الوحدة الرابعة

التكامل

الثاني الثانوي الأدبي

حل تمارين الكتاب

اعداد المعلمة : ميسون الحسين

٠٧٩٨٩٥٩٠٧١

منهاجي

Scanned by CamScanner

الأسئلة

التكامل غير المحدود

١) جد كلًّا مما يأتي:

أ) $\int \frac{١}{٢}\, ٥س$

ب) $\int \frac{٥س}{س^{٥}}$ ، $س \neq ٠$

جـ) $\int (٢ - س^{٢})\, ٥س$

د) $\int ٣س^{٢}\, ٥س$

هـ) $\int \frac{-٢}{س^{-٥}}\, ٥س$

٢) جد كلًّا مما يأتي:

أ) $\int (١٠س^{٢} - \sqrt[٦]{س} + ٣قا^{٢}س)\, ٥س$

ب) $\int (٢ - س)(٤س + ١)\, ٥س$

جـ) $\int ٣ظاس\, جتاس\, ٥س$

د) $\int \frac{س^{٢} + ٦س + ٨}{س + ٢}\, ٥س$ ، $س \neq -٢$

٣) جد $\frac{٥ص}{٥س}$ عندما $س = ٥$، حيث $ص = \int \frac{٤س + ١}{س}\, ٥س$ ، $س \neq ٠$

٤) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق، وكان قَ(س) = ٦س − ٨س^{٣} + ٥، وكان ق(−١) = ٢٠، فجد قاعدة الاقتران ق.

٥) إذا كان $\int عَ(س)\, ٥س = ٦س^{٣} - ٣س^{٢} + ٦س - ٥$، فجد عَ(١).

Scanned by CamScanner

٦) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق، وكان قَ(س) = ٢س − ٥ ، وكان ق(٢) = ٤، فجد قيمة ق(١).

٧) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق، وكان قَ(س) = ٣س(٦ − ٥س) + ٤س^{٣} ، وكان ق(٢) = −١، فجد قيمة ق(١).

٨) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق، وكان قَ(س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٨\text{س}^{٣}}{\text{س}}$، س ≠ صفرًا، وكان ق(١) = ١٢، فجد قاعدة الاقتران ق.

٩) إذا كان ل اقترانًا قابلًا للاشتقاق، وكان لَ(س) = ٦س^{٢} − ٦س^{٣} − ٢س، فجد قيمة ل(٣) − ل(١).

Scanned by CamScanner

س١ جد كلاً مما يأتي :

أ) $\int \frac{1}{2} \, dس = \frac{1}{2} س + ج$

ب) $\int \frac{٤س}{س^{٥}} = \int س^{-٥} \, dس$

$= \frac{س^{-٥+١}}{-٥+١} + ج = \frac{س^{-٤}}{-٤} + ج$

$= -\frac{١}{٤س^{٤}} + ج$

جـ) $\int (٤ - س^{٢}) \, dس =$

$٤س - \frac{س^{٣}}{٣} + ج$

د) $\int ٣س^{٢} \, dس =$

$\frac{٣س^{٣}}{٣} + ج = س^{٣} + ج$

هـ) $\int \frac{-٢}{س^{٥}} \, dس =$

$\int -٢ س^{-٥} \, dس =$

$\frac{-٢}{-٦} س^{-٦} + ج$

$\frac{١}{٣} س^{-٦} + ج$

س٢ جد كلاً مما يأتي :

أ) $\int (١٠س^{٢} - ٦س + ٣ قاس) \, dس$

$= \int (١٠س^{٢} - س^{\frac{١}{٦}} + ٣ قاس) \, dس$

$= \frac{١٠}{٣} س^{٣} - \frac{س^{\frac{١}{٦}+١}}{\frac{١}{٦}+١} + ٣ ظاس + ج$

$= \frac{١٠}{٣} س^{٣} - \frac{س^{\frac{٧}{٦}}}{\frac{٧}{٦}} + ٣ ظاس + ج$

$= \frac{١٠}{٣} س^{٣} - \frac{٦}{٧} س^{\frac{٧}{٦}} + ٣ ظاس + ج$

ب) $\int (٤ - س)(٤س + ١) \, dس =$

$\int (١٦س + ٤ - ٤س^{٢} - س) \, dس =$

$\int (١٥س + ٤ - ٤س^{٢}) \, dس =$

$\frac{١٥}{٢} س^{٢} + ٤س - \frac{٤}{٣} س^{٣} + ج$

د) $\int ٣ ظاس \, قاس \, dس$

$\int ٣ \frac{جاس}{جتاس} \, dس$

$\int ٣ جاس \, dس = -٣ جتاس + ج$

ظاس = جاس / جتاس

منهاجي

Scanned by CamScanner

$\int \frac{س^3 + 6س + 8}{س + 2}$ د س .

نحلل البسط .

$\int \frac{(س+2)(س+4)}{س+2}$ د س

$\int (س+4)$ د س $= \frac{س^2}{2} + 4س + ج$

$س^3$ جد $\frac{د ص}{د س}$ عندما $س = 0$ حيث

$ص = \int \frac{4س + 1}{س}$ د س المشتقة الطرفية

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د}{د س} \int \frac{4س+1}{س}$ د س

$\frac{د ص}{د س} = \frac{4س+1}{س}$.

$\left| \frac{د ص}{د س} \right|_{س=0} = \frac{4 \times 0 + 1}{0} = \frac{12}{0}$.

$س^4$ $ق'(س) = 6س - 8س^3 + 0$ ، $ق(-1) = 2$

جد قاعدة الاقتران ق .

$ق(س) = \int ق'(س)$ د س .

$ق(س) = \int (6س - 8س^3 + 0)$ د س

$= 3س^2 - 2س^4 + 0س + ج$

لكن $ق(-1) = 2$

$ق(-1) = 3(-1)^2 - 2(-1)^4 + 0(-1) + ج$

$2 = 3 - 2 - 0 + ج$

$2 = -3 + ج \Rightarrow ج = 6$

$ق(س) = 3س^2 - 2س^4 + 0س + 6$.

$س^5$ $ع'(س) = 6س^2 - 3س^2 + 6س - 0$ جد $ع(1)$

$ع(س) + ج = 6س^3 - 3س^2 + 6س - 0$

$ع'(س) = 18س^2 - 6س + 6$

$ع'(1) = 18(1)^2 - 6(1) + 6$

$= 18 - 6 + 6$

$ع'(1) = 18$.

$س^6$ $ق'(س) = 2س - 0$ ، $ق(2) = 4$ جد

$ق(1)$.

$ق(س) = \int ق'(س)$ د س .

$= \int (2س - 0)$ د س

$ق(س) = س^2 - 0س + ج$

$ق(2) = 2^2 - 0 \times 2 + ج$

$4 = 4 - 10 + ج$

$4 = -6 + ج \Rightarrow ج = 10$

$ق(س) = س^2 - 0س + 10$

$ق(1) = 1^2 - 0 \times 1 + 10$

$= -4 + 10 = 6$

Scanned by CamScanner

س٧ $\text{ق}'(س) = ٣ك^{٣}(٦ك - ٥) + ٤ك^{٣}$

$\text{ق}(٢) = -١$ جد قيمة $\text{ق}(١)$

$\text{ق}'(س) = ٣ك^{٣}(٦ك - ٥) + ٤ك^{٣}$

$= ١٨ك^{٣} - ١٥ك^{٢} + ٤ك^{٣}$

$\text{ق}(س) = \int \text{ق}'(س)\, ٠ك$

$= \int (١٨ك^{٣} - ١٥ك^{٢} + ٤ك^{٣})\, ٠ك$

$= \frac{١٨ك^{٣}}{٣} - \frac{١٥س^{٣}}{٣} + \frac{٤ك^{٤}}{٤} + ج$

$\text{ق}(س) = ٩س^{٢} - ٥س^{٣} + س^{٤} + ج$

$\text{ق}(٢) = ٩(٢)^{٢} - ٥(٢)^{٣} + ٢^{٤} + ج$

$-١ = ٣٦ - ٤٠ + ١٦ + ج$

$-١ = ١٢ + ج$

$-١٢ \quad -١٢$

$ج = -١٣$

$\text{ق}(س) = ٩س^{٢} - ٥ك^{٣} + س^{٤} - ١٣$

$\text{ق}(١) = ٩(١)^{٢} - ٥(١)^{٣} + (١)^{٤} - ١٣$

$= ٩ - ٥ + ١ - ١٣$

$= -٨٠$

منهاجي

س٨ $\text{ق}'(س) = \frac{س^{٢} + ٦ك + ٨س^{٣}}{س}$

$\text{ق}(١) = ١٢$ ، جد قاعدة الاقتران ق.

$\text{ق}(س) = \int \text{ق}'(س)\, ٠ك$

$= \int \frac{س^{٢} + ٦ك + ٨ك^{٢}}{س}\, ٠ك$

$= \int \frac{س(س + ٦ + ٨ك^{٢})}{س}\, ٠ك$

$\text{ق}(س) = \int (س + ٦ + ٨ك^{٢})\, ٠ك$

$= \frac{س^{٢}}{٢} + ٦ك + \frac{٨ك^{٣}}{٣} + ج$

$\text{ق}(١) = \frac{(١)^{٢}}{٢} + ٦(١) + \frac{٨(١)^{٣}}{٣} + ج$

$١٢ = \frac{١}{٢} + ٦ + \frac{٨}{٣} + ج$

$ج = ١٢ - \frac{٥٥}{٦} \leftarrow ١٢ = \frac{٥٥}{٦} + ج$

$ج = \frac{١٧}{٦}$

$\text{ق}(س) = \frac{س^{٢}}{٢} + ٦ك + \frac{٨ك^{٣}}{٣} + \frac{١٧}{٦}$ ،

$\text{ل}'(س) = ٦ك^{٢} - ٦ك^{٣} - ٢ك$ جد $\text{ل}(٣) - \text{ل}(١)$

$\text{ل}(س) = \int (٦س^{٢} - ٦س^{٣} - ٢ك)\, ٠ك$

$= \frac{٦ك^{٣}}{٣} - \frac{٦ك^{٤}}{٤} - \frac{٢ك^{٢}}{٢} + ج$

$\text{ل}(٣) - \text{ل}(١) =$

$٢(٣)^{٣} - \frac{٣}{٢}(٣)^{٤} - ٣^{٢} + ج - ٢(١)^{٣} + \frac{٣}{٢}(١)^{٤} + ١ - ج$

$٥٤ - \frac{٢٤٣}{٢} - ٩ - ٢ + \frac{٣}{٢} + ١$

$٣٣ - \frac{٢٤٠}{٢} = ١٢٠ - ٤٤ = -٧٦$

Scanned by CamScanner

التكامل المحدد

الأسئلة

١) احسب قيمة كل مما يأتي:

أ) $\int_{١}^{٦} -٢ \, ٥س$

ب) $\int_{٨}^{١} \frac{١}{\sqrt[٣]{س}} \, ٥س$

جـ) $\int_{٠}^{٦} (٢س + ٨س^{٣} - ٥س^{٤} + ٧) \, ٥س$

هـ) $\int_{-٢}^{٢} (٣س - ٢)(س + ١) \, ٥س$

٢) إذا كان $\int_{-١}^{م} ٤ \, ٥س = ٢٠$، فجد قيمة الثابت م.

