الرياضيات الصف العاشر

دوسية الوحدة الخامسة

النسب المثلثية وحلّ المثلثات

فهرس الوحدة	رقم الصفحة
الفصل الأول : الزوايا والنسب المثلثية	٢
أولا : الوضع القياسي للزاوية	٢
ثانيا : النسب المثلثية	٤
ثالثا : النسب المثلثية للزوايا ضمن دورة كاملة	٨
الفصل الثاني : تطبيقات المثلث	١٤
أولا : مساحة المثلث بدلالة طولي ضلعين فيه والزاوية المحصورة بينهما	١٤
ثانيا : قانون الجيوب	١٦
ثالثا : قانون جيوب التمام	٢٠

إذا ما طمحت إلى غايـــــة   لبست المنى وخلعتُ الحذر

ومن لا يحب صعود الجبال   يعش أبد الدهـــر بين الحفر

إعداد : المعلمة سلسبيل الخطيب

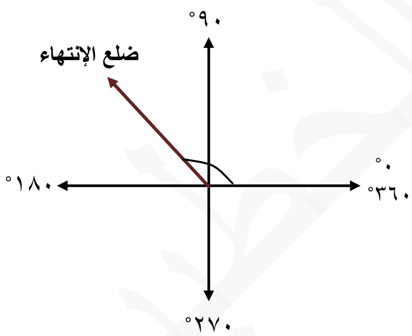
الفصل الأول : الزوايا والنسب المثلثية

أولا : الزاوية والوضع القياسي لها

>> **الزاوية** : هي زوجان من الأشعة لهما نقطة البداية نفسها تُسمى رأس الزاوية ، ويُسمى أحد الشعاعين ضلع ابتداء الزاوية ، والضلع الآخر ضلع انتهاء الزاوية .

>> **قياس الزاوية** : هو مقدار دوران ضلع الابتداء حتى يأخذ وضع ضلع الانتهاء ووحدة قياس الزاوية هي (الدرجة) (١°) ، ولكل زاوية قياسان ، قياس موجب إذا كان دوران ضلع الابتداء باتجاه عكس دوران عقارب الساعة ، وقياس سالب إذا كان الدوران باتجاه عقارب الساعة.

>> **الوضع القياسي للزاوية** : يكون لأي زاوية وضع قياسي في المستوى الاحداثي إذا كان رأس الزاوية في نقطة الأصل وضلع ابتدائها مُنطبقاً على محور السينات الموجب.



* لاحظ الزاوية في الشكل المجاور تقع في وضع قياسي في المستوى الإحداثي حيث رأسها في نقطة الأصل وضلع ابتدائها منطبقاً على محور السينات الموجب وضلع انتهائها هنا يقع في الربع الثاني من المستوى .

مثـال

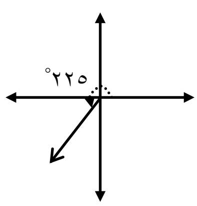
أرسم في الوضع القياسي كلاً من الزوايا التي قياساتها كما يلي :

أ) ٢٢٥° ب) ٣٠٠° ج) ٩٠°

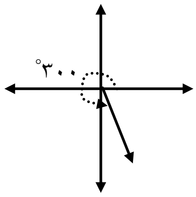
الـحـل :

ارسم المستوى الإحداثي ، واستخدم المنقلة في رسم الزوايا المطلوبة :

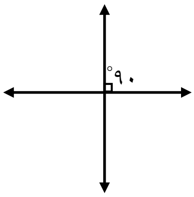
أ- الزاوية ٢٢٥° يقع ضلع الإنتهاء في الربع الثالث .



ب- الزاوية ٣٠٠° يقع ضلع الإنتهاء في الربع الرابع .



ج- الزاوية ٩٠° زاوية محورية يقع ضلع الانتهاء على محور الصادات الموجب



مثال

حدد في أي ربع أو على أيّ محور يقع ضلع الانتهاء في الوضع القياسي لكل من الزوايا التي قياساتها كما يلي :

أ) ٣٠°　　ب) ٩٠°　　ج) ٢٥٠°　　د) ١٨٠°

هـ) ١٥٠°　　و) ٣١٠°　　ز) ٢٧٠°

الحل :

أ) الربع الأول　　ب) محور الصادات الموجب .　　ج) الربع الثالث .

د) محور السينات السالب.　　هـ) الربع الثاني .　　و) الربع الرابع

ز) محور الصادات السالب

مثال

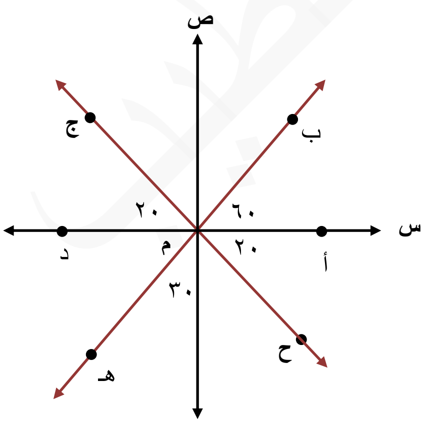
في الشكل المجاور سمّ الزاوية في الوضع القياسي التي يقع ضلع انتهائها في :

أ) الربع الثاني

ب) الربع الثالث

ج) الربع الرابع

وحدد قياس الزاوية في كل حالة :



الحل :

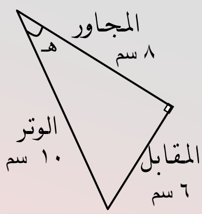
أ) الربع الثاني : الزاوية أ م ج تقع في الربع الثاني ،، وقياسها ١٨٠ ـ ٢٠ = ١٦٠°

ب) الربع الثالث : الزاوية أ م هـ ،، وقياسها ٢٧٠ ـ ٣٠ = ٢٤٠°

ج) الربع الرابع : الزاوية أ م ح ،، وقياسها ٣٦٠ ـ ٢٠ = ٣٤٠°

ثانيا : النسب المثلّثية

✷ سبق وتعلمت في الصف التاسع كيف تجد النسب المثلثية للزاوية الحادة من خلال المثلث القائم الذي يحوي تلك الزاوية ، حيثُ :



جا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ <== جا هـ = $\frac{٦}{١٠}$ = ٠,٦ سم

جتا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ <== جتا هـ = $\frac{٨}{١٠}$ = ٠,٨ سم

ظا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ <== ظا هـ = $\frac{٦}{٨}$ = ٠,٧٥ سم

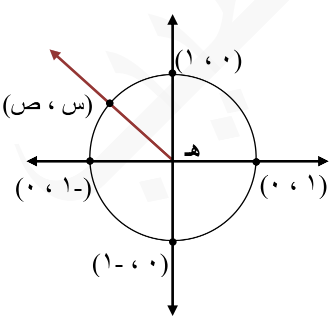
✷ وفي هذا الدرس ستتعلم كيفية إيجاد جيب (جا) ، وجيب تمّام (جتا) لأي زاوية مهما كان قياسها من خلال **دائرة الوحدة** .

دائرة الوحدة : هي الدائرة المرسومة في المستوى الاحداثي حيثُ يبلغ طول نصف قطرها وحدة واحدة ومركزها نقطة الأصل .

