

الرياضيات الصف التاسع

ملخص الوحدة السادسة

الهندسة الإحداثية

رقم الصفحة	فهرس الوحدة
٢	(٦ - ١) : المسافة بين نقطتين
٥	(٦ - ٢) : إحداثيا نقطة منتصف قطعة مستقيمة
٨	(٦ - ٣) : معادلة الخط المستقيم
١١	(٦ - ٤) : معادلة الدائرة
١٨	أسئلة مقترحة شاملة

لبست المنى وخلعتُ الحذر

يعش أبد الدهر بين الحفر

إذا ما طمحت إلى غاية

ومن لا يحب صعود الجبال

(٦ - ١) المسافة بين نقطتين

إذا كانت أ ب قطعة مستقيمة ، حيث أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) فإن المسافة بين أ ، ب أو طول القطعة أ ب يعطى بالقانون التالي :

$$أ ب = \sqrt{(س١ - س٢)^2 + (ص١ - ص٢)^2}$$



ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول لبعض أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسيل الخطيب"

مثال

جد طول القطعة المستقيمة (أ ب) إذا علمت أن أ (٢ ، ٣) ، ب (١ ، ٠) .

الحل :

$$أ (٢ ، ٣) \iff س١ = ٢ ، ص١ = ٣ \iff ب (١ ، ٠) \iff س٢ = ١ ، ص٢ = ٠$$

$$\text{اكتب القانون : } أ ب = \sqrt{(س١ - س٢)^2 + (ص١ - ص٢)^2}$$

$$\text{عوض القيم : } أ ب = \sqrt{(٢ - ١)^2 + (٣ - ٠)^2} = \sqrt{١ + ٩} = \sqrt{١٠}$$

مثال

جد طول قطر دائرة إذا كانت ج (١ ، ٢) ، د (٣ ، ٠) هما طرفي قطر فيها .

الحل :

قطر الدائرة : هو قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين على الدائرة مروراً بالمركز ، اذن لحساب طول قطر دائرة نحسب المسافة بين طرفي القطر

$$\text{القانون ج د} = \sqrt{(س١ - س٢)^2 + (ص١ - ص٢)^2}$$

$$= \sqrt{(١ - ٣)^2 + (٢ - ٠)^2} = \sqrt{٤ + ٤} = \sqrt{٨}$$

مثال

جد البعد بين النقطتين ج (أ ، ب) ، د (٦ + أ ، ٦ - ب) .

الحل :

$$\text{ج د} = \sqrt{(س١ - س٢)^2 + (ص١ - ص٢)^2} = \sqrt{(أ - (٦ + أ))^2 + (ب - (٦ - ب))^2}$$

$$= \sqrt{٤٠} = \sqrt{٤٠}$$

مثال

إذا كانت أ (٥، ٢) ، ب (٣، ٥) ج (٤، ٠) تمثل رؤوس المثلث أ ب ج ، ما أطوال أضلاعه .

الحل :

أطوال الاضلاع هي المسافة بين كل رأسين في المثلث ، إذن :

$$\begin{aligned} \text{قانون المسافة} &= \sqrt{(١س - ٢ص)^2 + (١ص - ٢ص)^2} \\ \text{أ ب} &= \sqrt{(٣ - ٥)^2 + (٥ - ٢)^2} = \sqrt{٢^2 + ٣^2} = \sqrt{١٣} \\ \text{أ ج} &= \sqrt{(٤ - ٥)^2 + (٠ - ٢)^2} = \sqrt{١^2 + ٢^2} = \sqrt{٥} \\ \text{ب ج} &= \sqrt{(٤ - ٣)^2 + (٠ - ٥)^2} = \sqrt{١^2 + ٥^2} = \sqrt{٢٦} \end{aligned}$$

مثال

إذا علمت أنّ (أل) قطر في دائرة حيث (س ، ٦) ، ل(٦ ، ١) وطول نصف قطرها يساوي ٦,٥ وحدة ، جد قيمة س .

الحل :

$$\text{طول نصف القطر} = ٦,٥ \leq \text{طول القطر} = ١٣ = ٢ \times ٦,٥$$

$$\text{طول أ ل} = \sqrt{(١س - ٢ص)^2 + (١ص - ٢ص)^2} = ١٣$$

$$\sqrt{(٦ - ٦)^2 + (س - ١)^2} = ١٣$$

$$\sqrt{(س - ١)^2} = ١٣ \quad \text{الآن رُبّع الطرفين ينتج :}$$

$$(س - ١)^2 = ١٦٩$$

$$١٦٩ = ١ - ٢س + س^2 \leq س^2 - ٢س + ١ = ١٦٩$$

$$س^2 - ٢س - ١٦٨ = ٠ ، \text{ الآن حل العبارة التربيعية ينتج :}$$

$$(س - ١٤) (س + ١٢) = ٠$$

$$\text{إما } س - ١٤ = ٠ \text{ ومنها } س = ١٤ \text{ أو } س + ١٢ = ٠ \text{ ومنها } س = -١٢$$

لكن الطول لا يكون سالباً لذا نأخذ الإجابة الموجبة $س = ١٤$

أنا مُصمّم على بلوغ الهدف ، ، فإمّا أن أنجح ... وإمّا أن أنجح ♥

مثال

إذا كانت أ ب قطعة مستقيمة طولها يساوي $\sqrt{2}$ وحدة ، وكانت : أ (٣ ، ١) ، ب (٢ ، ك) ، جد قيمة الثابت ك .