٣) إذا كان الاقتران ق مُعرَّفًا على الفترة [١، ٥]، وكان قَ(س) = ٢س + ١، فجد قيمة ق(٥) − ق(١).

٤) احسب قيمة التكامل الآتي: $\int_{٢}^{٢} (٤س - ٦س^{٢} + ٣) \, ٥س$

٥) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{١}^{٢} ٣س(٤ - ٢س^{٢}) \, ٥س$

ب) $\int_{١}^{-١} (٢س - ٣)^{٢} \, ٥س$

جـ) $\int_{٠}^{-٢} \frac{س^{٢} + ٦س - ٧}{س - ١} \, ٥س$

٦) إذا كان $\int_{٥}^{٢} قَ(س) \, ٥س = ١٣$، وكان ق(٥) = −١٧، فجد قيمة ق(٢).

Scanned by CamScanner

س١ اجب عن التكاملات التالية:

أ) $\int_{-1}^{6} -2\,دس = [-2س]_{-1}^{6}$

$= -2\times 6 - -2\times -1$

$= -12 + 2 = -10$

ب) $\int_{1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{س^2}}\,دس = \int_{1}^{8} \frac{1}{س^{\frac{2}{3}}}\,دس$

$= \int_{1}^{8} س^{-\frac{2}{3}}\,دس = \left[\frac{س^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}\right]_{1}^{8}$

$= \left[\frac{س^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right]_{1}^{8} = \left[3\sqrt[3]{س}\right]_{1}^{8}$

$= 3\sqrt[3]{8} - 3\sqrt[3]{1}$

$= 3\times 2 - 3\times 1$

$= 6 - 3$

$= 3$

جـ) $\int_{-1}^{6} (3ك + 8س^3 - 5ك^4 + 8)\,دك$

$= \left[\frac{3ك^2}{2} + \frac{8س^4}{4} - \frac{5س^5}{5} + 8ك\right]_{-1}^{6}$

$= \left[ك^2 + 2س^4 - س^5 + 8ك\right]_{-1}^{6}$

$= 6^2 + 2(6)^4 - 6^5 + 8\times 6 - (-1)^2 - 2(-1)^4 + (-1)^5 - 8(-1)$

$= 36 + 2592 - 7776 + 48 - 1 - 2 + 1 + 8$

$= 2592 - 7776 + 48 + 36$

$= -5184 + 84$

$= -5100$

د) $\int_{-2}^{0} (3س - 2)(س + 1)\,دس$

$= \int_{-2}^{0} (3س^2 + س - 2)\,دس$

$= \left[س^3 + \frac{س^2}{2} - 2س\right]_{-2}^{0}$

$= 0 - \left((-2)^3 + \frac{(-2)^2}{2} - 2(-2)\right)$

$= -(-8 + 2 + 4)$

$= -(-2) = 2$

منهاجي

Scanned by CamScanner

س ∫ من ١ إلى م ٤ دس = ٢٠ جد قيمة م ؟

الحل: ٤س]من ١ إلى م = ٢٠

٤م − ٤×١ = ٢٠

٤م + ٤ = ٢٠

٤م = ١٦ ⇐ م = ٤ .

س٣ ف(س) = ٢س + ١ جد قيمة ف(٥) − ف(١)

∫ من ١ إلى ٥ ف(س) دس = ∫ من ١ إلى ٥ (٢س + ١) دس

ف(س)]من ١ إلى ٥ = س٢ + س]من ١ إلى ٥

ف(٥) − ف(١) = (٥٢ + ٥) − (١٢ + ١)

= ٢٥ + ٥ − ٢

ف(٥) − ف(١) = ٢٨

س٤ ∫ من ٢ إلى ٤ (٤س − ٦س٢ + ٣) دس = صفر .

س٥ احسب قيمة التكاملات التالية :

أ) ∫ من ١ إلى ٢ ٣س (٤ − ٢س٢) دس =

∫ من ١ إلى ٢ (١٢س − ٦س٣) دس =

[١٢س٢/٢ − ٦س٤/٤] من ١ إلى ٢

[٦س٢ − ٣/٢ س٤] من ١ إلى ٢

(٦(٢)٢ − ٣/٢ (٢)٤) − (٦(١)٢ − ٣/٢ (١)٤)

(٢٤ − ٢٤) − (٦ − ٣/٢)

صفر − ٩/٢ = −٩/٢ .

ب) ∫ من −١ إلى ١ (٣س − ٢)٢ دس

تذكر (أ + ب)٢ = مربع الأول + ٢ × الأول × الثاني + مربع الثاني

(أ + ب)٢ = أ٢ + ٢ × أ × ب + ب٢

∫ من −١ إلى ١ (٩س٢ − ١٢س + ٤) دس

[٩س٣/٣ − ١٢س٢/٢ + ٤س] من −١ إلى ١

٣(١)٣ − ٦(١)٢ + ٤(١) − (٣(−١)٣ − ٦(−١)٢ + ٤(−١))

٣ − ٦ + ٤ − (−٣ − ٦ − ٤)

٣ − ٦ + ٤ + ٣ + ٦ + ٤

١٨ − ٨/٣ = ٥٤ − ٨/٣ = ٦٢/٣

منهاجي

Scanned by CamScanner

١) إذا كان $\int_{١}^{٤} ٢ق(س)\,ﺩس = ١٢$، $\int_{٤}^{٥} ق(س)\,ﺩس = ٤$، فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\int_{٤}^{١} ٣ق(س)\,ﺩس$ ب) $\int_{٥}^{١} ق(س)\,ﺩس$

جـ) $\int_{٥}^{٤} (ق(س) + ٢س)\,ﺩس$

٢) إذا كان $\int_{-١}^{٢} \frac{ل(س)}{٢}\,ﺩس = ٣$، $\int_{٢}^{-١} (هـ(س) + ١)\,ﺩس = ٥$، فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\int_{٢}^{-١} هـ(س)\,ﺩس$ ب) $\int_{-١}^{٢} (٣هـ(س) - ٢س + ٣ل(س))\,ﺩس$

٣) إذا كان $\int_{أ-١}^{٥أ+٧} ق(س)\,ﺩس = ٠$، فجد قيمة الثابت أ.

٤) إذا كان $\int_{٣}^{م} (٢ - ٤س)\,ﺩس = ٠$، فجد قيمة الثابت م.

٥) إذا كان $\int_{٤}^{١} (٣ق(س) - ٥)\,ﺩس = ٩$، فجد قيمة التكامل الآتي:

$\int_{١}^{٤} (٢ق(س) + ١)\,ﺩس$

٦) إذا كان $\int_{٠}^{ل} (٢س - ١)\,ﺩس = ٦$، فجد قيمة الثابت ل.

Scanned by CamScanner

س١ اذا كان $\int_1^4 2 م(س)\,د س = 12$ ،

$\int_4^5 م(س)\,د س = 4$ جد قيمة كل مما يلي :

أ) $\int_4^1 3 م(س)\,د س = 3\int_4^1 م(س)\,د س$

$= 3 \times -6$

$= -18$

$\frac{1}{2}\int_1^4 م(س)\cdot د س = \frac{12}{2}$

$\int_1^4 م(س)\cdot د س = 6 \Leftarrow \int_4^1 م(س)\cdot د س = -6$

ب) $\int_1^5 م(س)\,د س = \int_4^5 م(س)\,د س + \int_1^4 م(س)\,د س$

$= 4- + 6-$

$= -10$

ج) $\int_4^5 (م(س) + 2س)\,د س =$

$\int_4^5 م(س)\,د س + \int_4^5 2س\cdot د س =$

$4- + \left[\frac{2س^2}{2}\right]_4^5$

$4- + (5^2 - 4^2)$

$4- + 16 - 25 = 13-$

س٢ اذا كان $\int_{-1}^{2} \frac{ل(س)}{3}\,د س = 3$ ،

$\int_{-1}^{2} (هـ(س)+1)\,د س = 5$ فجد قيمة كل مما يلي

أ) $\int_{-1}^{2} هـ(س)\cdot د س$.

$\int_{-1}^{2} (هـ(س)+1)\,د س = 5$

$\int_{-1}^{2} هـ(س)\,د س + \int_{-1}^{2} 1\cdot د س = 5$

$\int_{-1}^{2} هـ(س)\,د س + 1(2-(-1)) = 5$

$\int_{-1}^{2} هـ(س)\,د س + 3 = 5$

$\int_{-1}^{2} هـ(س)\,د س = 2$

ب) $\int_{-1}^{2}(3 هـ(س) - 2س + 3 ل(س))\,د س$

$\int_{-1}^{2} 3 هـ(س)\,د س - \int_{-1}^{2} 2س\cdot د س + \int_{-1}^{2} 3 ل(س)\,د س$

$3\times 2 - [س^2]_{-1}^{2} + 3\times 6$

$6 - (4-1) + 18$

$6 - 3 + 18 = 21 + 18$

$= 39$

$\int_{-1}^{2} \frac{ل(س)}{3}\,د س = 3 \Leftarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} ل(س)\cdot د س = 3$

