند النقطة $C(7, 0)$، ويقع منزل نُهى عند النقطة $D(5, 9)$. أجد مساحة المُثلَّث BCD، علمًا بأنَّ الوحدة الواحدة على الخريطة تُمثِّل 20 m على الأرض.



العمل على القطر الرئيسي				طريقة الأقطار				
A	3	5	B	7	0	C	5	9

3	5	1	3	5	0	(	3 x	0 x	1)	=	0
7	0	1	7	0	25	(	5 x	1 x	5)	=	25
5	9	1	5	9	63	(	1 x	7 x	9)	=	63
					88						88

العمل على القطر المعاكس

3	5	1	3	5	0	(	1 x	0 x	5)	=	0
7	0	1	7	0	27	(	3 x	1 x	9)	=	27
5	9	1	5	9	35	(	5 x	7 x	1)	=	35
					62						62

= (88) - (62) =	26		
مساحة المثلث =	$\frac{1}{2}$ x القاعدة x الارتفاع		
مساحة المثلث =	0.5 26 =	13.00	
كل وحدة تمثل	20 m	260.00	M^2

y

أحُلّ كل نظام معادلات ممّا يأتي باستعمال قاعدة كريمر (إنْ أمكن):

11

1	x	+	5	y	=	-17
3	x	+	-4	y	=	6

رتب المعادلة
أنشئ مصفوفة للمعادلات
احسب المحددا لرئيسي
احسب محدد x و y

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$D \; \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (\; 1 \times -4\;) - (\; 5 \times 3\;) = -19$$

$$DX \; \begin{vmatrix} -17 & 5 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = (\; -17 \times -4\;) - (\; 5 \times 6\;) = 38$$

$$x = \frac{DX}{D} \qquad x = -2$$

$$DY \; \begin{vmatrix} 1 & -17 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (\; 1 \times 6\;) - (\; -17 \times 3\;) = 57$$

$$y = \frac{DY}{D} \qquad y = -3$$

حل النظام	(-2 , -3)

12

$$\begin{aligned} 2x + -3y &= 29 \\ -4x + 6y &= 12 \end{aligned}$$

رتب المعادلة
أنشئ مصفوفة للمعادلات
احسب المحددا لرئيسي
احسب محدد x و y

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$D \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = (2 \times 6) - (-3 \times -4) = 0$$

$$DX \quad \begin{vmatrix} 29 & -3 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = (29 \times 6) - (-3 \times 12) = 210$$

$$x = \frac{DX}{D} \qquad x = \infty$$

$$DY \quad \begin{vmatrix} 2 & 29 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = (2 \times 12) - (29 \times -4) = 140$$

$$y = \frac{DY}{D} \qquad y = \infty$$

حل النظام	(∞ , ∞)

بمعنى لها عدد لا نهائي من الحلول

13

$5x + -4y = 22$

$4x + 3y = -1$

رتب المعادلة
أنشئ مصفوفة للمعادلات
احسب المحددا الرئيسي
احسب محدد x و y

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$D \quad \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (5 \times 3) - (-4 \times 4) = 31$$

$$DX \quad \begin{vmatrix} 22 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (22 \times 3) - (-4 \times -1) = 62$$

$$x = \frac{DX}{D} \qquad x = 2$$

$$DY \quad \begin{vmatrix} 5 & 22 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (5 \times -1) - (22 \times 4) = -93$$

$$y = \frac{DY}{D} \qquad y = -3$$

حل النظام	(2 , -3)

14

$$6x + (-7)y = -11$$
$$5x + 4y = 40$$

رتب المعادلة
أنشئ مصفوفة للمعادلات
احسب المحددا لرئيسي
احسب محدد x و y

$$\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (6 \times 4) - (-7 \times 5) = 59$$

$$DX = \begin{vmatrix} -11 & -7 \\ 40 & 4 \end{vmatrix} = (-11 \times 4) - (-7 \times 40) = 236$$

$$x = \frac{DX}{D} \qquad x = 4$$

$$DY = \begin{vmatrix} 6 & -11 \\ 5 & 40 \end{vmatrix} = (6 \times 40) - (-11 \times 5) = 295$$

$$y = \frac{DY}{D} \qquad y = 5$$

حل النظام	(4 , 5)

15 ما قيمة c التي تجعل مُحدِّدة مصفوفة المعاملات للنظام الآتي تساوي صفرًا؟

$$2x + y = 6$$
$$cy = 3 - x$$

رتب المعادلات بحيث x تحت بعض و Y تحت بعض

2 x + y = 6

X + c y = 3

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & c \end{bmatrix}$ $|D| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & C \end{vmatrix}$ = 2 C -1 = 0 ... 2C = 1 $C = \frac{1}{2}$

مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: أكتب مصفوفة مُربَّعة من الرتبة 2 × 2 تُحقِّق الشرط المُعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

17 مُحدِّدتها تساوي صفرًا.