✷ في الوضع القياسي إذا قطع ضلع انتهاء زاوية قياسها هـ دائرة الوحدة في النقطة ب(س ، ص) ، فإن :

جتا هـ = س ، جا هـ = ص ، أي أنّ (س ، ص) = (جتا هـ ، جا هـ)

انظر الشكل المجاور ☜ :



لاحظ أن ضلع انتهاء الزاوية هـ المرسومة في الوضع القياسي قد قطع دائرة الوحدة في النقطة (س ، ص)

وعليه فإنّ :-

جتا هـ = س

جا هـ = ص

ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، حيث س $\neq$ صفر

ظتا هـ = $\frac{١}{\text{ظا هـ}}$ = $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ، ص $\neq$ صفر

قا هـ = $\frac{1}{\text{جتا هـ}} = \frac{1}{\text{س}}$ ، س $\neq$ صفر

قتا هـ = $\frac{1}{\text{جا هـ}} = \frac{1}{\text{ص}}$ ، ص $\neq$ صفر

مـثـال

إذا قطع ضلع انتهاء الزاوية هـ دائرة الوحدة في النقطة (٠,٦ ، ٠,٨) ، فجد قيمة كل من :-

جا هـ ، جتا هـ ، ظا هـ ، ظتا هـ ، قا هـ ، قتا هـ .

الـحـل :

جا هـ = الإحداثي الصادي للنقطة ==> جا هـ = ٠,٨

جتا هـ = الإحداثي السيني للنقطة ==> جتا هـ = ٠,٦

ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = \frac{0.8}{0.6} = \frac{4}{3}$

ظتا هـ = $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}} = \frac{0.6}{0.8} = \frac{3}{4}$

قا هـ = $\frac{1}{\text{جتا هـ}} = \frac{1}{0.6} = \frac{5}{3}$

قتا هـ = $\frac{1}{\text{جا هـ}} = \frac{1}{0.8} = \frac{5}{4}$

مـثـال

جد قيمة كل من جا هـ ، جتا هـ ، ظا هـ ، قتا هـ إذا قطع ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها هـ في الوضع القياسي دائرة الوحدة في نقطة احداثياتها ($\frac{5}{13}$ ، $\frac{-12}{13}$)

الـحـل :

جا هـ = $\frac{-12}{13}$

جتا هـ = $\frac{5}{13}$

ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ = جا هـ ÷ جتا هـ = $\frac{-12}{13} \div \frac{5}{13} = \frac{-12}{13} \times \frac{13}{5} = \frac{-12}{5}$

قتا هـ = $\frac{1}{\text{جا هـ}}$ = ١ ÷ جا هـ = ١ ÷ $\frac{-12}{13}$ = ١ × $\frac{13}{-12} = \frac{13}{-12}$

قياس الزوايا وإشارة نسبها المثلثية بحسب موضعها في المستوى الإحداثي :

الربع الأول	٠ < هـ < ٩٠	جميع النسب المثلثية موجبة
الربع الثاني	٩٠ < هـ < ١٨٠	النسب جا هـ و قتا هـ موجبات
الربع الثالث	١٨٠ < هـ < ٢٧٠	النسب ظا هـ و ظتا هـ موجبات
الربع الرابع	٢٧٠ < هـ < ٣٦٠	النسب جتا هـ و قا هـ موجبات

مثـال

حدد الربع (الأرباع) الذي يقع فيه ضلع انتهاء زاوية قياسها (هـ) في الوضع القياسي إذا كان :

أ) جا هـ < ٠ ، جتا هـ > ٠ ب) جا هـ > ٠ ج) ظا هـ > ٠

الحل

أ) تكون جا هـ سالبه في الربع الثالث والرابع ، وتكون جتا هـ موجبه في الربع الأول والرابع ،

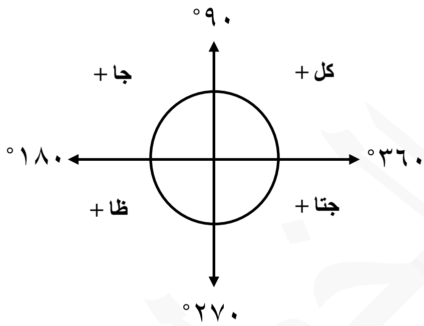
وعليه فإن جا هـ < ٠ ، جتا هـ > ٠ في **الربع الرابع**

ب) جا هـ موجب في **الربع الأول والثاني.**

ج) ظا هـ موجب في **الربع الأول والثالث.**

انظر الشكل المجاور

يساعدك في حفظ إشارات النسب المثلثية



وللتسهيل ،، احفظ الجملة التالية : كل حاكم ظالم جته نيله .

>> أكبر قيمة لكل من جا هـ ، جتا هـ = ١ ، وأقل قيمة لكل من جا هـ ، جتا هـ = -١

قـاعـدة

جا^{2} هـ + جتا^{2} هـ = ١

من خلال هذه القاعدة تستطيع حساب إحدى النسبتين ، إذا عُلمت الأخرى

مثـال

إذا وقع ضلع انتهاء زاوية قياسها (هـ) في الربع الثالث في الوضع القياسي وكان جتا هـ يساوي - ٠,٦ ،

فجد قيمة كل من : جـا هـ ، ظـا هـ .

الحل :

جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ = ١

جا^{٢} هـ + (-٠,٦)^{٢} = ١

إذن : جا^{٢} هـ + ٠,٣٦ = ١ ==> جا^{٢} هـ = ١ - ٠,٣٦ ==> جا^{٢} هـ = ٠,٦٤

وبأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة ينتج جا هـ = ± ٠,٨

لكن الزاوية هـ تقع في الربع الثالث ، لذا جا هـ سالبة ==> جا هـ = - ٠,٨

ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ = $\frac{-٠,٨}{-٠,٦}$ = ١,٣

مثـال

جد قيم باقي النسب المثلثية للزاوية هـ إذا علمت أنّ

ظا هـ = ٢ ، ١٨٠° < هـ < ٢٧٠°

الحل :

* ظاهـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ ==> ٢ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ بالضرب التبادلي ينتج جاهـ = ٢ جتاهـ

الآن استخدم القاعدة : جا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ = ١ وعوض بدلاً من جا هـ (٢جتاهـ)

(٢جتاهـ)^{٢} + جتا^{٢}هـ = ١

٤جتا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ = ١

٥ جتا^{٢}هـ = ١

جتا^{٢}هـ = $\frac{١}{٥}$ وبأخذ الجذر للطرفين ينتج : جتاهـ = ± $\frac{١}{\sqrt{٥}}$

وحيث أن هـ تقع في الربع الثالث ∴ * جتاهـ سالبة = $\frac{-١}{\sqrt{٥}}$

* جاهـ = ٢ جتا هـ ==> جاهـ = ٢ × $\frac{-١}{\sqrt{٥}}$ = $\frac{-٢}{\sqrt{٥}}$

* قا هـ = $\frac{١}{\text{جتا هـ}}$ = ١ ÷ $\frac{-١}{\sqrt{٥}}$ = ١ × $\frac{\sqrt{٥}}{-١}$ = - $\sqrt{٥}$

* قتا هـ = $\frac{١}{\text{جا هـ}}$ = ١ ÷ جا هـ = ١ ÷ $\frac{-٢}{\sqrt{٥}}$ = ١ × $\frac{\sqrt{٥}}{-٢}$ = $\frac{\sqrt{٥}}{-٢}$

* ظتا هـ = $\frac{١}{\text{ظا هـ}}$ = $\frac{١}{٢}$

إذا قابلنا الإساءة بالإساءة ،، فمتى تنتهي الإساءة ؟!