$\Leftarrow \int_{-1}^{2} ل(س)\cdot د س = 6$

Scanned by CamScanner

س٣ اذا كان $\int_{1-p}^{p^2+p5} (2س+1)\,دس = صفر$ فجد قيمة p ؟

الحل: $p^2+p5 = 1-p$

$p^2+6p = -1$

$p^2+6p+9 = 8$

$(p+3)^2 = 8$

$p+3 = \pm 2\sqrt{2}$

$p = -3 \pm 2\sqrt{2}$

س٤ اذا كان $\int_{3}^{م} (4-2س)\,دس = صفر$ فجد قيمة م ؟

الحل: $[2س - \frac{2س^2}{2}]_{3}^{م} = صفر$

$[2س - س^2]_{3}^{م} = صفر$

$(2م - م^2) - (6 - 9) = صفر$

$2م - م^2 + 3 = صفر$

$م^2 - 2م - 3 = صفر$

$(م-3)(م+1) = صفر$

$م = 3$ أو $م = -1$

س٥ $\int_{1}^{4} (3س^2 - 5)\,دس = 9$

$[س^3 - 5س]_{1}^{4} = 9$

$(64 - 20) - (1 - 5) = 9$

$44 + 4 = 9$

$48 = 9$ ✗

س٦ $\int_{1}^{ل} (6س - 1)\,دس = 6$

$[3س^2 - س]_{1}^{ل} = 6$

$(3ل^2 - ل) - (3 - 1) = 6$

$3ل^2 - ل - 2 = 6$

$3ل^2 - ل - 8 = صفر$

$(3ل + 4)(ل - 2) = صفر$

$ل = -\frac{4}{3}$ أو $ل = 2$

الأسئلة

١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية:

أ) $\int (١ - ٢س)(س - س^{٢})^{٤}\, دس$

ب) $\int ٦س^{٢} \sqrt[٥]{(٢س^{٣} - ٢)^{٢}}\, دس$

جـ) $\int (٢س - ٣س^{٢})\, قا^{٢}(س^{٣} - س^{٢})\, دس$

د) $\int \frac{٣س - ٩}{(س^{٢} - ٦س)^{٢}}\, دس$

٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int \sqrt[٣]{(٣س - ٢)^{٢}}\, دس$

ب) $\int (س - ١)(٢س^{٢} - ٤س + ١)^{٥}\, دس$

جـ) $\int ٢\, قا^{٢}(٢ - س)\, دس$

د) $\int ٢س^{٣}\, جا(س^{٤} + ١)\, دس$

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{٠}^{٢} \sqrt{٤س + ١}\, دس$

ب) $\int_{-١}^{-١} ٣س^{٢}(س^{٣} - ١)^{٣}\, دس$

جـ) $\int_{١}^{٠} ٢س \sqrt[٣]{س^{٢} - ١}\, دس$

د) $\int_{١}^{٢} \frac{٣ - ٢س}{(س^{٢} - ٣س)^{٢}}\, دس$

٤) إذا علمت أن ق(−٨) = ٥، ق(٢٧) = −٦، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-٢}^{٣} ٣س^{٢}\, قَ(س^{٣})\, دس$

٥) إذا علمت أن $\int_{٥}^{٢} ق(س)\, دس = ٣$، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-١}^{٢} ٨س\, ق(س^{٢} + ١)\, دس$

٦) حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

Scanned by CamScanner

١ س ٩) $\int (1-2ك)(س-س_ع)^{٤}$ دك .

ص = س − $س_ع$ ⇐ $\frac{دص}{دك}$ = 1 − 2ك ⇐ $\frac{دص}{1-2ك}$ = دك

$\int (1-2ك)\, ص^{٤}\, \frac{دص}{1-2ك} = \int ص^{٤}$ دص

$= \frac{ص^{٥}}{٥} + ج = \frac{(س-س_ع)^{٥}}{٥} + ج$

ب) $\int ٦س^{٥}\sqrt{(س^{٣}-٢)^{٢}}$ دس

ص = $س^{٣}$ − ٢ ⇐ $\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢}$ ⇐ $\frac{دص}{٣س^{٢}}$ = دس

$\int ٦س^{٥}\sqrt{ص^{٢}}\, \frac{دص}{٣س^{٢}} = \int ص^{\frac{١}{٢}}$ دص

$= \frac{ص^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ج = \frac{ص^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١} + ج$

$= \frac{٨}{٥}\sqrt{ص^{٥}} + ج$

$= \frac{٨}{٥}\sqrt{(س^{٣}-٢)^{٥}} + ج$

جـ) $\int (٢ك-٣ك^{٢})^{٢}$ قا^{٢}($س^{٣}$ − س) دك

ص = $س^{٣}$ − س ⇐ $\frac{دص}{دك} = ٣ك^{٢} - ٢$

$\frac{دص}{٣ك^{٢}-٢}$ = دك .

$\int (٢ك-٣ك^{٢})^{٢}$ قا^{٢}ص $\frac{دص}{٣ك^{٢}-٢}$

$= -$ قا^{٢}ص . دص = $-$ ظاص + ج

$= -$ ظا($س^{٣}$ − س) + ج

د) $\int \frac{٣ك-٩}{(ك^{٢}-٦ك)^{٢}}$ دس

ص = $ك^{٢}$ − ٦ك ⇐ $\frac{دص}{دك} = ٢ك - ٦$ ⇐

$\frac{دص}{٢ك-٦}$ = دس .

$\int \frac{٣ك-٩}{ص^{٢}} \times \frac{دص}{٢ك-٦} =$

$\int \frac{٣(ك-٣)}{ص^{٢}} \times \frac{دص}{٢(ك-٣)} = .$

$\frac{٣}{٢}\, \frac{ص^{-١+١}}{-١+١} + ج = \frac{٣}{٢}\, ص^{-١} + ج$

$-\frac{٣}{٢ص} + ج = \frac{-٣}{٢(ك^{٢}-٦ك)} + ج$

منهاجي

Scanned by CamScanner

س ٩) $\int \sqrt[3]{(3ك-2)^2}\, دك$ =

$= \int (3س-2)^{\frac{2}{3}} دس = \frac{(3س-2)^{\frac{2}{3}+1}}{3 \times (\frac{2}{3}+1)} + د$

$= \frac{(3ك-2)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3} \times 3} + د = \frac{1}{5}\sqrt[3]{(3ك-2)^5} + د$

ب) $\int (ك-1)(2ك^3-3ك+1)^5 دك$

$ص = 2ك^3-3ك+1 \Rightarrow \frac{دص}{دك} = 6ك^2-3$

$\frac{دص}{3(2ك^2-1)} = دك \Rightarrow \frac{دص}{3ك^2-3} = دك$

$\int (ك-1) ص^5 \times \frac{دص}{3(ك-1)} = \frac{1}{3}\int ص^5 دص$

$= \frac{ص^6}{6 \times 3} + د = \frac{(2ك^3-3ك+1)^6}{18} + د$

جـ) $\int 2 قا^2(2-س) دس$ =

$= \frac{2 ظا(2-س)}{-1} + د$

$= -2 ظا(2-س) + د$

د) $\int 2س^3 جا(س^4+1) دس$

$ص = س^4+1 \Rightarrow \frac{دص}{دس} = 4س^3 \Rightarrow$

$دس = \frac{دص}{4س^3}$

$\int 2س^3 جا ص \frac{دص}{4س^3} =$

$\int \frac{1}{2} جا ص دص = -\frac{1}{2} جتا ص + د$

$= -\frac{1}{2} جتا(س^4+1) + د$

س ١٠) $\int_0^2 \sqrt{4س+1}\, دس = \int_0^2 (2ك+1)^{\frac{1}{2}} دك$

$= \left[\frac{(2س+1)^{\frac{3}{2}+1}}{(\frac{3}{2}+1) \times 2}\right]_0^2 = \left[\frac{(2ك+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{5}{2} \times 2}\right]_0^2$

$= \left[\frac{\sqrt{(2س+1)^3}}{6}\right]_0^2$

$= \frac{1}{6}\left[\sqrt{(2 \times 2+1)^3} - \sqrt{(2 \times 0+1)^3}\right]$

$= \frac{1}{6}(\sqrt{125} - \sqrt{1})$

$= \frac{1}{6}(25-1)$

$= \frac{1}{6} \times 24 = \frac{13}{3}$

Scanned by CamScanner

س٣ ب) $\int_{-1}^{1} 3ك (س^3 - 1)^3 \, دك = صفر$

جـ) $\int_{1}^{2} 2ك \sqrt{س^4 - 1} \, .دك =$

$\int_{1}^{2} ك (س^4 - 1)^{\frac{1}{2}} \, دك$

ص = $س^4 - 1 \Leftarrow \frac{دص}{دك} = 4ك \Leftarrow ك = \frac{دص}{4ك}$

$\int_{1}^{2} ك \, ص^{\frac{1}{2}} \frac{دص}{4ك} = \int_{1}^{2} ص^{\frac{1}{2}} \, دص$

$\left[\frac{ص^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_{1}^{2} = \left[\frac{ص^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{1}^{2}$

$\frac{2}{3} \left[\sqrt{(س^4 - 1)^3} \right]_{1}^{2} =$

$\frac{2}{3} \left(\sqrt{(2^4 - 1)^3} - \sqrt{(1^4 - 1)^3} \right)$

$\frac{2}{3} \left(\sqrt{15^3} - \sqrt{0^3} \right)$

$\frac{2}{3} (15 - 0)$

$\frac{2}{3} \times 15 = 10$.

د) $\int_{1}^{2} \frac{3 - 2س}{(س^4 - 3س)^2} \, دس =$

$\int_{1}^{2} (3 - 2ك)(س^4 - 3ك)^{-2} \, .دك$

ص = $س^4 - 3ك \Leftarrow \frac{دص}{دك} = -3ك \Leftarrow$

$\frac{دص}{-3ك} = دك$

$\int_{2}^{1} (3 - 2ك) \, ص^{-2} \frac{دص}{-3ك} =$ (-1)

$\int_{1}^{2} ص^{-2} \, دص =$

$\left[\frac{ص^{-2+1}}{-2+1} \right]_{1}^{2} =$

$\left[\frac{-1}{ص} \right]_{1}^{2} = \left[\frac{1}{ص} \right]_{1}^{2}$

$= \left[\frac{1}{ك^4 - 3ك} \right]_{1}^{2}$

$\frac{1}{2^4 - 3(2)} - \frac{1}{1^4 - 3(1)} = \frac{1}{-2} - \frac{1}{-2}$

$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = صفر$.