الحل :

$$\begin{aligned} \text{أ ب} &= \sqrt{(1\text{ص} - 2\text{ص})^2 + (1\text{س} - 2\text{س})^2} \\ \sqrt{2} &= \sqrt{(3 - \text{ك})^2 + (1 - 2)^2} \quad (\text{ربع الطرفين للتخلص من الجذر}) \\ 2 &= (3 - \text{ك})^2 + 1 \quad (\text{اطرح ١ من الطرفين}) \\ 1 &= (\text{ك} - 3)^2 \quad (\text{خذ الجذر التربيعي للطرفين للتخلص من التربيع}) \\ 1 \pm \text{ك} - 3 &= 0 \implies \text{ك} = 3 \pm 1 \implies \text{ك} = 3 + 1 = 4 \text{ أو } \text{ك} = 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

مثال

إذا كانت النقط س (١ ، ٢) ، ص (٥ ، ٥) ، ع (٤ ، ٢-) تمثل رؤوس مثلث ، فأثبت أنه متطابق الضلعين .

الحل :

جد أطوال أضلاع المثلث ، إذا تساوى ضلعين فيه فيكون المثلث متطابق الضلعين أي "متساوي الساقين"

$$\begin{aligned} \text{س ص} &= \sqrt{(5-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \text{ وحدة} \\ \text{س ع} &= \sqrt{(4-1)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{9+0} = \sqrt{9} = 3 \text{ وحدة} \\ \text{ص ع} &= \sqrt{(4-5)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} = \sqrt{10} \text{ وحدة} \\ \therefore \text{س ص} &= \text{س ع} \quad (\text{المثلث متطابق الضلعين}) \end{aligned}$$

جَهْدَ النَّفْسِ وَالْقُوَا دُونَهُ الْأَزْرَا
وَعَانَقَ الْمَجْدَ مَنْ أَوْفَى وَمَنْ صَبْرًا
لَنْ تَبْلُغَ الْمَجْدَ حَتَّى تَلْعَقَ الصَّبْرًا

دَبَّتْ لِلْمَجْدِ وَالسَّاعُونَ قَدْ بَلَّغُوا
فَكَابِدُوا الْمَجْدَ حَتَّى مَلَّ أَكْثَرُهُمْ
لَا تَحْسِنِ الْمَجْدَ تَمْرًا أَنْتَ أَكَلَهُ

(٦ - ٢) إحداثيا نقطة منتصف قطعة مستقيمة

إذا كان أ (١س، ١ص) ، ب (٢س، ٢ص) ، فإن إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة أ ب هما :

$$\left(\frac{١ص + ٢ص}{٢} , \frac{١س + ٢س}{٢} \right)$$

مثال

جد احداثيات نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة أ ب حيث أ (٣، -٤) ، ب (-٥، ٨)

الحل :

اكتب القانون

$$\text{نقطة المنتصف} = \left(\frac{١ص + ٢ص}{٢} , \frac{١س + ٢س}{٢} \right)$$

$$\text{عوض القيم} = \left(\frac{-٥ + ٨}{٢} , \frac{٣ + (-٤)}{٢} \right) = (١, -٢)$$

مثال

إذا كانت ل (س، ٤) ، وكانت ك (٢، ص) وكانت هـ (١، ٠) تقع منتصف ل ك ، جد قيم س ، ص

الحل :

$$\text{نقطة المنتصف} = \left(\frac{١ص + ٢ص}{٢} , \frac{١س + ٢س}{٢} \right) = \text{إذن :}$$

$$\text{هـ} (١، ٠) = \left(\frac{٢ + س}{٢} , \frac{ص + ٤}{٢} \right)$$

$$\frac{٢ + س}{٢} = ١ \iff س + ٢ = ٢ \text{ وبالضرب التبادلي ينتج } س = ٠ \text{ ومنها } ٢ = ٠$$

$$\frac{ص + ٤}{٢} = ٠ \text{ كذلك } ص + ٤ = ٠ \text{ وبالضرب التبادلي ينتج } ص = -٤ \text{ ومنها } ٤ = -٤$$

مثال

إذا كانت النقاط أ (٠، ٠) ، ب (٢، ٥) جـ (-١، ١) رؤوس مثلث وكانت د ، هـ ، و منتصفات الاضلاع

أب ، ب جـ ، أ جـ ، على التوالي جد محيط المثلث د هـ و .

الحل :

أولاً : جد احداثيات د : منتصف (أب) ، هـ : منتصف (ب جـ) ، و : منتصف (أ جـ)

$$\begin{aligned} (2, 5, 1) &= \left(\frac{0+0}{2}, \frac{2+0}{2} \right) = د \\ (3, 0, 5) &= \left(\frac{1+0}{2}, \frac{1+2}{2} \right) = هـ \\ (0, 5, 0, 5) &= \left(\frac{1+0}{2}, \frac{1+0}{2} \right) = و \end{aligned}$$

ثانياً : جد أطوال القطع د و ، ده ، وه من قانون المسافة بين نقطتين :

$$\begin{aligned} \text{قانون المسافة} &= \sqrt{(1س - 2ص)^2 + (1ص - 2س)^2} \\ د هـ &= \sqrt{(2,5 - 3)^2 + (1 - 0,5)^2} \\ د و &= \sqrt{(2,5 - 0,5)^2 + (1 - 0,5)^2} \\ وه &= \sqrt{(3 - 0,5)^2 + (0,5 - 0,5)^2} \\ \text{إذن محيط المثلث} &= \sqrt{7,25} + \sqrt{6,25} + \sqrt{0,5} \end{aligned}$$