ثالثا : النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الكاملة

❀ستتعرف في هذا الدرس إلى طرق إيجاد جاهـ ، جتاهـ ، ظاهـ ، ظتا هـ ، قا هـ ، قتا هـ إذا عُلمت قيمة هـ

* إذا كانت هـ تقع في الربع الأول ٠ < هـ < ٩٠° فيُمكنك أيجاد جاهـ ، جتاهـ ، ظاهـ ، قا هـ ، قتا هـ ، ظتا هـ كما تعلمت سابقاً ، ولكن قد تقع الزاوية هـ في الربع الثاني أو الثالث أو الرابع ، فهناك قواعد يُمكنك اتباعها لإيجاد النسب المثلثية للزاوية هـ في تلك الأرباع .

<< **قواعد الربع الثاني :**

إذا وقعت هـ في الربع الثاني ٩٠° < هـ < ١٨٠° فإنّ :

جا (١٨٠° - هـ) = جا هـ

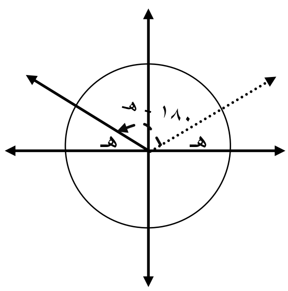
جتا (١٨٠° - هـ) = - جتا هـ

ظا (١٨٠° - هـ) = - ظا هـ

ظتا (١٨٠° - هـ) = - ظتا هـ

قا (١٨٠° - هـ) = - قا هـ

قتا (١٨٠° - هـ) = قتا هـ



مثال

جد قيمة كل من : ١) جا ١٦٥°　　٢) جتا ١٤٠°　　٣) ظتا ١١٠°

الحل :

١) ١٦٥° تقع في الربع الثاني ، والقاعدة : جا (١٨٠° - هـ) = جا هـ

ما يهمنا هو إيجاد قيمة هـ التي في الشق الأيسر من القاعدة وهي زاوية حادة تُسمى زاوية المرجع للزاوية التي قياسها (١٨٠° - هـ) ، إذن :

اجعل ما داخل القوس = ١٦٥

جا (١٨٠° - هـ) = جا هـ

١٨٠° - هـ = ١٦٥° <== - هـ = ١٦٥ - ١٨٠ ومنها هـ = ١٥

∴ جا (١٨٠° - هـ) = جا ١٥° ≈ ٠,٢٦

لاحظ الجيب موجب في الربع الأول والثاني لذا بقي الجيب موجباً .

٢) ١٤٠° تقع في الربع الثاني ، والقاعدة : جتا (١٨٠° - هـ) = - جتا هـ ، إذن :

١٨٠° - هـ = ١٤٠° <== - هـ = ١٤٠ - ١٨٠ ومنها هـ = ٤٠

∴ جتا (١٨٠° - هـ) = - جتا ٤٠ ≈ - ٠,٧٦

وهنا الجتا موجب في الربع الأول لكنه سالب في الربع الثاني لذا أعطي إشارة سالب .

٣) ١١٠ تقع في الربع الثاني ، والقاعدة : ظتا (١٨٠° - هـ) = - ظتا هـ ، إذن

١٨٠° - هـ = ١١٠° <== - هـ = ١١٠ - ١٨٠ ومنها هـ = ٧٠

∴ ظتا (١٨٠° - هـ) = - ظتا ٧٠ = - $\frac{\text{١}}{\text{ظا ٧٠}}$ = - $\frac{\text{١}}{\text{٢,٧٥}}$ ≈ - ٠,٣٦

وهنا الظتا موجب في الربع الأول لكنه سالب في الربع الثاني لذا أعطي إشارة سالب .

>> **قواعد الربع الثالث :**

إذا وقعت هـ في الربع الثالث ١٨٠° < هـ < ٢٧٠° فإنّ :

جا (١٨٠° + هـ) = - جا هـ

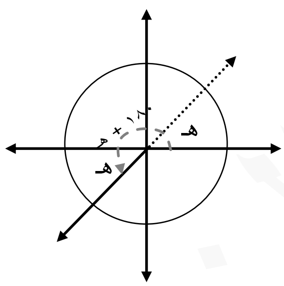
جتا (١٨٠° + هـ) = - جتا هـ

ظا (١٨٠° + هـ) = ظا هـ

ظتا (١٨٠° + هـ) = ظتا هـ

قا (١٨٠° + هـ) = - قا هـ

قتا (١٨٠° + هـ) = - قتا هـ



مثـال

جد قيمة كل من : ١) جتا ٢٢٥° ٢) ظا ٢٥٠° ٣) قا ٢٠٠°

الحل :

١) جتا ٢٢٥° الزاوية ٢٢٥° تقع في الربع الثالث ، والقاعدة : جتا (١٨٠° + هـ) = - جتا هـ ، إذن :

جتا (١٨٠° + هـ) = - جتا هـ ← اجعل ما داخل القوس = ٢٢٥ ، إذن :

١٨٠ + هـ = ٢٢٥ <== هـ = ٤٥ إذن جتا ٢٢٥° = - جتا ٤٥° ≈ - ٠,٧

٢) ظا ٢٥٠° الزاوية ٢٥٠° تقع في الربع الثالث ، والقاعدة : ظا (١٨٠° + هـ) = ظا هـ ، إذن :

ظا (١٨٠° + هـ) = ظا هـ ← اجعل ما داخل القوس = ٢٥٠ ، إذن :

١٨٠ + هـ = ٢٥٠ <== هـ = ٧٠ إذن ظا ٢٥٠° = ظا ٧٠° ≈ ٢,٧٥

٣) قا ٢٠٠° الزاوية ٢٠٠° تقع في الربع الثالث القاعدة : قا (١٨٠° + هـ) = ـ قا هـ ، إذن

قا (١٨٠° + هـ) = ـ قا هـ ⟵ اجعل ما داخل القوس = ٢٠٠ ، إذن :

١٨٠ + هـ = ٢٠٠ ==> هـ = ٢٠ إذن قا ٢٠٠° = ـ قا ٢٠° = ـ (١ / جتا ٢٠) = ـ (١ / ٠,٩٤) ≈ ـ ١,٠٦

>> **قواعد الربع الرابع :**

إذا وقعت هـ في الربع الثالث ٢٧٠° < هـ < ٣٦٠° فـإنّ :

جا (٣٦٠° ـ هـ) = ـ جا هـ

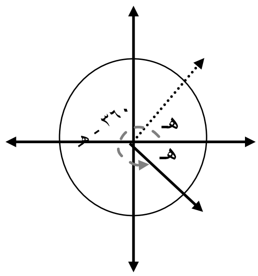
جتا (٣٦٠° ـ هـ) = جتا هـ

ظا (٣٦٠° ـ هـ) = ـ ظا هـ

ظتا (٣٦٠° ـ هـ) = ـ ظتا هـ

قا (٣٦٠° ـ هـ) = قا هـ

قتا (٣٦٠° ـ هـ) = ـ قتا هـ



مثـال

جد قيمة جتا ٣٠٠° ، قا ٣٣٠° ، ظا ٣١٥°

الحل :

اجعل ما داخل القوس = ٣٠٠

* جتا ٣٠٠ الزاوية ٣٠٠ تقع في الربع الرابع ، والقاعدة : جتا (٣٦٠° ـ هـ) = جتا هـ ، إذن

٣٦٠ ـ هـ = ٣٠٠ ==> هـ = ٦٠° إذن جتا ٣٠٠ = جتا ٦٠ = ٠,٥

اجعل ما داخل القوس = ٣٣٠

* قا ٣٣٠° الزاوية ٣٣٠ تقع في الربع الرابع ، والقاعدة : قا (٣٦٠° ـ هـ) = قا هـ ، إذن