Scanned by CamScanner

س٤ $\int_{-٨}^{٧} ٣س^{٢}\, ق'(س^{٣})\, دس$ ، ق(-٨) = ٥ ، ق(٧) = -٦ فجد

$ص = س^{٣} \Rightarrow \frac{دص}{دس} = ٣س^{٢} \Rightarrow دس = \frac{دص}{٣س^{٢}}$

$\int_{-٢}^{٣} ٣س^{٢}\, ق'(س^{٣})\, دس = \int_{-٨}^{٢٧} ٣س^{٢}\, ق'(ص)\, \frac{دص}{٣س^{٢}} = \int_{-٨}^{٢٧} ق'(ص)\, دص$

$= [ق(ص)]_{-٨}^{٢٧} = ق(س^{٣})]_{-٢}^{٣}$

$= ق(٣^{٣}) - ق((-٢)^{٣})$

$= ق(٢٧) - ق(-٨)$

$= -٦ - ٥$

$= -١١$

س٥ $\int_{٥}^{ك} ق(س)\, دس = ٣$ حيث

$\int_{-١}^{٢} ٨س\, ق(س^{٢}+١)\, دس$

$ص = س^{٢}+١ \Rightarrow \frac{دص}{دس} = ٢س \Rightarrow دس = \frac{دص}{٢س}$

$\int_{-١}^{٢} ٨س\, ق(ص)\, \frac{دص}{٢س} = \int_{-١}^{٢} ٤\, ق(ص)\, دص$

عندما س = -١ ← ص = $(-١)^{٢}+١ = ٢$

عندما س = ٢ ← ص = $٢^{٢}+١ = ٥$

$\int_{٢}^{٥} ٤\, ق(ص)\, دص = ٤\int_{٢}^{٥} ق(ص)\, دص$

$= ٤ \times -٣$

$= -١٢$

س٦ $\int_{٠}^{٤} س\sqrt{س^{٢}+٩}\, دس$

$\int_{٠}^{٤} س(س^{٢}+٩)^{\frac{١}{٢}}\, دس$

$ص = س^{٢}+٩ \Rightarrow \frac{دص}{دس} = ٢س \Rightarrow دس = \frac{دص}{٢س}$

$\int_{٠}^{٤} س\, ص^{\frac{١}{٢}}\, \frac{دص}{٢س} =$

$\int_{٠}^{٤} ص^{\frac{١}{٢}}\, دص =$

$\left[\frac{ص^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١}\right]_{٠}^{٤} = \frac{٢}{٣}\left[ص^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٤}$

$\frac{٢}{٣}\left[\sqrt{(س^{٢}+٩)^{٣}}\right]_{٠}^{٤}$

$\frac{٢}{٣}\left(\sqrt{(٤^{٢}+٩)^{٣}} - \sqrt{(٠+٩)^{٣}}\right)$

$\frac{٢}{٣}\left(٥^{٣} - ٣^{٣}\right) = \frac{٢}{٣}(١٢٥ - ٢٧)$

$= \frac{٢}{٣} \times ٩٨ = \frac{١٩٦}{٣}$

Scanned by CamScanner

تطبيقات هندسية

الأسئلة

١) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س، ص) يساوي (٦ − ٢س + ٩س^{٣})، فجد قاعدة الاقتران ق، علمًا بأن ق(٠) = ٥

٢) جد قاعدة الاقتران ق، إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = ق(س) عند النقطة (س، ص) يعطى بالقاعدة: قَ(س) = $\frac{٢س}{\sqrt[٣]{٨ + س^{٢}}}$ ، وكان منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (٠، ٤).

٣) جد قيمة ق(١)، علمًا بأن ميل المماس للمنحنى ص = ق(س) عند النقطة (س، ص) يساوي ٢٥(٥س + ٤)^{٤}، وأن منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (−١، ٧).

٤) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ل عند النقطة (س، ص) يعطى بالقاعدة:
لَ(س) = ٢س(٤ − ٣س)، فجد قاعدة الاقتران ل، علمًا بأن منحناه يمر بالنقطة (٠، ٣).

٥) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران هـ يعطى بالقاعدة هـَ(س) = $\frac{٢س^{٢} - ٥س}{س}$ ، س ≠ ٠، فجد هـ(٢)، علمًا بأن منحنى الاقتران هـ يمر بالنقطة (−١، ٥).

Scanned by CamScanner

١ س ميل المماس = $ق'(س) = ٦ - ٢س + ٩س^{٣}$

جد قاعدة الاقتران ق علماً بأن ق(٠) = ٥

الحل: $ق(س) = \int (٦ - ٢س + ٩س^{٣})\, دس$

$= ٦س - \frac{٢}{٢}س^{٢} + \frac{٩}{٤}س^{٤} + جـ$

$ق(٠) = ٦ \times ٠ - ٠ + \frac{٩}{٤} \times ٠ + جـ$

$٥ = جـ$

$ق(س) = ٦س - س^{٢} + \frac{٩}{٤}س^{٤} + ٥$

٢ س ميل المماس = $ق'(س) = \frac{٢س}{\sqrt[٣]{س^{٢} + ٨}}$

المنحنى يمر بالنقطة (٤،٠) جد قاعدة الاقتران ق .

الحل: $ق(س) = \int \frac{٢س}{\sqrt[٣]{س^{٢} + ٨}}\, دس$

$= \int ٢س (س^{٢} + ٨)^{-\frac{١}{٣}}\, دس$

نفرض أن ص = $س^{٢} + ٨ \Leftarrow \frac{دص}{دس} = ٢س \Leftarrow$

$دص = ٢س\, دس$.

$ق(س) = \int ص^{-\frac{١}{٣}}\, دص$

$= \frac{ص^{\frac{٢}{٣}}}{\frac{٢}{٣}} + جـ$

$= \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{(س^{٢}+٨)^{٢}} + جـ$

ق يمر بالنقطة (٤،٠) $\Leftarrow ق(٠) = ٤$

$ق(٠) = \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{(٠+٨)^{٢}} + جـ$

$٤ = \frac{٣}{٢} \times ٢^{٢} + جـ$

$٤ = ٦ + جـ \Leftarrow جـ = -٢$.

$ق(س) = \frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{(س^{٢}+٨)^{٢}} - ٢$.

٣ س الميل = $ق'(س) = ٢٥ (٥س + ٤)^{٤}$

ق يمر بالنقطة (-١،٧) جد ق(١) .

الحل: $ق(س) = \int ٢٥ (٥س+٤)^{٤}\, دس$

$ق(س) = \frac{٢٥(٥س+٤)^{٥}}{٥ \times ٥} + جـ$

$ق(-١) = \frac{٢٥(٥ \times -١ + ٤)^{٥}}{٥ \times ٥} + جـ$

$٧ = (-١)^{٥} + جـ$

$٧ = -١ + جـ \Leftarrow جـ = ٨$

$ق(س) = (٥س + ٤)^{٥} + ٨$

$ق(١) = ٩^{٥} + ٨$

Scanned by CamScanner

ميل المماس = $ل'(س) = ٣س^{٢}(٤ - ٣س)$

جد قاعدة الاقتران ل علماً بأن منحناه يمر بالنقطة $(٠، ٣)$.

الحل: $ل(س) = \int ٣س^{٢}(٤ - ٣س)\, دس$

$= \int (١٢س^{٢} - ٩س^{٣})\, دس$

$ل(س) = ٤س^{٣} - ٣س^{٣} + ج$

$= ٤س^{٣} - ٣س^{٣} + ج$

$ل(٠) = ٠ - ٠ + ج$

$٣ = ج$

$ل(س) = ٤س^{٣} - ٣س^{٣} + ٣$

منهاجي

ميل المماس = $هـ'(س) = \frac{٣س^{٢} - ٥س}{س}$

جد $هـ(س)$ علماً بأن منحنى $هـ$ يمر بالنقطة $(-١، ٥)$.

$هـ(س) = \int \frac{٣س^{٢} - ٥س}{س}\, دس$

$= \int \frac{س(٣س - ٥)}{س}\, دس$

$هـ(س) = \int (٣س - ٥)\, دس$

$هـ(س) = س^{٢} - ٥س + ج$

$هـ(-١) = (-١)^{٢} - ٥ \times -١ + ج$

$٥ = ١ + ٥ + ج$

$٥ = ٦ + ج$

$-٦ \quad -٦$

$ج = -١$

$هـ(س) = س^{٢} - ٥س - ١$

$هـ(٢) = ٢^{٢} - ٥ \times ٢ - ١$

$= ٤ - ١٠ - ١$

$= -٦ - ١$

$= -٧$

Scanned by CamScanner

تطبيقات فيزيائية

الأسئلة

١) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور ن ثانية من بدء حركته تعطى بالعلاقة: ع(ن) = (١٢ جتا(٢ن − ١)) م/ث. جد القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة.

٢) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث إن سرعتها بعد مرور ن ثانية من بدء حركتها تعطى بالعلاقة: ع(ن) = (٤ن + ٨) م/ث. جد موقع النقطة المادية بعد مرور أربع ثوانٍ من بدء حركتها، علمًا بأن موقعها الابتدائي ف(٠) = ٢م.

٣) إذا كان تسارع جسيم يسير على خط مستقيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة يعطى بالعلاقة: ت(ن) = ٤٨(١− ٢ن)^{٣} م/ث^{٢}، وكان موقعه الابتدائي ف(٠) = ٣م، وسرعته الابتدائية ع(٠) = ٢ م/ث، فجد:

أ) سرعة الجسيم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة.

ب) موقع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

٤) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة تعطى بالقاعدة: ع(ن) = (٣ن − ١) (٤ن + ١) م/ث. جد:

أ) القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة.

ب) موقع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة، علمًا بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٧م.

Scanned by CamScanner

س١ ع(ن) = (١٢ جتا(٢ن − ١)) م/ث²
جد القاعدة التي تمثل موقع الجسم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة.

الحل: ف(ن) = ∫ ع(ن) دن

= ∫ ١٢ جتا(٢ن − ١) دن

= ١٢ جا(٢ن − ١) / ٢ + جـ

ف(ن) = ٦ جا(٢ن − ١) + جـ

س٢ ع(ن) = (٤ن + ٨) م/ث . جد موقع البقعة بعد مرور اربع ثوان، من بدء حركتها علمًا بأن ف(٠) = ٢ م.