مثال

إذا كانت أ (٢ ، ٦) و كانت ج (٣ ، ٥) تمثل منتصف أ ب ، فما إحداثيات النقطة ب ؟

الحل :

ج (٣ ، ٥) هي منتصف القطعة أ ب ، إذن نفرض النقطة ب هي (س، ص)

$$\left(\frac{6+ص}{2}, \frac{2+س}{2} \right) =$$

$$\left(\frac{6+ص}{2}, \frac{2+س}{2} \right) = (٥, ٣)$$

$$٤ = س \iff \frac{2+س}{2} = ٣ \iff$$

$$(٤, ٤) \text{ إذن النقطة ب } ٤ = ص \iff \frac{6+ص}{2} = ٥ \iff$$

مثال

إذا علمت أن أ ب قطر في دائرة حيث أ (-٣ ، ٢) ، ب (٧ ، -٥) فجد ما يلي :

أ) إحداثيي مركز الدائرة . ب) طول نصف قطر الدائرة .

الحل :

أ) مركز الدائرة هو نقطة منتصف القطر أ ب

$$م = \left(\frac{٧+٣}{2}, \frac{-٥+٢}{2} \right) = \left(\frac{١٠}{2}, \frac{-٣}{2} \right) = (٥, -١,٥)$$

ب) طول نصف قطر الدائرة = طول القطر $\div 2$

$$\frac{\sqrt{149}}{2} = \text{نصف القطر} \iff \sqrt{149} = \sqrt{((5-2)^2 + (7-3)^2)} = \text{القطر}$$

مثال

إذا كانت أ (1، 1)، ب (1، 3)، ج (3، 3)، د (3، 1) رؤوس مربع وكانت هـ، و، ز، ح، منتصفات الأضلاع أب، ب ج، ج د، د أ على الترتيب، فما مساحة المربع هـ و ز ح؟

الحل:

إحداثيا النقطة هـ (منتصف أب) = $(\frac{1+1}{2}, \frac{3+1}{2}) = (1, 2)$
 إحداثيا النقطة و (منتصف ب ج) = $(\frac{3+1}{2}, \frac{3+3}{2}) = (2, 3)$
 الآن جد طول القطعة المستقيمة هـ و وهي أحد أضلاع المربع المطلوب إيجاد مساحته هـ و = $\sqrt{(1-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{(1ص-2ص)^2 + (1س-2س)^2}$
 ∴ مساحة المربع = (الضلع)² = $(\sqrt{2})^2 = 2$ وحدة مربعة.

مثال

رسم مربع بحيث كان أحد أضلاعه منطبقاً على محور الصادات، إذا علمت أن مركز المربع هو $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ وأحد الرؤوس هو (3، 4) جد إحداثيي باقي الرؤوس

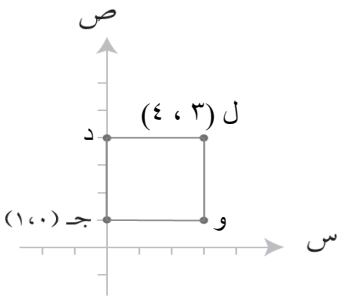
الحل:

افرض ل (3، 4) أحد الرؤوس والرأس المقابل له ج (س، ص) فيكون مركز المربع (م) هو نقطة منتصف القطر حيث ل ج، إن:

$$\text{إحداثيات م} = (\frac{\frac{3}{2} + 3}{2}, \frac{\frac{5}{2} + 4}{2}) = (\frac{9}{4}, \frac{13}{4})$$

$$\frac{3}{2} = \frac{\frac{3}{2} + 3}{2} \iff 3 = 3 + 3 = 3 + س \iff س = 3$$

$$\frac{5}{2} = \frac{\frac{5}{2} + 4}{2} \iff 5 = 5 + 4 = 5 + ص \iff ص = 1$$



إن النقطة ج (1، 0) وهو الرأس الثاني يقع على المحور الصادي،

انظر الشكل << لاحظ أن طول ضلع المربع 3 وحدات، لذا الرأس

الثالث د (4، 0) يقع على المحور الصادي والرأس الرابع و (3، 1)

(٦ - ٣) معادلة الخط المستقيم

معادلة الخط المستقيم الذي ميله (م) ، ويمر بالنقطة (س١ ، ص١) هي :

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م} (\text{س} - \text{س}_1)$$

إذن لإيجاد معادلة خط مستقيم يلزمنا معرفة ميل هذا المستقيم م والتي تجدها من العلاقة $\text{م} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$ ، ويلزم معرفة نقطة تقع على المستقيم .



ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول لبعض أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

مثال

ما معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين أ (٣ ، ٥) ، ب (٤ ، ٧) ؟

الحل :

يلزم معرفة الميل ونقطة تقع على المستقيم ، يمكنك إيجاد الميل من النقطتين أ ، ب أما النقطة التي تقع على المستقيم فأمامك خيارين هما النقطتين أ ، ب اللتين يمر بهما المستقيم ، تختار أيّاً منهما ستعطي نفس النتيجة .

$$\text{الميل م} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{٥ - ٧}{٣ - ٤} = ٢$$

اكتب معادلة الخط المستقيم ، واختر نقطة واقعة عليه ولتكن النقطة (٣ ، ٥)

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م} (\text{س} - \text{س}_1)$$

$$\text{ص} - ٥ = ٢ (\text{س} - ٣) \quad \text{هنا فك القوس ، إذن ص} - ٥ = ٢\text{س} - ٦$$

الآن اجعل ص موضوع القانون (أي اجعلها وحدها في الشق الأيمن من المعادلة)

$$\text{إذن : ص} = ٢\text{س} - ٦ + ٥ \quad \text{==> ص} = ٢\text{س} - ١$$

مثال

ما معادلة الخط المستقيم الذي ميله - ٥ ، ويمر بنقطة الاصل ؟

الحل :

$$\text{نقطة الاصل (٠ ، ٠) ، الميل} = - ٥$$

$$\text{معادلة الخط المستقيم : ص} - \text{ص}_1 = \text{م} (\text{س} - \text{س}_1) \quad \text{==> ص} - ٠ = - ٥ (\text{س} - ٠) \quad \text{==> ص} = - ٥\text{س}$$

مثال

ما معادلة الخط المستقيم الذي ميله = 1 - ويمر بالنقطة (-3 ، 2)

الحل :

هنا الميل معلوم والنقطة معلومة إذن عوض فقط في معادلة الخط المستقيم

$$\text{المعادلة : ص - ص}_1 = \text{م} (\text{س} - \text{س}_1)$$

$$\text{عوض مكان س}_1 = 3 - ، \text{ص}_1 = 2 ، \text{م} = 1 -$$

$$\text{ص} - 2 = 1 - (\text{س} - 3) \iff \text{ص} - 2 = 1 - \text{س} + 3$$

$$\text{فك القوس ورتب المعادلة ، إذن : ص} - 2 = 1 - \text{س} + 3 \iff \text{ص} = 1 - \text{س} + 5$$

مثال

ما معادلة الخط المستقيم الذي ميله 3 ويمر بنقطة تقاطع المستقيم $2\text{س} + 3\text{ص} = 6$ مع محور السينات ؟

الحل :

عندما يقطع مستقيم محور السينات تكون $\text{ص} = 0$ ، إذن عوضها في معادلة المستقيم لتجد قيمة س \iff

$$2\text{س} + 3 \times 0 = 6 \iff 2\text{س} = 6 \iff \text{س} = 3$$

ومنها ينتج $2\text{س} = 6$ إذن $\text{س} = 3$ والنقطة هي (3 ، 0)

$$\text{المعادلة : ص} - \text{ص}_1 = \text{م} (\text{س} - \text{س}_1) \iff \text{ص} - 0 = 3 (\text{س} - 3) \iff \text{ص} = 3\text{س} - 9$$

مثال

ما معادلة الخط المستقيم الذي ميله 2 ، و مقطعه السيني 3

الحل :

عندما يُعطى المقطع السيني تكون

ص = 0

س هو المقطع المُعطى في السؤال

المقطع السيني 3

أي النقطة (3 ، 0) والميل = 2 -

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م} (\text{س} - \text{س}_1)$$

$$\text{ص} - 0 = 2 (\text{س} - 3) \iff \text{ص} = 2\text{س} - 6$$

الحياة مليئة بالحجارة ، فلا تتعثر بها ، بل اجمعها وأبنِ بها سلماً تصعد به نحو النجاح .

مثال

جد معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{1}{4}$ ، ومقطعه الصادي = - ٤

الحل :

مقطعه الصادي = -٤

عندما يُعطى المقطع الصادي تكون

س = صفر

ص هو المقطع المُعطى في السؤال

إذن النقطة (٠ ، -٤) والميل $\frac{1}{4}$ = م

اكتب معادلة الخط المستقيم : ص - ص_١ = م (س - س_١)

ص - -٤ = $\frac{1}{4}$ (س - ٠) \Leftrightarrow ص + ٤ = $\frac{1}{4}$ س

وبجعل ص موضوعا للقانون تصبح المعادلة ص = $\frac{1}{4}$ س - ٤

مثال

مستقيم ميله = ٣ ، ويمر بالنقطتين (٧ ، أ) ، (١ ، ٢) جد قيمة أ

الحل :

من قانون الميل : م = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

عوض مكان الميل = ٣ ومكان كل من س_١ = أ ، س_٢ = ١ ، ص_١ = ٧ ، ص_٢ = ٢ = أ

$\frac{٢ - أ}{١ - ٧} = ٣$ بالضرب التبادلي ينتج : ٣ - ٣أ = ٢ - أ

أعد ترتيب الحدود ٣ + أ = ٢ + ٣أ ينتج ١٠ = ٢أ ومنها أ = ٥

مثال

ما معادلة الخط المستقيم الذي ميله ٢ ويمر بنقطة تقاطع المستقيمين

٢ س + ٣ ص = ٧ ، ٣ س - ٢ ص = ٤

الحل :

نجد نقطة تقاطع المستقيمين ٢ س + ٣ ص = ٧ ، ٣ س - ٢ ص = ٤

وذلك بطريقة الحذف :

(٢ س + ٣ ص = ٧) \times ٣ \Leftrightarrow ٦ س + ٩ ص = ٢١

(٣ س - ٢ ص = ٤) \times ٢ \Leftrightarrow ٦ س - ٤ ص = ٨

بجمع المعادلتين ينتج ١٣ ص = ١٣ ، وتكون ص = ١

ولحساب س عوض مكان ص = ١ في أي من المعادلتين $٧ = ١ \times ٣ + ٢س$ و $٧ = ٣ + ٢س$ وبحل المعادلة ينتج س = ٢
 إذن النقطة (١ ، ٢) تحقق المستقيم المطلوب كتابة معادلته ، والميل = ٢ ، إذن :
 ص - ص_١ = م (س - س_١) \Leftrightarrow ص - ١ = (س - ١) ٢ = ٢(س - ١)
 \Leftrightarrow ص - ١ = ٢س - ٢ \Leftrightarrow ص = ٢س - ١