18 مُحدِّدتها تساوي -1

19 جميع عناصرها أعداد موجبة، ومُحدِّدتها -12

17) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

18) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

19) $\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

مسألة اليوم يُطلَق اسم المُثلَّث الذهبي على واحدة من أهمِّ الوِجهات السياحية في جنوب الأردن، وهي المنطقة التي تضمُّ مدينة العقبة ومدينة البترا ووادي رم. إذا كانت إحداثيات المناطق الثلاث على خريطة للمملكة في مستوى إحداثي، وحدته 1 km، هي: (0, 0) للعقبة، و(56, 116) للبترا، و(6, 50) لوادي رم، فأستعمل المُحدِّدات لحساب مساحة المُثلَّث الذي رؤوسه هذه المواقع الثلاثة.

طريقة الأقطار					العمل على القطر الرئيسي				
A	0	0	B	56	116	C	6	50	

0	0	1	0	0	0	(0 x	116 x	1)=	0
56	116	1	56	116	0	(0 x	1 x	6)=	0
6	50	1	6	50	2800	(1 x	56 x	50)=	2800
					2800				2800

العمل على القطر المعاكس

0	0	1	0	0	696	(1 x	116 x	6)=	696
56	116	1	56	116	0	(0 x	1 x	50)=	0
6	50	1	6	50	0	(0 x	56 x	1)=	0
					696				696

= (2800) - (696) =	2104		
مساحة المثلث =	$\frac{1}{2}$ x القاعدة x الارتفاع		
مساحة المثلث =	0.5 2104 =	1,052.00	
كل وحدة تمثل	1 km	1,052.00	kM^2

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر

Determinants and Cramer's Rule

20 **تحدٍّ**: عند حلّ نظام من معادلتين بمُتغيّرين باستعمال قاعدة كريمر، فإنّ الحلّ هو: $x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{5}$، و $y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & a \\ b & c \end{vmatrix}}{5}$.

ما قيمة كلٍّ من a، وb، وc؟

باستخدام القاعدة

قاعدة كريمر

مفهوم أساسي

إذا كان: $C = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات للنظام: $\begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix}$،

وكان: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$، حيث $D \neq 0$، فإنّ حلّ النظام هو:

$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D}$, $y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{D}$.

$$a_1x + b_1y = c1$$

$$a_2x + b_2y = c2$$

DX = $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C1 & b1 \\ C2 & b2 \end{vmatrix}$

$$a_1x + 2y = 1$$

$$a_2x + 4y = 3$$

DY = $\begin{vmatrix} 7 & a \\ b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ b & 3 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ b & 4 \end{vmatrix}$ = 5

7x4 – 2b = 5

28-2b=5 b = $\frac{23}{2}$

العمود 1 و 3 يشكل الأرقام بعد المساواة في المعادلة

يعني قيمة C1 و C2

الأرقام 2 و 4 هي قيم معاملات Y في المعادلة

a = c1 = 1

c = c2 = 3

b من المعادلة

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

<u>كتاب الطالب</u>

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

أجد قيمة كلٍّ من المُحدِّدات الآتية:

1. $D = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad (5 \times 1) - (3 \times -2) = 11$

2. $D = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ $\quad (4 \times 4) - (5 \times 3) = 1$

3. $D = \begin{vmatrix} -5 & 10 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$ $\quad (-5 \times 6) - (10 \times -3) = 0$

4.

العمل على القطر الرئيسي							طريقة الأقطار	
7	-3	1	7	-3	0		(7 x 0 x 6)=	0
8	0	4	8	0	-24		(-3 x 4 x 2)=	-24
2	-5	6	2	-5	-40		(1 x 8 x -5)=	-40
					-64			-64

العمل على القطر المعاكس								
7	-3	1	7	-3	0		(1 x 0 x 2)=	0
8	0	4	8	0	-140		(7 x 4 x -5)=	-140
2	-5	6	2	-5	-144		(-3 x 8 x 6)=	-144
					-284			-284