الحل: المطلوب ف(٤) = ؟

ف(ن) = ∫ (٤ن + ٨) دن

= ٤ن²/٢ + ٨ن + جـ

ف(ن) = ٢ن² + ٨ن + جـ

ف(٠) = جـ

٢ = جـ

ف(ن) = ٢ن² + ٨ن + ٢

ف(٤) = ٢×٤² + ٨×٤ + ٢

= ٣٢ + ٣٢ + ٢ = ٦٦ م

س٣ ت(ن) = ٤٨(١ − ٢ن)³ م/ث²
ف(٠) = ٣ م ، ع(٠) = ٢ م/ث .
م) سرعة الجسم بعد مرور ثانية واحدة ← ع(١)
ب) موقع الجسم بعد مرور ثانيتين ← ف(٢)

الحل: ع(ن) = ∫ ت(ن) دن

(م) = ∫ ٤٨(١ − ٢ن)³ دن

= ٤٨(١ − ٢ن)⁴ / (٤ × −٢) + جـ

ع(ن) = −٦(١ − ٢ن)⁴ + جـ

ع(٠) = −٦(١ − ٠)⁴ + جـ

−٦ + جـ = ٢ ⇐ جـ = ٨

ع(ن) = −٦(١ − ٢ن)⁴ + ٨

ع(١) = −٦(١ − ٢)⁴ + ٨

= −٦ + ٨

= ٢

(ب) ف(ن) = ∫ (−٦(١ − ٢ن)⁴ + ٨) دن

ف(ن) = −٦(١ − ٢ن)⁵ / (٥ × −٢) + ٨ن + جـ

ف(ن) = ٣/٥ (١ − ٢ن)⁵ + ٨ن + جـ

٣ = ٣/٥ + جـ ⇐ جـ = ٣ − ٣/٥ = ١٢/٥

ف(ن) = ٣/٥ (١ − ٢ن)⁵ + ٨ن + ١٢/٥

ف(٢) = ٣/٥ (−٣)⁵ + ١٦ + ١٢/٥ = −٧٢٩/٥ + ١٢/٥ + ١٦

= −٧١٧/٥ + ١٦ = −٦٣٧/٥

Scanned by CamScanner

س٤ ع(ن) = (٣ن - ١)(٤ن + ١) م/ث.

جد

أ) القاعدة التي تمثل موقع الجسم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة علمًا بأن ف(٠) = ٧

ب) موقع الجسم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة، ف(٠) = ٧ م.

الحل: (٣ن - ١)(٤ن + ١) =

= ١٢ن^٢ + ٣ن - ٤ن - ١

= ١٢ن^٢ - ن - ١

ع(ن) = ١٢ن^٢ - ن - ١.

ف(ن) = ∫ ع(ن) . دن

= ∫ (١٢ن^٢ - ن - ١) . دن

ف(ن) = ١٢ن^٣/٣ - ن^٢/٢ - ن + ﺟ

ف(ن) = ٤ن^٣ - ½ن^٢ - ن + ﺟ

القاعدة التي تمثل موقع الجسم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة.

ف(ن) = ٤ن^٣ - ½ن^٢ - ن + ﺟ

ف(٠) = ٠ + ﺟ

٧ = ﺟ

ف(ن) = ٤ن^٣ - ½ن^٢ - ن + ٧

ف(٢) = ٤(٢)^٣ - ½(٢)^٢ - ٢ + ٧

= ٤ × ٨ - ½ × ٤ + ٥

= ٣٢ - ٢ + ٥

= ٣٠ + ٥

= ٣٥ م موقع الجسم بعد ثانيتين.

منهاجي

Scanned by CamScanner

الأسئلة

١) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س)، ومحور السينات والمستقيمين المحددين في كل مما يأتي:

أ) ق(س) = ١٢ ، س = −١ ، س = ٢

ب) ق(س) = ٥ − ٢س ، س = −٢ ، س = ٢

جـ) ق(س) = ٣س^{٢} − ٣ ، س = −٢ ، س = −٤

٢) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س)، ومحور السينات على الفترة المحددة في كل مما يأتي:

أ) ق(س) = ٦ − ٦س^{٢} ، على الفترة [−٢، ٠].

ب) ق(س) = ٤س^{٣} ، على الفترة [−١، ١].

جـ) ق(س) = ٣س^{٢} − ٤٨ ، على الفترة [٣، ٥].

د) ق(س) = − س^{٢} − ٤ ، على الفترة [−١، ١].

٣) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س)، ومحور السينات في كل مما يأتي:

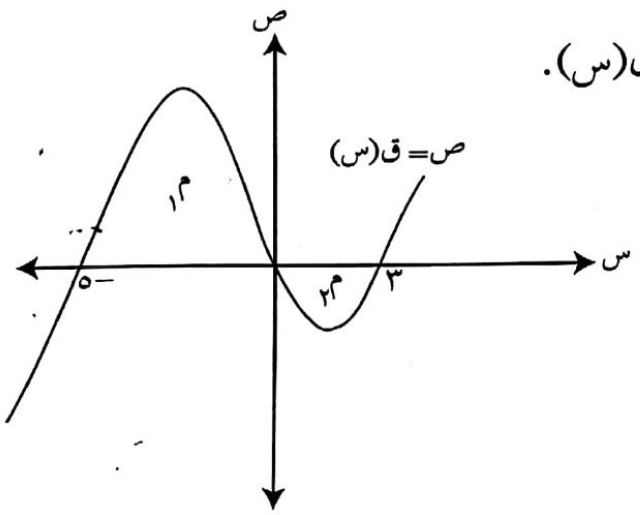
أ) ق(س) = ٤س − س^{٢} ب) ق(س) = ٤س^{٣} − ١٢س^{٢}

٤) يمثل الشكل (٤− ١١) منحنى الاقتران ص = ق(س).

فإذا كانت المساحة م$_{١}$ = ١٣ وحدة مربعة،

والمساحة م$_{٢}$ = ٣ وحدات مربعة،

فجد قيمة $\int_{-٥}^{٣}$ ق(س) دس، مبرِّرًا إجابتك.



الشكل (٤−١١).

٥) حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

Scanned by CamScanner

س١ جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) ومحور السينات والمستقيمين المحددين في كل مما يأتي :

أ) ق(س) = ١٢ ، س = -١ ، س = ٢

$$م = \int_{-١}^{٢} ١٢ \, د س$$

$$= [١٢ س]_{-١}^{٢}$$

$$= ١٢ \times ٢ - ١٢ \times -١$$

$$= ٢٤ + ١٢$$

$$= ٣٦ \text{ وحدة مربعة}$$

ب) ق(س) = ٥ - ٢س ، س = -٢ ، س = ٢

$$٥ - ٢س = ٠ \Leftarrow ٢س = ٥ \Leftarrow س = \frac{٥}{٢} = ٢,٥$$

$$م = \int_{-٢}^{٢,٥} (٥ - ٢س) \, د س$$

$$= [٥س - س^{٢}]_{-٢}^{٢,٥}$$

$$= (٥ \times ٢,٥ - (٢,٥)^{٢}) - (٥ \times -٢ - (-٢)^{٢})$$

$$= ١٢,٥ - ٦,٢٥ - (-١٠ - ٤)$$

$$= ٦,٢٥ - (-١٤)$$

$$= ٦,٢٥ + ١٤$$

$$= ٢٠,٢٥$$

جـ) ق(س) = ٣س^٢ - ٣ ، س = -٢ ، س = -٤

$$٣س^{٢} - ٣ = \text{صفر} \Leftarrow \frac{٣س^{٢}}{٣} = \frac{٣}{٣} \Leftarrow س^{٢} = ١$$

$$س = \pm ١ \text{ لا تنتمي للفترة}$$

$$م = \int_{-٤}^{-٢} (٣س^{٢} - ٣) \, د س$$

$$= [س^{٣} - ٣س]_{-٤}^{-٢}$$

$$= ((-٢)^{٣} - ٣ \times -٢) - ((-٤)^{٣} - ٣ \times -٤)$$

$$= -٨ + ٦ - (-٦٤ + ١٢)$$

$$= -٢ - (-٥٢)$$

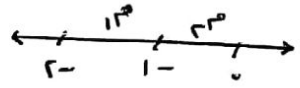
$$= -٢ + ٥٢$$

$$= ٥٠$$

س٢ أ) ق(س) = ٦ - ٦س^٢ ، [-٢ ، ١]

$$٦ - ٦س^{٢} = ٠ \Leftarrow \frac{٦س^{٢}}{٦} = \frac{٦}{٦} \Leftarrow س^{٢} = ١$$

$$س = \pm ١$$



$$م_{١} = \int_{-٢}^{-١} (٦ - ٦س^{٢}) \, د س$$

$$= [٦س - ٢س^{٣}]_{-٢}^{-١}$$

$$= (٦ \times -١ - ٢(-١)^{٣}) - (٦ \times -٢ - ٢(-٢)^{٣})$$

$$= -٦ + ٢ - (-١٢ + ١٦)$$

$$= -٤ - ٤$$

$$م_{١} = |-١٨| = ١٨ \text{ وحدة مربعة}$$

منهاجي

Scanned by CamScanner

تابع س٢ ص ٩

$م_٢ = \int_{-١}^{٠} (٦ - ٦س^{٢}) \, د س$

$= [٦س - ٢س^{٣}]_{-١}^{٠}$

$= ٠ - (٦(-١) - ٢(-١)^{٣})$

$= صفر - (-٦ + ٢)$

$= -(-٤)$

$= ٤$ وحدة مربعة

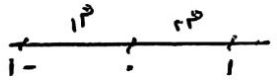
$م = م_١ + م_٢$

$= ٨ + ٤$

$= ١٢$ وحدة مربعة.

ب) $ص = ٤س^{٣}$ ، $[-١، ١]$

$٤س^{٣} = صفر \Leftarrow س^{٣} = صفر \Leftarrow س = صفر$



$م_١ = \int_{-١}^{٠} ٤س^{٣} \, د س = [س^{٤}]_{-١}^{٠}$

$= ٠ - (-١)^{٤} = |-١| = ١$

$م_١ = ١$ وحدة مربعة

$م_٢ = \int_{٠}^{١} ٤س^{٣} \, د س = [س^{٤}]_{٠}^{١}$

$= ١^{٤} - ٠ = ١ \Rightarrow م_٢ = ١$ وحدة مربعة

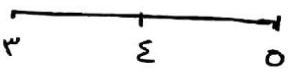
$م = م_١ + م_٢$

$= ١ + ١ = ٢$ وحدة مربعة.

جـ) $ص = ٣س^{٢} - ٤٨$ ، $[٣، ٥]$

$٣س^{٢} - ٤٨ = صفر \Leftarrow ٣س^{٢} = ٤٨$

$س^{٢} = ١٦ \Leftarrow س = \pm ٤$



-٤ لا تنتمي للفترة

$م_١ = \int_{٣}^{٤} (٣س^{٢} - ٤٨) \, د س$

$= [س^{٣} - ٤٨س]_{٣}^{٤}$

$= (٤^{٣} - ٤ \times ٤٨) - (٣^{٣} - ٣ \times ٤٨)$

$= -٦٤ - ١٩٢ - (٢٧ - ١٤٤)$

$= -٢٥٦ - (-١١٧)$

$= -١٣٨ + ١١٧$

$م_١ = |-٢١| = ٢١$

$م_٢ = \int_{٤}^{٥} (٣س^{٢} - ٤٨) \, د س$

$= [س^{٣} - ٤٨س]_{٤}^{٥}$

$= (٥^{٣} - ٥ \times ٤٨) - (٤^{٣} - ٤ \times ٤٨)$

$= -١٢٥ - (-١٩٢)$

$= -١١٥ - (-١٣٨)$

$= -١١٥ + ١٣٨$

$= ٢٣$ وحدة مربعة.