٣٦٠ ــ هـ = ٣٣٠ ==> هـ = ٣٠° إذن قا ٣٣٠ = قا ٣٠ = ١ / جتا ٣٠ = ١ / (√٣ / ٢) = ٢ / √٣

* ظا ٣١٥° الزاوية ٣١٥ تقع في الربع الرابع ، والقاعدة : ظا (٣٦٠° ـ هـ) = ـ ظا هـ ، إذن

٣٦٠ ــ هـ = ٣١٥ ==> هـ = ٤٥° إذن ظا ٣١٥ = ـ ظا ٤٥ = ـ١

***إيجاد النسب المثلثية باستخدام الآلة الحاسبة :-**

تستطيع إيجاد النسب المثلثية مُباشرة ، بغض النظر عن الربع الذي تقع فيه ، ودون استخدام زاوية المرجع

مثـال : استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يلي :

١) جا ٣١٥° ٢) ظا ١٣٥° ٣) جتا ١٢´ ٢٨٥° ٣) قتا ١٦´ ٢٣٥°

الـحل :

١) اضغط على (Sin) ثم اكتب ٣١٥ ثم اضغط على (=) فيظهر جا ٣١٥° ≈ ـ ٠,٧

٢) اضغط على (tan) ثم اكتب ١٣٥ ثم اضغط على (=) فيظهر ظا ١٣٥° ≈ ـ ١

٣) لإيجاد جتا ١٢´ ٢٨٥° (يرجع حساب هذه الزاوية إلى نوع الآلة الحاسبة المستخدمة)

١٢ ´ هي جزء من الدرجة التي تساوي ٦٠ دقيقة

لذا نجري تحويل الدقائق إلى درجة بالقسمة على ٦٠ ==> $\frac{١٢}{٦٠}$ = ٠,٢

إذن الزاوية ١٢´ ٢٨٥° = ٠,٢° + ٢٨٥° = ٢٨٥,٢°

اضغط على (cos) ثم اكتب ٢٨٥,٢ ثم اضغط على (=) فيظهر جتا ٢٨٥,٢ ≈ ٠,٢٦

٤) ١٦ ´ هي جزء من الدرجة التي تساوي ٦٠ دقيقة

لذا نجري تحويل الدقائق إلى درجة بالقسمة على ٦٠ ==> $\frac{١٢}{٦٠}$ = ٠,٢٦٧

إذن الزاوية ١٦´ ٢٣٥° = ٠,٢٦٧° + ٢٣٥° = ٢٣٥,٢٦٧°

بما أن قتا هـ = $\frac{١}{\text{جا هـ}}$ إذن جد الجيب بدايةً

اضغط على (sin) ثم اكتب ٢٣٥,٢٦٧° ثم اضغط على (=) فيظهر جا ٢٣٥,٢٦٧° ≈ ـ ٠,٨٢

إذن قا ٢٣٥,٢٦٧° = ١ ÷ ـ ٠,٨٢ = ـ ١,٢

***إيجاد الزاوية هـ باستخدام الآلة الحاسبة :-**

الآلة الحاسبة تعطي زاوية المرجع ؛ لذلك عليك مراعاة الربع الذي تقع فيه الزاوية.

مثـال : جد باستخدام الآلة الحاسبة قيمة الزاوية هـ إذا كان :

١) جا هـ = ـ ٠,٥٦٩٢ ، ١٨٠° < هـ < ٢٧٠°

٢) ظا هـ = ـ ٢,٨٦٥٣ ، ٢٧٠° < هـ < ٣٦٠°

٣) قا هـ = ـ٢ ، ٩٠° < هـ < ٢٧٠°

⭑ مُلاحظة :
لإيجاد قيمة هـ ، فإننا نُسجل **القيمة المطلقة** على الآلة حاسبة

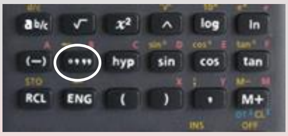
الـحل :

١) اضغط أولاً على (Inv) ثم اضغط على (Sin) ثم اكتب العدد ٠,٥٦٩٢ فيظهر لك على شاشة الحاسبة

٣٤,٦٩ فتكون الزاوية (٣٤,٦٩ °) هي زاوية المرجع للزاوية هـ لكن هـ تقع في الربع الثالث

إذن الزاوية هـ = ١٨٠ + ٣٤,٦٩ ≈ ٢١٤,٦٩° >>> تابع

✋ **لتحويل الدرجات إلى دقائق على الآلة حاسبة >>**



اضغط على زر (° ,, ,) بعد ظهور النتيجة بالدرجات.

بعد ظهور ٢١٤,٦٩° على شاشة الحاسبة ، اضغط على زر (° ,, ,) ، فستظهر لك ٢١٤°٤١°٢٤

ويعني ذلك أن الزاوية لأقرب دقيقة تساوي ٢١٤°٤١´

٢) اضغط أولاً على (Inv) ثم اضغط على (tan) ثم اكتب العدد ٢,٨٦٥٣ فيظهر لك على شاشة الحاسبة ٧٠,٧٦ فتكون الزاوية (٧٠,٧٦ °) هي زاوية المرجع للزاوية هـ لكن هـ تقع في الربع الرابع ==> هـ = ٣٦٠ ـ ٧٠,٧٦ ≈ ٢٨٩,٢٤°

بعد ظهور ٢٨٩,٢٤° على شاشة الحاسبة ، اضغط على زر (° ,, ,) ، فستظهر لك ٢٨٩°١٤°٢٤

ويعني ذلك أن الزاوية لأقرب دقيقة تساوي ٢٨٩°١٤´

٣) قا هـ = $\frac{١}{\text{جتا هـ}}$ = ٢ تذكر نأخذ القيمة المطلقة ،،، ومنه جتا هـ = $\frac{١}{٢}$

الآن اضغط على (Inv) ثم اضغط على (cos) ثم اكتب العدد ٠,٥ فيظهر لك على شاشة الحاسبة ٦٠

فتكون الزاوية (٦٠°) هي زاوية المرجع للزاوية هـ لكن هـ تقع في الربع الثاني والثالث ، إذن :

ـ في الربع الثاني ==> هـ = ١٨٠ ـ ٦٠ = ١٢٠°

ـ في الربع الثالث ==> هـ = ١٨٠ + ٦٠ = ٢٤٠°

مثـال :

من دون استخدام الجداول أو الآلة الحاسبة أثبت أنّ :

أ) جا ٦٠° جا ٢٤٠° + ٥ جتا ٣٠٠° جا ١٥٠° = $\frac{١}{٢}$

ب) جا^{٢} ٣١٥° + جتا^{٢} ٣٠٠° + جا^{٢} ٣٣٠° = ١

الحل :

أ) جا ٢٤٠° = ـ جا٦٠ ، جتا ٣٠٠° = جتا ٦٠ ، جا ١٥٠° = جا ٣٠°

الطرف الأيمن : جا ٦٠° جا ٢٤٠° + ٥ جتا ٣٠٠° جا ١٥٠°

= جا ٦٠ × ـ جا ٦٠ + ٥ × جتا ٦٠ × جا ٣٠

$= \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times -\frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٥ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{-٣}{٤} + \frac{٥}{٤} = \frac{١}{٢}$