مثال

جد معادلة الخط المستقيم الذي مقطعه السيني = ٣ ، والصادي = ٥

الحل :

المقطع السيني = ٣ \Leftrightarrow النقطة (٣ ، ٠)

المقطع الصادي = ٥ \Leftrightarrow النقطة (٠ ، ٥)

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - ٠}{٠ - ٣} = \frac{٥}{-٣} = -\frac{٥}{٣}$$

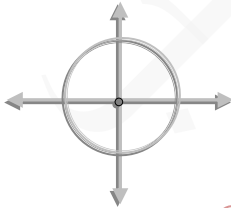
معادلة الخط المستقيم : ص - ص_١ = م (س - س_١) ولتكن النقطة (٣ ، ٠)

$$\text{إذن : ص - ٠ = } -\frac{٥}{٣} (س - ٣) \Leftrightarrow \text{ص} = -\frac{٥}{٣}س + ٥$$

(٦ - ٤) معادلة الدائرة

<< **معادلة الدائرة** هي علاقة بين الإحداثي السيني والإحداثي الصادي لأي نقطة على الدائرة ، وكل زوج مرتب يحقق هذه المعادلة يُمثل نقطة على الدائرة .

<< **أولاً :** معادلة الدائرة التي مركزها (٠ ، ٠) ، وطول نصف قطرها ر هي :



$$س^٢ + ص^٢ = ر^٢$$

مثال

جد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها $س^٢ + ص^٢ = ٣٦$

الحل :

المعادلة على الصورة : $س^٢ + ص^٢ = ر^٢$

إذن المركز هو (٠ ، ٠) ، ونصف القطر (ر) $= \sqrt{٣٦} = ٦$

ملاحظة تجد شرح هذه الوحدة مع حلول لبعض أسئلة الكتاب على قناتي في اليوتيوب باسم "سلسبيل الخطيب"

مثال

جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها = ٤

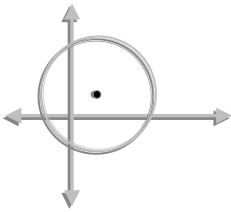
الحل :

بما أن مركزها نقطة الأصل إذن معادلتها هي : $s^2 + v^2 = r^2$

الآن عوض نصف القطر المعطى في المعادلة : $s^2 + v^2 = ٤^2$

أي : $s^2 + v^2 = ١٦$

<< **ثانياً :** معادلة الدائرة التي مركزها ل (د ، هـ) ونصف قطرها ر هي :



$$(s - د)^2 + (v - هـ)^2 = r^2$$

وتسمى هذه الصورة بالصورة القياسية .

مثال

ما معادلة الدائرة التي مركزها (٣ ، ٤) ووطول نصف قطرها ٦

الحل :

لاحظ المركز هنا (٣ ، ٤) وهو يُناظر المركز (د ، هـ) في الصورة القياسية لمعادلة الدائرة :

$$(s - د)^2 + (v - هـ)^2 = r^2 \quad , \quad ٦ = r$$

$$\implies \text{المعادلة : هي } (s - ٣)^2 + (v - ٤)^2 = ٣٦$$

مثال

اكتب معادلة الدائرة التي مركزها و (٢ ، ٢-) ، ووطول نصف قطرها = ٥

الحل :

$$\text{المركز } (٢- , ٢) = (د , هـ) \quad , \quad ٥ = r$$

$$\text{الصورة القياسية لمعادلة الدائرة : } (s - د)^2 + (v - هـ)^2 = r^2$$

$$\text{عوض القيم في المعادلة } \implies (s - ٢)^2 + (v - ٢-)^2 = ٢٥$$

$$\implies ٢٥ = (s - ٢)^2 + (v + ٢)^2$$

<< **ثالثاً** : الصورة العامة لمعادلة الدائرة

$$س^2 + ص^2 + أس + ب ص + ج = ٠$$

ويُمكن إيجاد المركز وطول نصف قطر الدائرة من المعادلة حيث :

$$\text{المركز } = (د ، هـ) = \left(-\frac{1}{2} \text{ معامل س} , -\frac{1}{2} \text{ معامل ص} \right)$$

$$\text{نصف القطر } (ر) = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\text{معامل س}^2 + \text{معامل ص}^2 - 4ج \right)}$$

مثال

جد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها :

$$س^2 + ص^2 + ٤س + ٨ص + ١٦ = ٠$$

الحل :

$$\text{بمقارنة معادلة الدائرة } س^2 + ص^2 + ٤س + ٨ص + ١٦ = ٠$$

بالمعادلة (الصورة العامة) $س^2 + ص^2 + أس + ب ص + ج = ٠$ نجد :

$$د = -\frac{1}{2} \text{ معامل س} = -\frac{1}{2} \times ٤ = -٢ , \quad \text{إذن } د = -٢$$

$$هـ = -\frac{1}{2} \text{ معامل ص} = -\frac{1}{2} \times ٨ = -٤ , \quad \text{إذن } هـ = -٤$$

$$\text{إذن المركز } (د ، هـ) = (-٢ ، -٤)$$

$$ر = \sqrt{\frac{1}{4} (٤^2 + ٨^2 - 4 \times ١٦)} = ٢$$

مثال

جد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها : $س^2 + ص^2 - ٨س + ١٠ص - ٥ = ٠$