$م = م_١ + م_٢$

$= ٢١ + ٢٣$

$= ٤٤$ وحدة مربعة.

Scanned by CamScanner

تابع $س^2$

د) $ه(س) = -س^2 - ٤$ ، $[-١، ١]$

$-س^2 - ٤ = صفر \Leftarrow -س^2 = ٤ \Leftarrow س^2 = -٤$

لا يوجد أصفار للاقتران.

$$م = \int_{-١}^{١} (-س^2 - ٤)\, د س$$

$$= \left[\frac{-س^3}{٣} - ٤س \right]_{-١}^{١}$$

$$= \left(-\frac{١}{٣} - ٤ \times ١ \right) - \left(-\frac{(-١)^3}{٣} - ٤ \times -١ \right)$$

$$= -\frac{١}{٣} - ٤ - \frac{١}{٣} - ٤$$

$$= -٨ - \frac{٢}{٣}$$

$$= -\frac{٢٦}{٣}$$

$$= \left| -\frac{٢٦}{٣} \right|$$

$م = \frac{٢٦}{٣}$ وحدة مربعة

$س^3$ P) $ه(س) = ٤س - س^2$

$٤س - س^2 = صفر \Leftarrow س(٤ - س) = صفر$

$س = صفر$ ، $٤ - س = صفر \Leftarrow س = ٤$

$$م = \int_{٠}^{٤} (٤س - س^2)\, د س$$

$$= \left[٢س^2 - \frac{س^3}{٣} \right]_{٠}^{٤}$$

$$م = ٢(٤)^2 - \frac{٤^3}{٣} - \left(٢ \times ٠^2 - \frac{١}{٣} \right)$$

$$= ٣٢ - \frac{٦٤}{٣} - صفر$$

$$= ٣٢ - \frac{٦٤}{٣}$$

$$= \frac{٩٦}{٣} - \frac{٦٤}{٣}$$

$م = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

ب) $ه(س) = ٤س^3 - ١٢س^2$

$٤س^3 - ١٢س^2 = صفر \Leftarrow ٤س^2(س - ٣) = صفر$

$٤س^2 = ٠ \Leftarrow$ **$س = صفر$**

$س - ٣ = ٠ \Leftarrow$ **$س = ٣$**

$$م = \int_{٠}^{٣} (٤س^3 - ١٢س^2)\, د س$$

$$= \left[س^4 - ٤س^3 \right]_{٠}^{٣}$$

$$= (٣^4 - ٤(٣)^3) - (٠^4 - ٤(٠)^3)$$

$$= ٨١ - ٤ \times ٢٧$$

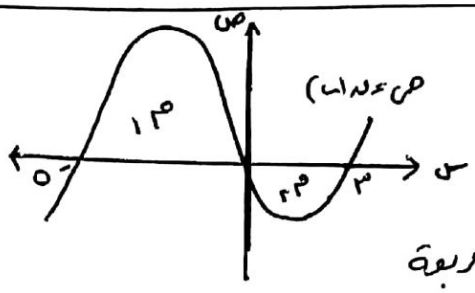
$$= ٨١ - ١٠٨$$

$$م = |-٢٧|$$

$م = ٢٧$ وحدة مربعة.

Scanned by CamScanner

س٤



م١ = ١٣ وحدة مربعة

م٢ = ٣ وحدات مربعة.

جد قيمة $\int_{-5}^{3} ق(س)\,د س$.

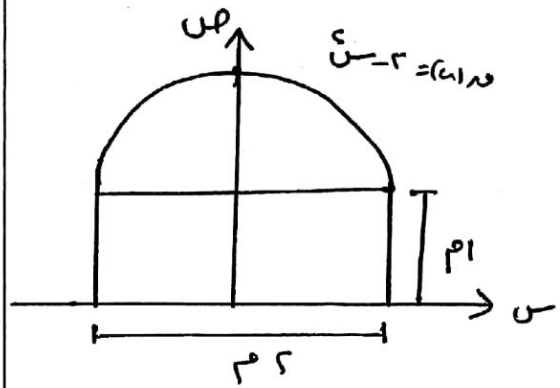
الحل:

$$\int_{-5}^{3} ق(س)\,د س = \int_{-5}^{0} ق(س)\,د س + \int_{0}^{3} ق(س)\,د س$$

= ١٣ + (-٣) (لأنه المنحنى تحت محور السينات)

= ١٠

س٥



يمثل الشكل نافذة على شكل مستطيل طول قاعدته ٢م وارتفاعه ١م ، يعلوه قوس يمثل بالعلاقة ص = ق(س) = ٣ - س٢ .

اذا اردنا وضع زجاج على النافذة ، وكانت تكلفة المتر المربع الواحد منه خمسة دنانير ، فما التكلفة الكلية لزجاج النافذة .

الحل: نجد اولاً مساحة المستطيل ثم مساحة الجزء العلوي .

مساحة المستطيل = الطول × العرض

= ١ × ٢

= ٢ م٢ .

مساحة الجزء العلوي = $\int_{-1}^{1} (٣ - س^٢)\,د س$

$= \left[٣س - \frac{س^٣}{٣} \right]_{-1}^{1}$

$= \left(٣ \times ١ - \frac{١}{٣} \right) - \left(٣ \times (-١) - \frac{(-١)^٣}{٣} \right)$

$= ٣ - \frac{١}{٣} + ٣ - \frac{-١}{٣}$

$= ٦ - \frac{٢}{٣} = \frac{١٨}{٣} - \frac{٢}{٣}$

$= \frac{١٦}{٣}$ م٢

مساحة النافذة = مساحة المستطيل + مساحة الجزء العلوي

$= ٢ + \frac{١٠}{٣}$

$= \frac{٦}{٣} + \frac{١٠}{٣}$

$= \frac{١٦}{٣}$ م٢ .

التكلفة = المساحة × سعر المتر الواحد .

$= \frac{١٦}{٣} \times ٥$

$= \frac{٨٠}{٣}$

= ٢٦,٦٧ ديناراً .

Scanned by CamScanner

أسئلة الوحدة

١) جد $\frac{د ص}{د س}$ في كل مما يأتي:

أ) $ص = \int \frac{٤س - ١}{س^٢ + ٥}$ د س

ب) $ص = \int_{-١}^{٣} (٣س)(٤س - ٢)$ د س

جـ) $ص = \int ظا(٤ + س)$ د س

د) $ص = \int_{٢}^{٢} (لـو_{هـ} س - هـ^{٢س})$ د س

هـ) $ص = لـو_{هـ} (س^٢ + ٦) - هـ^{٢س^{-١}} + س^٣ - ١$

و) $ص =$ جاس $لـو_{هـ} س$

٢) إذا كان ق(س) $= هـ^{٢س^{-١}}$، فجد قً(س).

٣) إذا كان ق(س) $= \int س(٢ - س^٢)$ د س، فجد قَ(٢).

٤) جد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ) $\int \frac{س^٢ - ٧س}{\sqrt[٣]{س}}$ د س

ب) $\int \frac{٦}{س^{-٥}}$ د س

جـ) $\int (س - ٢)(س + ٢)$ د س

د) $\int (٣س + ٢)^٢$ د س

هـ) $\int (٢س - ١)(س^٢ - س)^٥$ د س

و) $\int \frac{س^٢}{\sqrt{س^٣ + ١}}$ د س ، س > -١

ز) $\int (\frac{٢}{س} - هـ^{س} + ٣)$ د س

ح) $\int \frac{١٢ س^٣}{س^٤ + ٣}$ د س

ط) $\int ٦س هـ^{س^٢ + ٥}$ د س

ي) $\int \frac{٢س + ١}{جتا^٢(س^٢ + س)}$ د س

Scanned by CamScanner

٥) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{-١}^{-٨} \frac{١}{\sqrt[٣]{س}}$ ء س

ب) $\int_{١}^{٤}$ هـ ء س، حيث هـ العدد النيبيري

جـ) $\int_{٤}^{١} \left(\frac{١}{\sqrt{س}} - \frac{١}{س^{٢}}\right)$ ء س

د) $\int_{-١}^{١} \frac{س^{٢} + ٧س + ١٢}{س + ٤}$ ء س

هـ) $\int_{٣}^{١} \frac{٢}{٢س + ١}$ ء س

و) $\int_{١}^{١} ٤س \times هـ^{س^{٢}}$ ء س

ز) $\int_{٢}^{٦} \frac{١٠}{\sqrt{٥س + ٦}}$ ء س

٦) إذا كان $\int_{ب^{٢}+ب}^{-ب+٣}$ ق(س) ء س = صفرًا، فجد قيمة الثابت ب.

٧) إذا كان $\int_{١}^{٠}$ ق(س) ء س = ٤، $\int_{-١}^{٠}$ (ق(س) + ٣) ء س = ٢٠، فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\int_{٥}^{-١}$ ق(س) ء س

ب) $\int_{١}^{-١}$ ق(س) ء س

جـ) $\int_{٥}^{١}$ (٣ق(س) − ٤س) ء س

Scanned by CamScanner

٨) جد قيمة الثابت ب في كل مما يأتي:

أ) $\int_{-١}^{٣} ٢ب\ ٥س = ١٢$ ب) $\int_{٤}^{ب} (٢س - ١)\ ٥س = ٠$

جـ) $\int_{٠}^{٣} (ب\ س^{٢} + ٢)\ ٥س = -٢١$ د) $\int_{٢}^{ب} (١ - ٤س)\ ٥س = ٥ب$

٩) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س، ص) يعطى بالقاعدة (١ + س) (٣س + ٢)، فجد قاعدة الاقتران ق، علمًا بأن منحناه يمر بالنقطة (٢، -١).

١٠) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق(س) = ٣س^{٢} - ٢٧، ومحور السينات في الفترة [-٤، ٠].

١١) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم، بتسارع مقداره ت(ن) = ١٢ن(١ - ن) م/ث^{٢}، حيث ن الزمن بالثواني. فإذا كانت سرعتها الابتدائية ع(٠) = ٣ م/ث، وموقعها الابتدائي ف(٠) = ٢م، فجد:

أ) سرعة النقطة المادية بعد مرور أربع ثوانٍ من بدء الحركة.