ب) جا ٣١٥° = - جا ٤٥ ، جتا ٣٠٠ = جتا ٦٠ ، جا ٣٣٠ = - جا ٣٠

الطرف الأيمن جا^{٢} ٤٥ + جتا^{٢} ٦٠ + جا^{٢} ٣٠

$$= \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢} + \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} = ١$$

مثـال

إذا كانت (هـ) قياس زاوية حادة ، وكان جا هـ + جا (١٨٠ – هـ) = ١,٤٤٤٤ ، فجد قياس الزاوية هـ

الحل :

جا (١٨٠ – هـ) = جا هـ

إذن : جاهـ + جا هـ = ١,٤٤٤٤ ==> ٢ جا هـ = ١,٤٤٤٤ ==> جا هـ = ٠,٧٢٢٢

وباستخدام الآلة الحاسبة ينتج أن قياس الزاوية هـ = ٤٦,٢٣٦°

مُلخص للقواعد الهامة لإيجاد النسب المثلثية في أي ربع من الأرباع

الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
جا (١٨٠– هـ) = جا هـ	جا (١٨٠ + هـ) = – جا هـ	جا (٣٦٠ – هـ) = – جا هـ
جتا (١٨٠ – هـ) = –جتا هـ	جتا (١٨٠ + هـ) = – جتا هـ	جتا (٣٦٠ – هـ) = جتا هـ
ظا (١٨٠– هـ) = – ظا هـ	ظا (١٨٠ + هـ) = ظا هـ	ظا (٣٦٠ – هـ) = – ظا هـ
ظتا (١٨٠ – هـ) = – ظتا هـ	ظتا (١٨٠ + هـ) = ظتا هـ	ظتا (٣٦٠ – هـ) = - ظتا هـ
قا (١٨٠ – هـ) = – قا هـ	قا (١٨٠ + هـ) = – قا هـ	قا (٣٦٠ – هـ) = قا هـ
قتا (١٨٠ – هـ) = قتا هـ	قتا (١٨٠ + هـ) = – قتا هـ	قتا (٣٦٠ – هـ) = - قتا هـ

بعض العلاقات الإضافية التي تفيدك في حل المسائل

جا (٩٠ – هـ) = جتا هـ	جتا (٩٠ – هـ) = جا هـ
جا (٩٠ + هـ) = جتا هـ	جتا (٩٠ + هـ) = – جا هـ
جا (٢٧٠ – هـ) = – جتا هـ	جتا (٢٧٠ – هـ) = – جا هـ
جا (٢٧٠ + هـ) = – جتا هـ	جتا (٢٧٠ + هـ) = جا هـ

أرقى الناس،، همْ أقلهمْ حديثاً عن النـاس

الفصل الثاني : تطبيقات المثلث

أولا : مساحة المثلث بدلالة طولي ضلعين فيه والزاوية المحصورة بينهما

تعلم أن مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × طول القاعدة × الارتفاع

والآن ستتعرف الى طريقة أخرى لحساب مساحة المثلث بدلالة طوليّ ضلعين فيه وزاوية محصورة بينهما

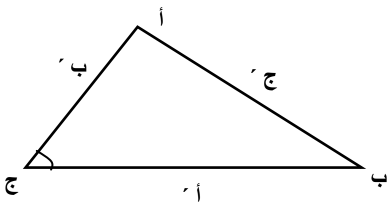
➤➤ مساحة المثلث إذا عُلم طولا أي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما .

⋆ قاعدة

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × حاصل ضرب أي ضلعين فيه مضروباً بجيب الزاوية المحصورة بينهما

إذا رمزت لأطوال الأضلاع التي تقابل الزوايا أ ، ب ، ج في المثلث أ ب ج بالرموز أ َ ، ب َ ، ج َ ،

انظر الشكل المجاور ☜



وكان أ َ ، ب َ معلومين وقياس الزاوية جـ معلوماً فإنّ :-

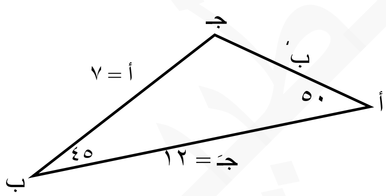
مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × أ َ ب َ × جا جـ

مثـال

أ ب جـ مثلث فيه أَ = ٧سم ، جـَ = ١٢ سم ، قياس ∡ ب = ٤٥° ، ∡ أ = ٥٠°

١ـ جد مساحته . ٢ـ جد طول الضلع بَ .

الحـل :



١ـ لاحظ أن الزاوية المحصورة بين أَ ، جـَ هي ب ، إذن :

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × أَ × جـَ × جا ب

= $\frac{١}{٢}$ × ٧ × ١٢ × جا ٤٥°

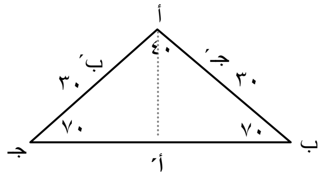
= ٦ × ٧ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ≈ ٢٩,٧ سم^{٢}

٢ـ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × جـَ × بَ × جا أ

٢٩,٧ = ٠,٥ × ١٢ × بَ × جا ٥٠° <== بَ ≈ ٦,٤٦ سم .

مثـال

أ ب جـ مثلث متساوي الساقين ، طول كل من ساقيه ٣٠ سم ، وقياس زاوية رأسه ٤٠° ، جد طول قاعدته وارتفاعه .



الحل :

زوايا القاعدة = (١٨٠ ـ ٤٠) ÷ ٢ = ٧٠°

• مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × بَ × جـَ × جا أ

= $\frac{١}{٢}$ × ٣٠ × ٣٠ × جا ٤٠ ==> مساحة المثلث = ٢٨٩,٣ سم^{٢}

• مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × أَ × جـَ × جا ب

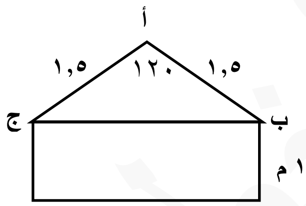
٢٨٩,٣ = $\frac{١}{٢}$ × أَ × ٣٠ × جا ٧٠ ==> أَ = ٢٠,٥ سم وهو يمثل القاعدة

• مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

٢٨٩,٣ = $\frac{١}{٢}$ × ٢٠,٥ × الارتفاع ==> الارتفاع = ٢٨,٢ سم .

مثـال

نافذة على شكل مستطيل ، يعلـوه مثلث متساوي الساقين كما في الشكل إذا كان طول كل من ساقي المثلث ١,٥ م ، وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، وارتفاع المستطيل ١ متر فما مساحة النافذة ؟



الحل :

مساحة النافذة = مساحة المستطيل + مساحة المثلث

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ١,٥ × ١,٥ × جا ١٢٠

= $\frac{١}{٢}$ × ٢,٢٥ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٠,٩٧ م^{٢}

لإيجاد مساحة المستطيل يلزم إيجاد طول ب جـ ==> من مساحة المثلث أ ب جـ

وحيث أنّ المثلث متساوي الساقين إذن زوايا القاعدة متساوية قياس كل منها ٣٠°

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × أ ب × ب جـ × جا ٣٠°

٠,٩٧ = $\frac{١}{٢}$ × ١,٥ × ب جـ × $\frac{١}{٢}$ ==> ٠,٩٧ = ٠,٣٧٥ ب جـ

اقسم طرفي المعادلة على ٠,٣٧٥ ينتج أن ب جـ ≈ ٢,٦ م

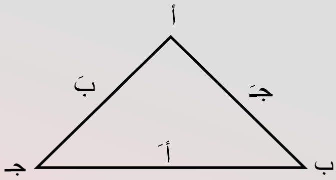
إذن ، مساحة المستطيل = ١ × ٢,٦ = ٢,٦ م^{٢}

إذن ، مساحة النافذة = ٠,٩٧ + ٢,٦ = ٣,٥٧ م^{٢}

ثانيا : قــانــون الجـيـوب

في أي مثلث تكون النسبة بين طول أي ضلع وجيب الزاوية المقابلة له ثابتة ، ففي المثلث أ ب جـ يكونُ :

$$\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}}$$



◀◀ يستخدم هذا القانون لحلّ المثلث غير القائم إذا عُلم فيه :

(١) زاويتـان وضـلع أو **(٢) ضـلعين وزاوية تُقابل أحدهمـا .**

☝ ويقصد بحل **المثلث** : إيجاد أطوال أضلاعه وقياسات زواياه .