الحل :

نعيد كتابة المعادلة لتصبح كالصورة العامة لمعادلة الدائرة

$$س^2 + ص^2 - ٨س + ١٠ص - ٥ = ٠$$

المركز : (د ، هـ)

$$\text{بمقارنة معادلة الدائرة } س^2 + ص^2 - ٨س + ١٠ص - ٥ = ٠$$

بالمعادلة $س^2 + ص^2 + أس + ب ص + ج = ٠$ تجد :

$$د = -\frac{1}{2} \text{ معامل } س = -\frac{1}{2} \times ٨ = ٤ ، \quad \text{إذن } د = ٤$$

$$هـ = -\frac{1}{2} \text{ معامل } ص = -\frac{1}{2} \times ١٠ = ٥ ، \quad \text{إذن } هـ = ٥$$

المركز (د، هـ) = (٤، ٥)

$$\text{نصف القطر : } ر = \sqrt{د^2 + هـ^2 - ج} = \sqrt{٤^2 + ٥^2 - ١٦} = \sqrt{٣٦} = ٦$$

<< أمثلة متنوعة على الحالات الثلاث:

مثال

ما معادلة الدائرة التي مركزها م (-٤، ٢) وطول نصف قطرها ٧؟

الحل :

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة (س-د) + (ص-هـ) = ر²

$$٤٩ = (س+٤)^2 + (ص-٢)^2 \iff ٢٧ = (س-٢)^2 + (ص+٤)^2$$

مثال

ما معادلة الدائرة التي مركزها (١، ٥) وتمس محور السينات

الحل :

في حالة كانت الدائرة تمس محور السينات يكون نصف القطر = القيمة المطلقة للإحداثي الصادي من

$$\text{النقطة } (١، ٥) \text{ التي تمثل المركز} \iff ر = ٥$$

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة (س-د) + (ص-هـ) = ر²

$$\therefore \text{المعادلة هي : } (س-١)^2 + (ص-٥)^2 = ٢٥$$

مثال

ما معادلة الدائرة التي مركزها (-٣، -٤) وتمس محور الصادات

الحل :

في حالة كانت الدائرة تمس محور الصادات يكون نصف القطر = القيمة المطلقة للإحداثي السيني من

$$\text{النقطة } (-٣، -٤) \text{ التي تمثل المركز} \iff ر = |٣| = ٣$$

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة (س-د) + (ص-هـ) = ر²

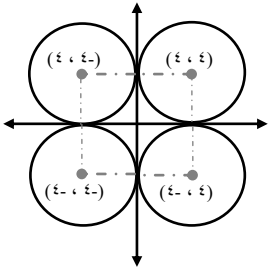
$$\sqrt{3} = \sqrt{((4-)) - (ص)} + \sqrt{((3-)) - (س)} \Leftrightarrow$$

$$9 = \sqrt{(4 + ص)} + \sqrt{(3 + س)} : \text{المعادلة} :$$

مثال

ما معادلة الدائرة التي تمس محوري السينات والصادات، علماً بأن طول نصف قطرها ٤ وحدات، جد جميع الحلول الممكنة

الحل :



$$\text{الحل الاول : م } (4, 4) , \quad 4 = ر , \quad 16 = \sqrt{(4 - ص)} + \sqrt{(4 - س)}$$

$$\text{الحل الثاني : م } (4, -4) , \quad 4 = ر , \quad 16 = \sqrt{(4 - ص)} + \sqrt{(4 + س)}$$

$$\text{الحل الثالث : م } (-4, -4) , \quad 4 = ر , \quad 16 = \sqrt{(4 + ص)} + \sqrt{(4 + س)}$$

$$\text{الحل الرابع : م } (-4, 4) , \quad 4 = ر , \quad 16 = \sqrt{(4 + ص)} + \sqrt{(4 - س)}$$

مثال

جد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها

$$\text{أ) } 36 = \sqrt{ص} + \sqrt{س} \quad \text{ب) } 0 = \sqrt{ص} - \sqrt{س} - 5$$

الحل :

$$\text{أ) المركز } (0, 0) , \quad \text{نصف القطر } (ر) = \sqrt{36} = 6$$

$$\text{ب) الصورة العامة : } \sqrt{ص} + \sqrt{س} + \sqrt{ص} + \sqrt{س} + \sqrt{ص} + \sqrt{س} = 0$$

$$د = -\frac{1}{4} \text{ معامل س} = -\frac{1}{4} \times 5 = -\frac{5}{4} \Leftrightarrow د = 2,5$$

$$هـ = -\frac{1}{4} \text{ معامل ص} = -\frac{1}{4} \times 0 = 0 \Leftrightarrow هـ = 0$$

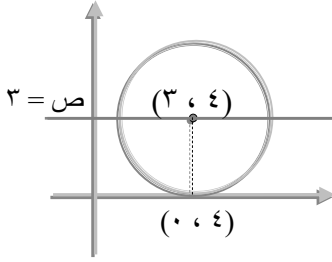
$$\text{المركز } (د, هـ) = (0, 2,5)$$

$$\text{نصف القطر} = \sqrt{د^2 + هـ^2} = \sqrt{0^2 + (2,5)^2} = 2,5$$

والعلمُ يجلو العمى عن قلب صاحبه كما يجلي سواد الظلمة القمرُ

مثال

جد معادلة الدائرة التي مركزها يقع على المستقيم $ص = 3$ وتمس محور السينات عند النقطة $(0, 4)$