ب) موقع النقطة المادية بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

١) يتزايد ثمن تحفة فنية بمرور الزمن، وبصورة مستمرة منتظمة وفق قانون النمو، بنسبة ٢,٥٪ سنويًا. فإذا كان ثمنها الأصلي ٣٠٠٠ دينار، فكم يصبح ثمنها بعد مرور ٨٠ عامًا؟

Scanned by CamScanner

س١ جد $\frac{دص}{دس}$ في كل مما يأتي

أ) $ص = \int \frac{٤س - ١}{س^{٤} + ٥}\, دس$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{٤ك - ١}{س^{٤} + ٥}$$

ب) $ص = \int_{-١}^{٣} (٣س)(٤ك - ٢)\, دس$

$\frac{دص}{دس}$ = صفر (لأن التكامل محدود وجواب التكامل المحدود = ثابت
ومشتقة الثابت = صفر)

جـ) $ص = \int ظا(٤ + س) \cdot دس$

$$\frac{دص}{دس} = ظا(٤ + س) \cdot$$

د) $ص = \int_{٢}^{ك} (لو_{هـ} س - هـ^{ك})\, دس$

$$\frac{دص}{دس} = \text{صفر} \cdot$$

هـ) $ص = لو_{هـ}(س^{٢} + ٦) - هـ^{ك-١} + س^{٣} - ١$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{٢ك}{س^{٢} + ٦} - ٢هـ^{ك-١} + ٣ك^{٢} \cdot$$

و) $ص = جا س \, لو_{هـ} س$

$$\frac{دص}{دس} = \text{الأول} \times \text{مشتقة الثاني} + \text{الثاني} \times \text{مشتقة الأول}$$

$$= جا س \times \frac{١}{س} + لو_{هـ} س \times جتا س$$

$$= \frac{جا س}{س} + جتا س \, لو_{هـ} س$$

س٢ اذا كان $ه(س) = هـ^{٤ك-١}$ ، $ق(س)$ مجد $ق'(س)$

الحل: $ق(س) = ٤س \cdot هـ^{٤ك-١}$ (حاصل ضرب)

$$ق'(س) = ٤س \times ٤ك \, هـ^{٤ك-١} + هـ^{٤ك-١} \times ٤$$

$$= ١٦س^{٢} هـ^{٤ك-١} + ٤ هـ^{٤ك-١}$$

$$= هـ^{٤ك-١}(١٦س^{٢} + ٤)$$

س٣ اذا كان $ه(س) = \int س(٣ - س^{٢})\, دس$

مجد $ق'(٢)$.

الحل: نشتق الطرفين

$ق'(س) = س(٣ - س^{٢})$

$ق'(٢) = ٢(٣ - ٢^{٢})$

$= ٢(٣ - ٤)$

$= ٢ \times -١$

$= -٤$

Scanned by CamScanner

س٤ جد كلاً من التكاملات التالية :

م) $\int \frac{س^{٤} - ٧س}{\sqrt[٣]{س}} \cdot دس$ =

$\int س^{\frac{١٣}{٣}} - ٧س^{\frac{١}{٣}} \cdot دس$

$\int س^{\frac{٥}{٣}} - ٧س^{\frac{٤}{٣}} \cdot دس$

$\frac{س^{\frac{٨}{٣}}}{\frac{٨}{٣}} - ٧\frac{س^{\frac{٧}{٣}}}{\frac{٧}{٣}} + د$

$\frac{٣}{٨}س^{٨} - \frac{١٢}{٥}\sqrt{س^{٥}} + د$

ب) $\int \frac{٦}{س^{٥}} \cdot دس = \int ٦س^{-٥} \cdot دس$

$\frac{٦س^{٦}}{٦} + د = س^{٦} + د$

ج) $\int (س-٢)(س+٢)\, دس$ =

$\int (س^{٢} - ٤) \cdot دس = \frac{س^{٣}}{٣} - ٤س + د$

تذكر :

$س^{٢} - ص^{٢} = (س - ص)(س + ص)$

د) $\int (٣س + ٢)^{٢} دس$ =

$\int (٩س^{٢} + ١٢س + ٤)\, دس$ =

$\frac{٩س^{٣}}{٣} + ٦س^{٢} + ٤س + د$ =

$٣س^{٣} + ٦س^{٢} + ٤س + د$

تذكر :

$(س + ص)^{٢}$ = مربع الأول + ٢ × الأول × الثاني + مربع الثاني

$= س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢}$

هـ) $\int (٤س-١)(س^{٢}-س)^{٥} \cdot دس$ =

$\int (٤س-١)\, ص^{٥} \cdot \frac{دص}{٤س-١}$

$ص = س^{٢} - س$

$\frac{دص}{دس} = ٢س - ١$

$\frac{دص}{٤س-١} = دس$

$\int ص^{٥} \cdot دص$ =

$\frac{ص^{٦}}{٦} + د = \frac{(س^{٢}-س)^{٦}}{٦} + د$

منهاجي

Scanned by CamScanner

تابع س٤

و) $\int \frac{س^{٤}}{\sqrt{س^{٣}+١}} \cdot دس = \int \frac{س^{٤}}{(س^{٣}+١)^{\frac{١}{٢}}} \cdot دس$

$\int س^{٤}(س^{٣}+١)^{-\frac{١}{٢}} \cdot دس$

ص = $س^{٣}+١$
$\frac{دص}{دس} = ٣س^{٢}$
$\frac{دص}{٣س^{٢}} = دس$

$\int س^{٤} ص^{-\frac{١}{٢}} \cdot \frac{دص}{٣س^{٢}}$

$\frac{١}{٣} \int ص^{-\frac{١}{٢}} \cdot دص =$

$\frac{١}{٣} \frac{ص^{-\frac{١}{٢}+١}}{-\frac{١}{٢}+١} + د = \frac{١}{٣} \frac{ص^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + د$

$= \frac{٢}{٣} \sqrt{ص} + د$

$= \frac{٢}{٣} \sqrt{س^{٣}+١} + د$

ز) $\int (\frac{١}{س^{٢}} - هـ^{س} + ٣) \cdot دس =$

$= ٣ لو_{هـ} |س| - هـ^{س} + ٣س + د$

ح) $\int \frac{١٢ س^{٢}}{س^{٤}+٣} دس$

$\int \frac{١٢ س^{٢}}{ص} \times \frac{دص}{٤ س^{٣}}$

ص = $س^{٤}+٣$
$\frac{دص}{دس} = ٤س^{٣}$
$\frac{دص}{٤س^{٣}} = دس$

$\int \frac{٣}{ص} \cdot دص = ٣ لو_{هـ} |ص| + د$

$= ٣ لو_{هـ} |س^{٤}+٣| + د$

ط) $\int ٦س^{٥} هـ^{س^{٦}+٥} \cdot دس$

$\int ٦ هـ^{ص} \cdot \frac{دص}{٦س^{٥}}$

ص = $س^{٦}+٥$
$\frac{دص}{دس} = ٦س^{٥}$
$\frac{دص}{٦س^{٥}} = دس$

$\int هـ^{ص} \cdot دص$

$هـ^{ص} + د = ٢ هـ^{س^{٦}+٥} + د$

ي) $\int \frac{٢س+١}{جتا^{٢}(س^{٢}+س)} دس$

$\int \frac{٢س+١}{جتا^{٢}ص} \cdot \frac{دص}{٢س+١}$

ص = $س^{٢}+س$
$\frac{دص}{دس} = ٢س+١$
$\frac{دص}{٢س+١} = دس$

$\int \frac{١}{جتا^{٢}ص} \cdot دص = \int قا^{٢}ص \cdot دص$

$= ظا ص + د$

$= ظا(س^{٢}+س) + د$

تذكر: $قا س = \frac{١}{جتا س}$

$قا^{٢}س = \frac{١}{جتا^{٢}س}$

Scanned by CamScanner

س ٥ م) $\int_{-1}^{-8} \frac{1}{\sqrt[3]{س}}\,د س = \int_{-1}^{-8} \frac{1}{س^{\frac{1}{3}}}\,د س$

$= \left[\frac{س^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_{-1}^{-8}$

$= \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(-8)^2} - \sqrt[3]{(-1)^2}\right)$

$= \frac{3}{2}\left((-2)^2 - (-1)^2\right) = \frac{3}{2}(4-1)$

$= \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{2}$.

ب) $\int_{1}^{4} هـ\,د س$ حيث هـ العدد النيبري .

$\int_{1}^{4} هـ\,د س = [هـ س]_{1}^{4} = هـ^4 - هـ^1$

$3هـ = هـ^4 - هـ$.

ج) $\int_{1}^{4} \left(\frac{1}{\sqrt{س}} - \frac{1}{س^2}\right) د س$

$= \int_{1}^{4} (س^{-\frac{1}{2}} - س^{-2})\,د س$

$= \left[\frac{س^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{س^{-2+1}}{-2+1}\right]_{1}^{4}$

$= \left[\frac{س^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{س^{-1}}{-1}\right]_{1}^{4}$

$= \left[2\sqrt{س} + \frac{1}{س}\right]_{1}^{4}$

$= \left(2\sqrt{4} + \frac{1}{4}\right) - \left(2\sqrt{1} + \frac{1}{1}\right)$

$= 4 + \frac{1}{4} - 2 - 1$

$= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

د) $\int_{1}^{4} \frac{س^2 + 7س + 12}{س + 3}\,د س$

$= \int_{1}^{4} \frac{(س+4)(س+3)}{س+3}\,د س$

$= \int_{1}^{4} (س + 4)\,د س = \left[\frac{س^2}{2} + 4س\right]_{1}^{4}$

$= (8 + 16) - \left(\frac{1}{2} + 4\right)$

$= 24 - \frac{1}{2} - 4 = 20 - \frac{1}{2} = 19\frac{1}{2}$

هـ) $\int_{3}^{9} \frac{2}{2س+1}\,د س$

$= \int_{3}^{9} \frac{2}{ص} \times \frac{د ص}{2} = \int_{3}^{9} \frac{1}{ص}\,د ص = [\ln_{هـ} |ص|]_{3}^{9}$

$= \ln_{هـ} |2س+1|]_{3}^{9} = \ln_{هـ} |2 \times 9 + 1| - \ln_{هـ} |2 \times 3 + 1|$

$= \ln_{هـ} 19 - \ln_{هـ} 7 = صفر - \ln_{هـ} 7 = -\ln_{هـ} 7$

ص = 2س + 1
د ص / د س = 2
د س = د ص / 2

س٥ ﻫ) $\int_{1}^{2} ٤س^{٣} \times هـ \, دس$

$ص = س^{٤}$

$\frac{دص}{دس} = ٤س^{٣}$

$دص = ٤س^{٣} \, دس$

$\int_{1}^{2} هـ^{ص} \, دص = [هـ^{ص}]_{1}^{2}$

$= [هـ^{س^{٤}}]_{1}^{0}$

$= هـ^{٠} - هـ^{٢} = ١ - هـ^{٢}$

$= -(هـ^{٢} - ١)$

ز) $\int_{٢}^{٦} \frac{١٠}{\sqrt{٥س+٦}} \, دس = \int_{٢}^{٦} ١٠ (٥س+٦)^{-\frac{١}{٢}} \, دس$