مثـال

أ ب جـ مثلث فيه ∡ أ = ٦٨° ، ∡ ب = ٥٥° ، جـَ = ٥ سم ، حلّ المثلث .

الحل :

- **المطلوب حل المثلث** : أي علينا إيجاد أطوال الأضلاع غير المعلومة وكذلك الزوايا .
- ∡ جـ = ١٨٠ - (٦٨ + ٥٥) = ١٨٠ - ١٢٣ <== ∡ جـ = ٥٧° .

الآن نجد أطوال الأضلاع باستخدام قانون الجيب :

$$\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}}$$

$$\frac{\text{أَ}}{\text{جا ٦٨}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ٥٥}} = \frac{\text{٥}}{\text{جا ٥٧}}$$

باستخدام الآلة الحاسبة جد :

جا ٦٨ ≈ ٠,٩٣

جا ٥٥ ≈ ٠,٨٢ ، جا ٥٧ ≈ ٠,٨٤

- والآن خذ الكسر الأول مع الكسر الثالث لتجد قيمة أَ

$$\frac{\text{أَ}}{\text{٠,٩٣}} = \frac{\text{٥}}{\text{٠,٨٤}}$$ <== أَ × ٠,٨٤ = ٥ × ٠,٩٣ <== أَ = ٥,٥ سم .

- والآن خذ الكسر الثاني مع الثالث لتجد قيمة بَ

$$\frac{\text{بَ}}{\text{٠,٨٢}} = \frac{\text{٥}}{\text{٠,٨٤}}$$ <== بَ × ٠,٨٤ = ٥ × ٠,٨٢ <== بَ ≈ ٤,٩ سم .

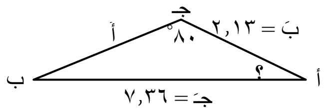
مثـال

أ ب جـ مثلث ، قياس ∡ جـ = ٨٠° ، بَ = ٢,١٣ سم ، جَ = ٧,٣٦ سم ، جد قياس ∡ أ

الحل :

جا ٨٠ = ٠,٩٨٤٨

يكفي أن نأخذ النسبتين $\frac{\text{جَ}}{\text{جا جـ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}}$



$\frac{\text{٧,٣٦}}{\text{جا ٨٠}} = \frac{\text{٢,١٣}}{\text{جا ب}}$ <== $\frac{\text{٧,٣٦}}{\text{٠,٩٨٤٨}} = \frac{\text{٢,١٣}}{\text{جا ب}}$

وبالضرب التبادلي ينتج :

<== جا ب × ٧,٣٦ = ٠,٩٨٤٨ × ٢,١٣ <== جا ب × ٧,٣٦ = ٢,٠٩٧٦

<== جا ب = ٠,٢٨٥٠ <== ∡ ب = ١٦,٥٦° .

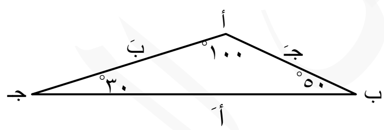
مجموع زوايا المثلث = ١٨٠ <== ∡ أ = ١٨٠ - (٨٠ + ١٦,٥٦) <== ∡ أ = ٨٣,٤٤°

مثـال اثـرائـي

مساحة مثلث ٢٠سم^{٢} ، وقياسات زواياه هي ٣٠° ، ٥٠° ، ١٠٠° ، جد أطوال أضلاعه.

الحل :

جا ١٠٠ ≈ ٠,٩٨٤٨
جا ٥٠ ≈ ٠,٧٦٦٠



- مساحة المثلث = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ أَ بَ جا جـ

ومن قانون الجيب :

$\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}}$ <== أَ = بَ $\frac{\text{جا أ}}{\text{جا ب}}$ ،، الآن عوض أَ في قانون مساحة المثلث

∴ مساحة المثلث = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ بَ $\frac{\text{جا أ}}{\text{جا ب}}$ × بَ جا جـ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × بَ^{٢} $\frac{\text{جا أ جا جـ}}{\text{جا ب}}$

٢٠ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × بَ^{٢} × $\frac{\text{جا ١٠٠ جا ٣٠}}{\text{جا ٥٠}}$

٢٠ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × بَ^{٢} × ٠,٦٤٢٨ <== بَ^{٢} ≈ ٦٢,٢٣ <== بَ ≈ ٧,٨٩ سم

★ **الآن باستخدام قانون الجيب نجد كلا من أَ ، جَ**

$\frac{\text{أَ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}}$ <== $\frac{\text{أَ}}{\text{حا ١٠٠}} = \frac{\text{٧,٨٩}}{\text{جا ٥٠}}$ <== أَ = ١٠,١٤ سم .

$\frac{\text{أَ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا جـ}}$ <== $\frac{\text{١٠,١٤}}{\text{حا ١٠٠}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا ٣٠}}$ <== جَ = ٥,١٥ سم .

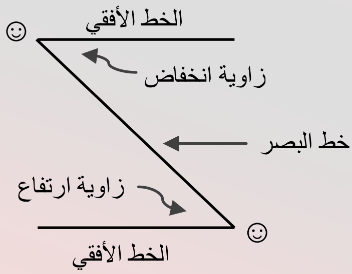
➤➤ **تـذكـر** : زوايا الارتفاع والانخفاض

زاوية الارتفاع : هي الزاوية المحصورة بين

خط البصر والخط الأفقي عندما ترصد جسماً مرتفعاً.

زاوية الانخفاض : هي الزاوية المحصورة بين

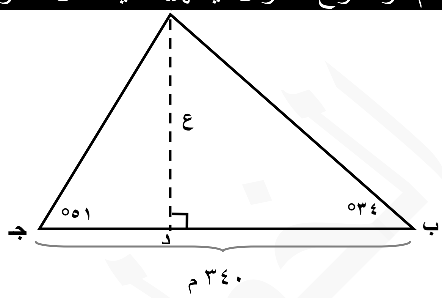
خط البصر والخط الأفقي عندما ترصد جسماً منخفضاً.