الحل :

المركز $(3, 4)$ انظر الشكل \Leftarrow

$ر =$ الإحداثي الصادي $= 3$

$$المعادلة (س - 3) + (ص - 4) = 9$$

مثال

أي المعادلات التالية تمثل معادلة دائرة

(أ) $س^2 + ص^2 + 4ص - 2س + 1 = 0$

(ب) $س^2 + ص^2 + 6ص + 2س + 15 = 0$

(ج) $س^2 + ص^2 + 8س + 6ص + 25 = 0$

الحل :

تذكر أن $ر = \sqrt{د^2 + هـ^2 - ج}$ ، حيث $د^2 + هـ^2 - ج < صفر$

إذن ، ، جد قيم د ، هـ ، ج ، ، فإذا كان $د^2 + هـ^2 - ج < صفر$ ، تكون المعادلة معادلة دائرة ، إذن :

(أ) $د = -\frac{1}{4}$ معامل س $= -\frac{1}{4} \times 2 = -\frac{1}{2}$ ، إذن $د = -\frac{1}{2}$

$هـ = -\frac{1}{4}$ معامل ص $= -\frac{1}{4} \times 4 = -1$ ، إذن $هـ = -1$

إذن $د^2 + هـ^2 - ج = 1 - 4 + 1 = 0 < 0$ إذن هذه معادلة دائرة ✓

(ب) $د = -\frac{1}{4}$ معامل س $= -\frac{1}{4} \times 6 = -\frac{3}{2}$ ، إذن $د = -\frac{3}{2}$

$هـ = -\frac{1}{4}$ معامل ص $= -\frac{1}{4} \times 2 = -\frac{1}{2}$ ، إذن $هـ = -\frac{1}{2}$

إذن $د^2 + هـ^2 - ج = 9 - 1 + 15 = 23 > 0$ إذن هذه ليست معادلة دائرة ✗

(ج) $د = -\frac{1}{4}$ معامل س $= -\frac{1}{4} \times 8 = -2$ ، إذن $د = -2$

$هـ = -\frac{1}{4}$ معامل ص $= -\frac{1}{4} \times 6 = -\frac{3}{2}$ ، إذن $هـ = -\frac{3}{2}$

إذن $د^2 + هـ^2 - ج = 4 - 9 + 16 = 11 > 0$ ، إذن هذه نقطة وليست معادلة دائرة ✗

مثال

إذا كانت (س - ١) + ٢(٢ - ص) = ٩ ، معادلة دائرة صنف النقاط الآتية بالنسبة للدائرة :

(أ) (٢ ، ٤) (ب) (٠ ، ٠) (ج) (٣ ، ٧)

الحل :

عوض النقاط في المعادلة

(أ) (٢ - ٤) + ٢(٢ - ٢) = ٩ << ٩ = ٠ + ٢(٣) ، إذن تقع النقطة أ (على الدائرة)

(ب) (٢ - ٠) + ٢(٢ - ٠) = ٩ << ٩ > ٤ + ١ ، إذن تقع النقطة ب (داخل الدائرة)

(ج) (٢ - ٣) + ٢(١ - ٧) = ٩ << ٩ < ١ + ٣٦ ، إذن تقع النقطة ج (خارج الدائرة)

<< أسئلة مقترحة شاملة للوحدة

السؤال الأول :

ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة

(١) طول قطر الدائرة التي معادلتها س + ٢ص = ٦٤ يساوي

(أ) ٨ (ب) ١٦ (ج) ٤ (د) ٦٤

(٢) إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة أ ب حيث أ (-٦ ، -٨) ب (٢ ، ٤) هما

(أ) (-٢ ، -٢) (ب) (-٤ ، -٤) (ج) (-٢ ، ٢) (د) (٢ ، ٣)

(٣) طول القطعة المستقيمة س ص حيث س (٠ ، ٠) ، ص (-٣ ، ٤) يساوي

(أ) ٢٥ (ب) ١٦ (ج) ٥ (د) ٧

(٤) إحدى النقاط المذكورة أدناه تقع على الدائرة التي معادلتها س + ٢ص = ٢٥

(أ) (-٢ ، ٤) (ب) (-٤ ، ٣) (ج) (٠ ، ٤) (د) (٣ ، ٥)

(٥) معادلة الدائرة التي مركزها (-٢ ، ٥) وطول نصف قطرها ٢

(أ) (س + ٢) + ٢(ص - ٥) = ٤ (ب) (س + ٢) + ٢(ص - ٥) = ٢

(ج) (س - ٢) + ٢(ص - ٥) = ٢ (د) (س - ٢) + ٢(ص - ٥) = ٤

السؤال الثاني

إذا كانت أ (٣، ١-) ، ب (٧، ١) ، ج (٥، ٥)
أ) جد إحداثيي النقطة د بحيث تكون النقطة د منتصف أ ج
ب) جد معادلة المستقيم ب د