= (-64) - (-284) = 220

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

المُحدِّدات وقاعدة كريمر

Determinants and Cramer's Rule

5

العمل على القطر الرئيسي							طريقة الأقطار	
4	-2	-4	4	-2	-24		(4 x 3 x -2)=	-24
-6	3	6	-6	3	12		(-2 x 6 x -1)=	12
-1	0	-2	-1	0	0		(-4 x -6 x 0)=	0
					-12			-12

العمل على القطر المعاكس								
4	-2	-4	4	-2	12		(-4 x 3 x -1)=	12
-6	3	6	-6	3	0		(4 x 6 x 0)=	0
-1	0	-2	-1	0	-24		(-2 x -6 x -2)=	-24
					-12			-12

= (-12) - (-12) = 0

6

العمل على القطر الرئيسي							طريقة الأقطار	
5	-3	1	5	-3	280		(5 x 7 x 8)=	280
4	7	6	4	7	36		(-3 x 6 x -2)=	36
-2	2	8	-2	2	8		(1 x 4 x 2)=	8
					324			324

العمل على القطر المعاكس								
5	-3	1	5	-3	-14		(1 x 7 x -2)=	-14
4	7	6	4	7	60		(5 x 6 x 2)=	60
-2	2	8	-2	2	-96		(-3 x 4 x 8)=	-96
					-50			-50

= (324) - (-50) = 374

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

7 إذا كان: $B = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من $|AB|$، و$|BA|$.

$|A|$ = (-2X4)-(5X-3) = -8 +15 = 7

$|B|$ = (6X0)-(-1X5) = 0 +5 =

المحدد هو رقم حقيقي و
ينطبق عليه الضرب بالتبادل

$|AB| = 7\ X5 = 30$

$|BA| = 5\ X7 = 30$

8 إذا كانت: $\begin{vmatrix} x & 8 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 9$، فأجد قيمة x.

D= $(x.x) - (8\text{ x}2\ ) = x^2 - 16$

$x^2 - 16$=9

x^2=9 +16

x^2=25

$\sqrt{x^2 = \sqrt{25}}$

X= (± 5)

9 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$، فأجد مُحدِّدة A^2، ثمَّ أُبيِّن علاقتها بمُحدِّدة A.

$$A \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times A \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad AXA \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$$

2X0 - (-1X4) = 4

(0X-4)-(-2*8) =16

العلاقة محددة A^2 = ضعف محددة A لأنها ارقام حقيقة

10 تُعطى معادلة المســـتقيم المارِّ بالنقطتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ بالقاعدة: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. أستعمل هذه القاعدة لإيجاد معادلة المستقيم المارِّ بالنقطتين $(-1, 3), (2, -5)$.

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

أحُلُّ كُلًّا من أنظمة المعادلات الآتية باستعمال قاعدة كريمر:

رتب المعادلة
أنشئ مصفوفة للمعادلات
احسب المحددا لرئيسي
احسب محدد x و y

11

$$3x + -5y = 22$$
$$2x + 1y = 6$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$D \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (3 \times 1) - (-5 \times 2) = 13$$

$$DX \begin{vmatrix} 22 & -5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (22 \times 1) - (-5 \times 6) = 52$$

$$x = \frac{DX}{D} \qquad x = 4$$

$$DY \begin{vmatrix} 3 & 22 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = (3 \times 6) - (22 \times 2) = -26$$

$$y = \frac{DY}{D} \qquad y = -2$$

حل النظام	(4 , -2)

12

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 7 \\ 2x + (-4)y &= 8 \end{aligned}$$

رتب المعادلة
أنشئ مصفوفة للمعادلات
احسب المحددا الرئيسي
احسب محدد x و y

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (5 \times -4) - (3 \times 2) = -26$$

$$DX = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = (7 \times -4) - (3 \times 8) = -52$$

$$x = \frac{DX}{D} \qquad x = 2$$

$$DY = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = (5 \times 8) - (7 \times 2) = 26$$

$$y = \frac{DY}{D} \qquad y = -1$$

حل النظام	(2 , -1)

⑬

$$3x + (-1)y = 10$$
$$-5x + 4y = 6$$

رتب المعادلة
أنشئ مصفوفة للمعادلات
احسب المحددا الرئيسي
احسب محدد x و y

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = (3 \text{ X } 4) - (-1 \text{ X } -5) = 7$$

$$DX = \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = (10 \text{ X } 4) - (-1 \text{ X } 6) = 46$$

$$x = \frac{DX}{D} \qquad x = 7$$

$$DY = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = (3 \text{ X } 6) - (10 \text{ X } -5) = 68$$

$$y = \frac{DY}{D} \qquad y = 10$$

حل النظام	(7 , 10)