مـثـال

البعد بين شخصين يقفان على أرض أفقية ٣٤٠ م رصدا طائرة في اللحظة نفسها ، فوجد الأول قياس زاوية ارتفاع الطائرة ٣٤° ووجد الثاني أنّ قياس زاوية ارتفاع الطائرة ٥١° ، فإذا كان المسقط العمودي للطائرة على الأرض يقع على القطعة المستقيمة الواصلة بين الشخصين كما في الشكل فما ارتفاع الطائرة عن الأرض وما بعدها عن كل من الشخصين ؟

في مثل هذه المسائل إذا لم تكن الرسمة معطاة ... حاول رسم موضوع السؤال ليسهل عليك حل السؤال



الـحـل :

الزاوية ب أ جـ = ١٨٠ - (٣٤ + ٥١) = ٩٥°

في المثلث أ ب جـ

$\frac{\text{ب جـ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا جـ}}$ <= $\frac{٣٤٠}{\text{جا ٩٥}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا ٥١}}$

<== $\frac{٣٤٠}{٠,٩٩٦٢} = \frac{\text{أ ب}}{٠,٧٧٧١}$ وبالضرب التبادلي ينتج أنّ أ ب = ٢٦٥,٢ م

الآن جد طول أ جـ : $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ٣٤}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا ٩٥}}$ <== $\frac{\text{أ جـ}}{٠,٥٥٩٢} = \frac{٣٤٠}{٠,٩٩٦٢}$

وبالضرب التبادلي ينتج أنّ أ جـ ≈ ١٩٠,٩ م .

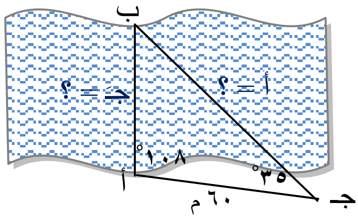
الآن جد الارتفاع (ع) ، في المثلث أ ب د قائم الزاوية في د

جا ٣٤° = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ <== ٠,٥٥٩٢ = $\frac{\text{ع}}{\text{أب}}$ <== ٠,٥٥٩٢ = $\frac{\text{ع}}{٢٦٥,٢}$

ومنه ع ≈ ١٤٨,٣ م

مثـال

تقع النقطة (أ) على ضفة نهر ، وتقع النقطة (ب) على الضفة الاخرى مقابل (أ) تماما وتقع النقطة (جـ) على الارض على بعد ٦٠ مترا من (أ) وفي الجهة نفسها ، فإذا كان قياس ∡ ب أ جـ = ١٠٨° وقياس ∡ ب جـ أ = ٣٥° ، جد عرض النهر وجد بعد (جـ) عن (ب) .



الحـل :

• قياس ∡ جـ ب أ = ١٨٠ - (١٠٨ + ٣٥) = ٣٧°

• $\frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} \Longrightarrow \frac{\text{جـَ}}{\text{جا٣٥}} = \frac{\text{٦٠}}{\text{جا ٣٧}}$

∴ $\text{جـَ} = \text{٦٠} \times \frac{\text{جا ٣٥}}{\text{جا ٣٧}} = \text{٦٠} \times \frac{\text{٠,٥٧٣٦}}{\text{٠,٦٠١٨}} = \text{٥٧,٢}$ م (عرض النهر)

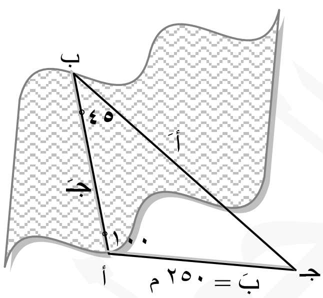
• $\frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} \Longrightarrow \frac{\text{٦٠}}{\text{جا ٣٧}} = \frac{\text{أَ}}{\text{جا ١٠٨}}$

∴ $\text{أَ} = \text{٦٠} \times \frac{\text{جا ١٠٨}}{\text{جا ٣٧}} = \text{٦٠} \times \frac{\text{٠,٩٥١١}}{\text{٠,٦٠١٨}} = \text{٩٤,٨٢}$ م (بعد جـ عن ب) .

مثـال

أراد مسّاح أنْ يقيس عرضَ نهر بين النقطتين أ ، ب الواقعتين على ضفتيه ، فعيّن النقطة جـ في جهة أ نفسها ، وتبعد عنها ٢٥٠ م ، داخل اليابسة ، كما في الشكل ، ووجد أنّ قياس ∡ جـ أ ب = ١٠٠° ، وأن قياس ∡ أ ب جـ = ٤٥°

فما عرضُ النهر؟



الحـل :

لإيجاد عرض النهر جـَ .. جد ∡ جـ $\Longrightarrow$ ∡ جـ = ١٨٠ - (١٠٠ + ٤٥) = ٣٥°

$\frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}} \Longrightarrow \frac{\text{٢٥٠}}{\text{جا ٤٥}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا ٣٥}} \Longrightarrow \text{جـَ} = \text{٢٥٠} \times \frac{\text{جا ٣٥}}{\text{جا ٤٥}}$

$\Longrightarrow \text{جـَ} = \text{٢٥٠} \times \frac{\text{٠,٥٧٣٦}}{\text{٠,٧٠٧١}} \Longrightarrow$ جـَ = ٢٠٢,٨ م . وهو يمثل عرض النهر.

من استطال الطريق ضَعُفَ مشيه

ثالثا : قانون جيب التمام

في أي مثلث أ ب جـ يكون :

أَ^{٢} = بَ^{٢} + جَ^{٢} − ٢ بَ × جَ جتا أ

◄◄ يُستخدم هذا القانون لحلّ المثلث إذا عُلمت :

(١) **أطوال أضلاعه الثلاث .** أو (٢) **طولا ضلعين وزاوية محصورة بينهما .**

مثال

حلّ المثلث أ ب جـ الذي فيه أَ = ٣ سم ، بَ = ٤ سم ، جَ = ٥ سم .

الحل :

• المطلوب : ايجاد قياس زوايا المثلث ، إذن باستخدام قانون جيب التمام :

أَ^{٢} = بَ^{٢} + جَ^{٢} − ٢ بَ × جَ جتا أ

٣^{٢} = ٤^{٢} + ٥^{٢} ـ ٢ × ٤ × ٥ جتا أ ==> ٩ = ١٦ + ٢٥ ـ ٤٠ جتا أ

==> ٩ = ٤١ ـ ٤٠ جتا أ ==> ـ٣٢ = ـ ٤٠ جتا أ ==> جتا أ = ٠,٨

==> قياس ∡ أ = جتا$^{-١}$ ٠,٨ ≈ ٣٧°

• **الآن بنفس الطريقة ، اكتب صيغة القانون التي تعطي بَ^{٢} على النحو :**

بَ^{٢} = أَ^{٢} + جَ^{٢} − ٢ أَ × جَ جتا ب

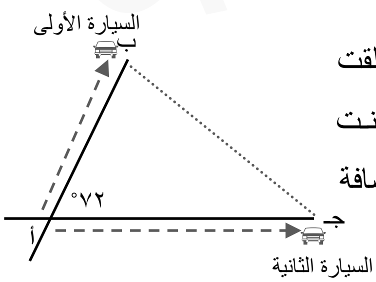
٤^{٢} = ٣^{٢} + ٥^{٢} ـ ٢ × ٣ × ٥ جتا ب ==> ١٦ = ٩ + ٢٥ ـ ٣٠ جتا ب

==> ١٦ = ٣٤ ـ ٣٠ جتا ب ==> جتا ب = ٠,٦ ==> ∡ ب ≈ ٥٣°

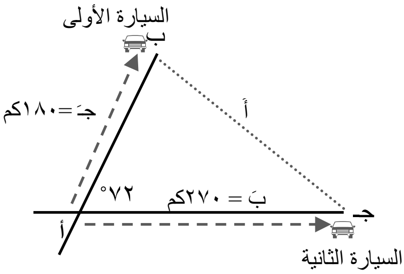
• **الآن أصبح معلوم لديك قياس زاويتين في المثلث ، ويمكنك إيجاد قياس الزاوية الثالثة من** ١٨٠ ـ (٣٧ + ٥٣) = ١٨٠ ـ ٩٠ = ٩٠ ∴ قياس ∡ جـ = ٩٠°

مثال

يتقاطع طريقان مستقيمان بينهما زاوية قياسها ٧٢°، كما في الشكل انطلقت سيارتان معاً من نقطة التقاطع ، كل منهما على طريق مختلف ، فإذا كانت سرعة الأولى ٦٠ كم / ساعة ، وسرعة الثانية ٩٠كم / ساعة ، ما المسافة بين السيارتين بعد ٣ ساعات من بدء سيرهما ؟



الحل :



- المسافة = السرعة × الزمن
- المسافة التي قطعتها السيارة الأولى (جـَ) =٦٠ × ٣ = ١٨٠ كم.
- المسافة التي قطعتها السيارة الثانية (بَ) =٩٠ × ٣ = ٢٧٠ كم.