الحل :

$$أ) د = \left(\frac{٣+٧}{٢}, \frac{١+١}{٢} \right) = \left(\frac{١٠}{٢}, \frac{٢}{٢} \right) = (٥, ١)$$

$$ب) جد ميل ب د \Rightarrow م = $\frac{١-١}{٥-٣} = \frac{٠}{٢} = ٠$$$

المعادلة: ص - ص = م (س - س) والنقطة (٥، ١)

$$ص - ص = ٠ (س - ٥) \Rightarrow ص - ص = ٠$$

بإعادة ترتيب المعادلة تصبح ص - ص = ٠

السؤال الثالث

جد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها

$$أ) ١٤ = ٢س + ٢ص - ١٢س$$

$$ب) ٧ = ٢ص + ٢س$$

الحل :

أ) اقسّم على ٢ ليصبح معامل س، ص = ١

$$٧ = ٢ص + ٢س - ١٢س \Rightarrow ٧ = ٢ص - ١٠س$$

بمقارنة المعادلة بالصورة العامة: س + ص + ج = ٠

$$د = - \frac{١}{٢} \text{ معامل س} = - \frac{١}{٢} \times ١٠ = ٥$$

$$هـ = - \frac{١}{٢} \text{ معامل ص} = - \frac{١}{٢} \times ١ = - \frac{١}{٢}$$

$$م (د، هـ) = (٥, - \frac{١}{٢})$$

$$ر = \sqrt{١٠ + \frac{١}{٤}} = \sqrt{١٠.٢٥} = \sqrt{٢٥}$$

$$ب) س + ص = ٧ ، م (٠، ٠) ، ر = \sqrt{٧}$$

السؤال الرابع

المثلث أ ب ج فيه أ (٣ ، ١) ، ب (-١ ، ٠) ، ج احداثيي ج إذا علمت أن ميل أ ب = -٢ ،
ميل ب ج = ١

الحل :

افرض ج (س ، ص)

$$\text{ميل (أ ب)} : ٢ - = \frac{١ - ص}{٣ - س} \iff ٢ - (٣ - س) = ١ - ص$$

$$\text{وبفك القوس ينتج : } ٢ - س + ٦ = ١ - ص \iff ٢ - س + ٧ = ص \dots (١)$$

$$\text{ميل (ب ج)} : ١ = \frac{٠ - ص}{١ - س} \iff ١(١ - س) = -ص$$

$$\text{بالتضرب التبادلي ينتج : } ١ + س = ص \dots (٢)$$

استخدم الحذف لحل المعادلتين ، إذن :

$$٢ - س + ٧ = ص \quad \times / \quad ١ - س = ص$$

$$\underline{٢ - س + ٧ = ص} \iff \underline{١ + س = ص}$$

$$٢ - س + ٧ = ١ + س \quad \text{ومنه } ٢ = ٣ - س$$

جد ص بالتعويض في إحدى المعادلتين ولتكن س + ١ = ص

$$\iff ٢ + ١ = ص \iff ٣ = ص \quad \text{، إذن ج (٢ ، ٣)}$$

السؤال الخامس

جد احداثيي المركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها (٢-س-٤) + (٢ص+٦) = ١٦

الحل :

$$(٢-س-٤) + (٢ص+٦) = ١٦$$

$$٤س - ٢ - ٨ + ٢ص + ٦ = ١٦ \quad \text{(بفك الأقواس)}$$

$$٤س - ٢ + ٢ص = ١٢ \quad \text{(بنقل ١٦ إلى الجهة اليسرى)}$$

$$٤س + ٢ص = ١٤ \quad \text{(بترتيب المعادلة)}$$

$$٤س + ٢ص = ١٤ \quad \text{(بالقسمة على ٤)}$$

بمقارنة المعادلة بالصورة العامة : س^٢ + ص^٢ + أس + ب ص + ج = ٠

$$٤س + ٢ص = ١٤ \quad \text{، إذن د = ٢} \quad \text{معامل س} = -\frac{١}{٤} \times ٤ = -١$$

$$\begin{aligned} \text{هـ} - \frac{1}{4} = \text{معامل ص} = \frac{1}{4} \times 6 = 3 - \text{، إذن هـ} = 3 - \\ \text{إذن المركز (د، هـ)} = (3 - ، 2) \\ 2 = \sqrt{9 - 2(3 -) + 2(2)} = \sqrt{د^2 - 2هـ + 2} = ر \end{aligned}$$

السؤال السادس

إذا كانت أ (1، 1) ، ب (3، 1) ، ج (1 + $\sqrt{3}$ ، 2) رؤوس مثلث
 (أ) أثبت أن المثلث متطابق الاضلاع .
 (ب) جد ارتفاع المثلث .

الحل :

(أ) لإثبات أن المثلث متطابق الاضلاع نجد أطوال جميع الاضلاع من قانون المسافة بين نقطتين

$$\text{أ ب} = \sqrt{(1 - 3)^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{(1 - 3)^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{أ ج} = \sqrt{(1 + \sqrt{3} - 1)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\text{ب ج} = \sqrt{(1 + \sqrt{3} - 3)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

∴ أ ب = أ ج = ب ج = 2 (المثلث متطابق الأضلاع)

(ب) لإيجاد ارتفاع المثلث جد أولاً احداثيات نقطة المنتصف لأحد الأضلاع وليكن أ ب

$$\text{افرض نقطة المنتصف هـ} = \left(\frac{1+3}{2} , \frac{1+1}{2} \right) = (2 , 1)$$

ثم جد المسافة بين النقطة هـ ، والرأس المقابل ج أي طول ج هـ

$$\text{ج هـ} = \sqrt{(2 - 2)^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{0 + 0} = 0$$