14 حلَّت سلمى نظامًا من معادلتين خطِّيتين بالمُتغيِّرين x، وy باستعمال قاعدة كريمر، فوجدت أنَّ:

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{D}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{D}$. ما قيمة كلٍّ من x، وy؟

- العمود الأول في X هو قيمة ما بعد المساواة في المعادلات
- نفسه العمود الثاني في y هو قيمته ما بعد المساواة في المعادلات

$a_1x + b_1y = c_1$ ….. $a_1x + b_1y = 3$

$a_2x + b_2y = c_2$ ….. $a_2x + b_2y = -1$

- العمود الثاني في x يشكل قيم y ، b2= 2 b1=5
- العمود الثاني في y يشكل قيم x ، a2= 1 a1=4

$4x + 5_1y = 3$
$1x + 2y = -1$

D= $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ = (4X2)-(5X1) = 8 -5 =3

$$X = \frac{DX}{D} = \frac{(3\ .\ 2)-(5\ .-1)}{3} = \frac{11}{3}$$

$$Y = \frac{DY}{D} = \frac{(4\ .-1)-(3\ .1)}{3} = \frac{-7}{3}$$

15 أجد مساحة المُثلَّث الذي رؤوسه: $A(-2, 5), B(7, 11), C(1, 15)$ باستعمال المُحدِّدات.

العمل على القطر الرئيسي						طريقة الأقطار		
A	-2	5	B	7	11	C	1	15

-2	5	1	-2	5	-22	(-2 x	11 x	1)=	-22
7	11	1	7	11	5	(5 x	1 x	1)=	5
1	15	1	1	15	105	(1 x	7 x	15)=	105
					88				88

العمل على القطر المعاكس

-2	5	1	-2	5	11	(1 x	11 x	1)=	11
7	11	1	7	11	-30	(-2 x	1 x	15)=	-30
1	15	1	1	15	35	(5 x	7 x	1)=	35
					16				16

= (88) - (16)	=	72
مساحة المثلث	=	$\frac{1}{2}$ x القاعدة x الارتفاع
مساحة المثلث	=	0.5 72 = 36.00
كل وحدة تمثل		36.00

اعداد م. محمد اسعد الخطيب

الدرس 4

المُحدِّدات وقاعدة كريمر
Determinants and Cramer's Rule

16 **نقـود**: يوجد في صندوق مُحاسِـب 75 ورقة نقد أردنية من فئة الدينار وخمســة الدنانير وعشــرة الدنانير، تبلغ قيمتها الإجمالية JD 460. إذا كان عدد أوراق النقد من فئة خمسة الدنانير يساوي 4 أمثال عدد أوراق النقد من فئة الدينار، فأجد عدد ما في الصندوق من أوراق النقد لكل فئة باستعمال قاعدة كريمر.

- معادلة عدد الأوراق النقدية 75 ورقة
- نفرض

1 J.D = X

5 J.D = Y ……. = 4X   من السؤال 4 اضعاف الدينار

10 J.D = Z

X+4X+Z= 75

5X+Z = 75   ……..1

معادلة مجموع قيمة الأوراق 460 دينار

- عدد ورقة الدينار X وقيمة كل ورقة 1
- عدد ورقة الخمسة 4X وقيمة كل ورقة 5
- عدد ورقة العشرة Z و قيمة كل ورقة 10

(1) X + 5 (4X) + 10 Z = 460

X +20 X + 10 Z = 460

21 X + 10 Z = 460 ……..2

حل المعادلات بطريقة كريمر

رتب المعادلة
أنشئ مصفوفة للمعادلات
احسب المحددا الرئيسي
احسب محدد x و y

$$5x + 1Z = 75$$
$$21x + 10Z = 460$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 21 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 460 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 21 & 10 \end{vmatrix} = (5 \times 10) - (1 \times 21) = 29$$

$$DX = \begin{vmatrix} 75 & 1 \\ 460 & 10 \end{vmatrix} = (75 \times 10) - (1 \times 460) = 290$$

$$X = \frac{DX}{D} \qquad x = 10$$

$$DZ = \begin{vmatrix} 5 & 75 \\ 21 & 460 \end{vmatrix} = (5 \times 460) - (75 \times 21) = 725$$

$$Z = \frac{DZ}{D} \qquad Z = 25$$

حل النظام	(10 , 25)

$X = 10$, $Y = 4X = 4X10 = 40$, $Z = 25$

10 ورقات من فئة الدينا

40 ورقة من فئة الخمسة

25 من فئة العشرة