أَ^{٢} = بَ^{٢} + جـَ^{٢} – ٢ بَ × جـَ جتا أ

أَ^{٢} = (١٨٠)^{٢} + (٢٧٠)^{٢} - ٢ × ١٨٠ × ٢٧٠ × جتا ٧٢

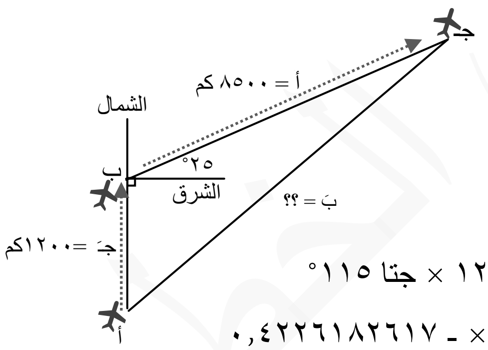
أَ^{٢} = ٣٢٤٠٠ + ٧٢٩٠٠ – ٩٧٢٠٠ × ٠,٣٠٩٠١٦٩٩

أَ^{٢} =١٠٥٣٠٠ - ٣٠٠٣٦,٥ = ٧٥٢٦٣,٥ ==> أَ = ٢٧٤,٣٤ كم .

مثـال

رصدت طائرة تسير باتجاه الشمال في خط مستقيم أفقي فقطعت ١٢٠٠ كم ، وبعد ذلك غيرت خط سيرها حيث انحرفت بزاوية ٢٥° شمال الشرق وقطعت مسافة ٨٥٠٠ كم أخرى ، جد بعد الطائرة عن نقطة رصدها أول مرة .

الحل :



الرسم المجاور يوضح خط سير الطائرة

في ∆ أ ب جـ قياس ∡ جـ ب أ = ٢٥ + ٩٠ = ١١٥°

بَ^{٢} = أَ^{٢} + جـَ^{٢} – ٢ أَ × جـَ × جتا ب

بَ^{٢} = (٨٥٠٠)^{٢} + (١٢٠٠)^{٢} – ٢ × ٨٥٠٠ × ١٢٠٠ × جتا ١١٥°

= ٧٢٢٥٠٠٠٠ + ١٤٤٠٠٠٠ - ٢٠٤٠٠٠٠٠ × - ٠,٤٢٢٦١٨٢٦١٧

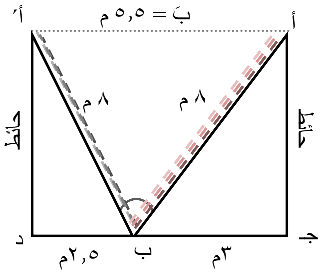
بَ^{٢} = ٧٣٦٩٠٠٠٠ + ٨٦٢١٤١٢,٥٤ = ٨٢٣١١٤١٢,٥٤ ==> بَ = ٩٠٧٢,٥٦

أي أن أ جـ ≈ ٩٠٧٢,٥ كم .. وهو بعد الطائرة عن نقطة رصدها أول مرة ..

مثـال

يرتكز سلم طوله ٨ أمتار على حائط رأسي وأرض أفقية فإذا كان اسفل السلم يبعد ٣ أمتار عن ذلك الحائط و٢,٥ متر عن الحائط المقابل ، كما في الشكل فما قياس الزاوية التي يدورُها السلّمُ حول نقطة ارتكاز اسفله ، عندما ينقل رأسه من موقعه على الحائط الاول إلى الحائط الثاني .

الحل



• المسافة بين (أ) و (أَ) = ٢,٥ + ٣ = ٥,٥ م

الآن باستخدام قانون جيب التمام نجد الزاوية المطلوبة

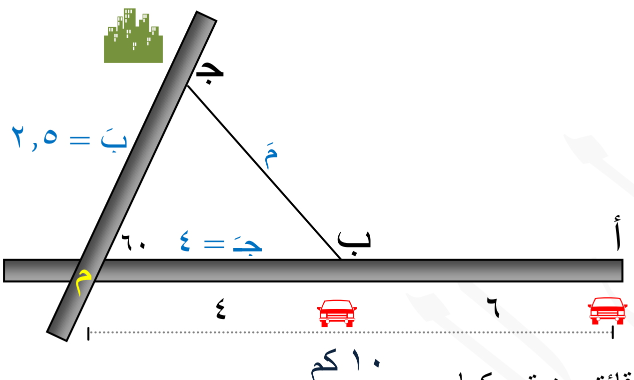
(بَ)^{٢} = (أب)^{٢} + (أَب)^{٢} – ٢ × (أب) × (أَب) × جتا ب

(٥,٥)^{٢} = (٨)^{٢} + (٨)^{٢} – ٢ × ٨ × ٨ × جتا ب

٣٠,٢٥ = ٦٤ + ٦٤ – ١٢٨ جتا ب ==> ٣٠,٢٥ = ١٢٨ – ١٢٨جتاب

==> - ٩٧,٧٥ = - ١٢٨ جتا ب ==> جتا ب = ٠,٧٦٣٧ ==> ∡ ب = ٤٠,٢١°

مثـال



يلتقي شارعان مستقيمان في النقطة م ، ويصنعان عندها زاوية قياسها ٦٠° ، كما في الشكل ، توجد محطة محروقات على أحد الشارعين تبعد عن (م) ٢,٥ كم ، تسير سيارة على الشارع الثاني باتجاه م بسرعة ٤٠ كم / ساعة فإذا بدأت السيارة حركتها من نقطة تبعد ١٠ كم عن (م).

جد المسافة بين السيارة ومحطة المحروقات بعد ٩ دقائق من تحركها

الحل :

• المسافة التي تقطعها السيارة في ٩ د = السرعة × الزمن = ٤٠ × $\frac{٩}{٦٠}$ = ٦ كم

نحول الدقائق إلى ساعات

عندها يكون بعد السيارة عن (م) = ١٠ – ٦ = ٤ كم .

الآن نجد بعد السيارة عند النقطة (ب) عن المحطة (جـ) :

مَ^{٢} = بَ^{٢} + جَـ^{٢} - ٢ × بَ × جَـ جتا ٦٠°

= ٤ ^{٢} + (٢,٥)^{٢} - ٢ × ٤ × ٢,٥ × ٠,٥

مَ^{٢} = ١٦ + ٦,٢٥ – ١٠ ==> مَ^{٢} = ١٢,٢٥ ==> مَ = ٣,٥ كم .. وهو المطلوب..

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق : المعلمة سلسبيل الخطيب

للاستفسار : واتسب فقط ٠٧٨٨٢٠٧٤٧٢