$ص = ٥س + ٦$

$\frac{دص}{دس} = ٥$

$دس = \frac{دص}{٥}$

$= \int_{ج}^{٦} ١٠ ص^{-\frac{١}{٢}} \cdot \frac{دص}{٥}$

$= \int_{ج}^{٦} ٢ ص^{-\frac{١}{٢}} \, دص = [\frac{٢ ص^{-\frac{١}{٢}+١}}{-\frac{١}{٢}+١}]_{ج}^{٦}$

$= [٤ \sqrt{٥س+٦}]_{ج}^{٦}$

$٤ (\sqrt{٥ \times ٦ + ٦} - \sqrt{٥ \times ٢ + ٦}) = ٤ (\sqrt{٣٦} - \sqrt{١٦})$

$٤ (٦ - ٤) = ٤ \times ٢ = ٨$

س٦ إذا كان $\int_{ب^{٢}+ب}^{-ب+٣} م(س) \, دس = ص$ فأوجد قيمة الثابت ب ؟

الحل: بما أن الناتج = صفر ⇐

الحد الأدنى = الحد الأعلى

$ب^{٢} + ب = -ب + ٣$ ⇐

$ب^{٢} + ب + ب - ٣ = صفر$

$ب^{٢} + ٢ب - ٣ = صفر$

$(ب + ٣)(ب - ١) = صفر$

$ب + ٣ = صفر$ ⇐ $ب = -٣$

$ب - ١ = صفر$ ⇐ $ب = ١$

س٧ إذا كان $\int_{١}^{٥} م(س) \, دس = ٤$ ، فجد $\int_{-١}^{٥} م(س) \, دس$

$\int_{-١}^{٥} (م(س) + ٣) \, دس = ٢٠$ ← فجد

$\int_{-١}^{٥} م(س) \, دس + \int_{-١}^{٥} ٣ \, دس = ٢٠$

$\int_{-١}^{٥} م(س) \, دس + [٣س]_{-١}^{٥} = ٢٠$

$\int_{-١}^{٥} م(س) \, دس + ٣ \times ٥ - ٣ \times -١ = ٢٠$

$\int_{-١}^{٥} م(س) \, دس + ١٥ + ٣ = ٢٠$

$\int_{-١}^{٥} م(س) \, دس + ١٨ = ٢٠$

$\int_{-١}^{٥} م(س) \, دس = ٢$

←

Scanned by CamScanner

تابع س ٧

$\int_1^5 م(س)\,د س = ٤$ ، $\int_{-1}^{5} م(س)\,د س = ٢$

جد قيمة ما يلي:

أ) $\int_5^{-1} م(س)\,د س = -٢$

ب) $\int_1^{-1} م(س)\,د س = \int_1^5 م(س)\,د س + \int_5^{-1} م(س)\,د س$

$= ٤ + (-٢)$

$= ٢$ (خاصية الاضافة)

جـ) $\int_5^1 (٣م(س) - ٤ك)\,د س = 0$

$\int_5^1 ٣م(س)\,د س - \int_5^1 ٤ك\,د س = 0$

$= ٣ \times (-٤) - \left[\frac{٤س^٢}{٢}\right]_5^1$

$= -١٢ - ٢(١ - ٢٥) =$

$= -١٢ - ٢(-٢٤) =$

$= -١٢ - ٤٨ =$

$= -٦٠$

س ٨ جد قيمة الثابت ب في كل مما يأتي:

أ) $\int_{-1}^{3} ٢ب\,د س = ١٢$

$[٢ب س]_{-1}^{٣} = ١٢$

$٢ب(٣ - (-١)) = ١٢$

$٢ب \times ٤ = ١٢ \Leftarrow \frac{٨ب}{٨} = \frac{١٢}{٨} \Leftarrow ب = \frac{٣}{٢}$

ب) $\int_{٤}^{ب} (ك - ١)\,د س = 0$

$[س^٢ - س]_{٤}^{ب} = 0$

$ب^٢ - ب - (١٦ - ٤) = 0$

$ب^٢ - ب - ١٢ = 0$

$(ب - ٤)(ب + ٣) = 0$

$ب - ٤ = 0 \Leftarrow ب = ٤$

$ب + ٣ = 0 \Leftarrow ب = -٣$

جـ) $\int_{-٢}^{ب} (ب س^٢ + ٢)\,د س = -٢١$

$\left[\frac{ب س^٣}{٣} + ٢س\right]_{-٢}^{٣} = -٢١$

$\frac{ب(٣)^٣}{٣} + ٢ \times ٣ - \text{صفر} = -٢١$

$٩ب + ٦ = -٢١$

$٩ب = -٢٧$

$ب = -٣$

منهاجي

Scanned by CamScanner

س٨ ∫ من ٢ إلى ب (١ − ٤س) دس = ٥ ب

[س − ٤س²/٢] من ٢ إلى ب = ٥ ب

ب − ٢ب² − (٢ − ٢(٢)²) = ٥ ب

ب − ٢ب² − ٦ = ٥ ب

−٢ب² − ٤ب + ٦ = صفر ÷ −٢

ب² + ٢ب − ٣ = صفر

(ب + ٣)(ب − ١) = صفر

ب + ٣ = صفر ⇐ ب = −٣

ب − ١ = صفر ⇐ ب = ١

س٩ إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ه(س) عند النقطة (س، ص) يعطى بالقاعدة (١ + س)(٣س + ٢) ، فجد قاعدة الاقتران ه علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (٣، −١)

الحل: ميل المماس = ه′(س) = (١ + س)(٣س + ٢)

ه′(س) = ٣س + ٢ + ٣س² + ٢س

= ٣س² + ٥س + ٢

ه(س) = ∫ ه′(س) دس

= ∫ (٣س² + ٥س + ٢) دس

= س³ + ٥/٢ س² + ٢س + جـ

ه(س) = س³ + ٥/٢ س² + ٢س + جـ

ه(٣) = ٣³ + ٥/٢ × ٣² + ٢ × ٣ + جـ

−١ = ٢٧ + ٤٥/٢ + ٦ + جـ

−١ = ٢٧ + ٢٢٫٥ + ٦ + جـ

−١ = ٥٥٫٥ + جـ ⇐ جـ = −٥٦٫٥

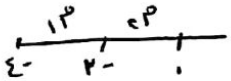
ه(س) = س³ + ٥/٢ س² + ٢س − ٥٦٫٥

س١٠ جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى ه(س) = ٣س² − ٢٧ ومحور السينات في الفترة [−٤، ٥]

الحل: ٣س² − ٢٧ = ٠ ⇐ ٣س²/٣ = ٢٧/٣ ⇐

س² = ٩ ⇐ س = ± ٣

−٣ تنتمي للفترة [−٤، ٥]



م١ = ∫ من −٤ إلى −٣ (٣س² − ٢٧) دس = [س³ − ٢٧س] من −٤ إلى −٣

(−٣)³ − ٣ × ٢٧ − ((−٤)³ − ٣ × ٢٧ × −٤)

−٢٧ + ٨١ + ٦٤ − ١٠٨ = −١٣٥ + ١٤٥

م١ = ١٠ وحدة ربعية .

م٢ = ∫ من −٣ إلى ٣ (٣س² − ٢٧) دس = [س³ − ٢٧س] من −٣ إلى ٣

(٣)³ − ٣ × ٢٧ − ((−٣)³ − ٣ × ٢٧)

٢٧ − ٨١ = −١٥٤

م٢ = ٥٤ وحدة ربعية

م = م١ + م٢ = ١٠ + ٥٤ = ٦٤ وحدة ربعية .

Scanned by CamScanner

س١١ تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بسرعة مقدارها ت(ن) = ١٢ن (١-ن) م/ث

فإذا كانت سرعتها الابتدائية ع(٠) = ٣ م/ث وموقعها الابتدائي ف(٠) = ٢ م فجد:

أ) سرعة النقطة المادية بعد مرور ٤ ثوانٍ من بدء الحركة

ب) موقع النقطة المادية بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة

الحل: ع(ن) = ∫ ت(ن) . دن

= ∫ ١٢ن (١-ن) . دن

= ∫ (١٢ن - ١٢ن^٢) . دن

ع(ن) = ٦ن^٢ - ٤ن^٣ + ﻫ

ع(٠) = ٠ - ٠ + ﻫ

٣ = ﻫ

ع(ن) = ٦ن^٢ - ٤ن^٣ + ٣

سرعة النقطة بعد ٤ ثوانٍ هي ع(٤)

ع(٤) = ٦×٤^٢ - ٤×٤^٣ + ٣

= ٦×١٦ - ٤×٦٤ + ٣

= ٩٦ - ٢٥٦ + ٣

= ١٦٠- + ٣ = ١٥٧- م/ث

ف(ن) = ∫ ع(ن) . دن

= ∫ ٦ن^٢ - ٤ن^٣ + ٣ . دن

ف(ن) = ٢ن^٣ - ن^٤ + ٣ن + ﻫ

ف(٠) = ٠ - ٠ + ٠ + ﻫ

٢ = ﻫ

ف(ن) = ٢ن^٣ - ن^٤ + ٣ن + ٢

موقع النقطة بعد مرور ثانيتين هو ف(٢)

ف(٢) = ٢(٢)^٣ - (٢)^٤ + ٣(٢) + ٢

= ١٦ - ١٦ + ٦ + ٢ = ٨ م

س١٢ يتزايد ثمن تحفة فنية بمرور الزمن وبصورة مستمرة منتظمة وفق قانون النمو بنسبة ١٥٪ سنوياً. فإذا كان ثمنها الأصلي ٣٠٠٠ دينار فكم يصبح ثمنها بعد مرور ٨٠ عاماً؟

الحل: ع. = ٣٠٠٠ ، ن = ٨٠ ، م = ١٥/١٠٠ = ٢٥/١٠٠

ع(ن) = ع. × (١ + م/١٠٠)^ن

ع(٨٠) = ٣٠٠٠ × (١,١٥)^٨٠

= ٣٠٠٠ × (١,١٥)^٢ × (١,١٥)^٧٨

= ٣٠٠٠ × ٧,١٢٩

= ٢١٣٨٧٠ دينار ثمن التحفة بعد مرور ٨٠ عاماً.

منهاجي

Scanned by CamScanner