إجابات تدريبات الدرس

نظريات النهايات

تدريب ١

إذا كان ق(س) = ٢س ، هـ (س) = س^{٣} + س ، فجد كلًّا مما يأتي:

١) $\lim_{س \to ٢-} \left(ق(س) + هـ(س) \times س \right)$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س)}{هـ(س)}$

٣) $\lim_{س \to ١} \left(\sqrt{ق(س)} + ٣ \sqrt{هـ(س)} \right) + ١٥$

الحل:

١) $\lim_{س \to ٢-} ق(س) + \lim_{س \to ٢-} هـ(س) \times \lim_{س \to ٢-} س$

$= ٢^{-} \times ٢ + (٢^{-})^{٣} + ٢^{-} \times ٢$

$= ٤^{-} + ١٠^{-} \times ٢^{-} = ٢٠ + ٤^{-}$

$= ١٦$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{١ \times ٢}{١ + ١^{٣}} = \frac{٢}{٢} = ١$

٣) $\lim_{س \to ١} \left(\sqrt{ق(س)} + ٣ \sqrt{هـ(س)} \right) + ١٥$

$\sqrt{١ \times ٢} + ٣ \sqrt{١ + ١} + ١٥$

$\sqrt{٢} + ٣ \sqrt{٢} + ١٥$

$٤ \sqrt{٢} + ١٥$

تدريب ٢

جد كلًّا مما يأتي:

١) $\lim_{س \to ٠} |س - ٨|$

٢) $\lim_{س \to ١٦} |س - ١٦|$

٣) $\lim_{س \to ٤} |س^{٢} - ١٦|$

الحل:

١) $\lim_{س \to ٠} |س - ٨| = |٠ - ٨|$

$= |-٨|$

$= |٨|$

تعويض مباشر؛ لأن الصفر ليس جذر (صفر) للاقتران ما داخل المطلق.

٢) $\lim_{س \to ١٦} |س - ١٦|$ نعيد التعريف:

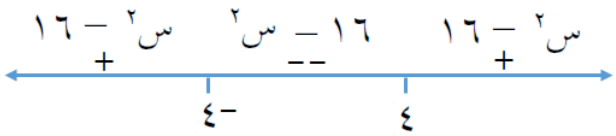
$س - ١٦ = صفر \longleftarrow س = ١٦$

$$|س - ١٦| = \begin{cases} س - ١٦ ، & س \geq ١٦ \\ ١٦ - س ، & س < ١٦ \end{cases}$$

$$\lim_{س \to ١٦} |س - ١٦| = صفر \iff \begin{cases} \lim_{س \to ١٦^+} |س - ١٦| = صفر \\ \lim_{س \to ١٦^-} |س - ١٦| = صفر \end{cases}$$

٣) $\lim_{س \to ٤} |س^٢ - ١٦|$ **نعيد التعريف**

$س^٢ - ١٦ = صفر \longleftarrow س = \pm ٤$



$\lim_{س \to ٤^+} |س^٢ - ١٦| = صفر$

$\lim_{س \to ٤^-} |س^٢ - ١٦| = صفر$

$\lim_{س \to ٤} |س^٢ - ١٦| = صفر$

تدريب ٣

جد كلًّا من النهايات الآتية:

١) $\lim_{س \to ١} [س - ٢]$

٢) $\lim_{س \to ١,٥} [٤ - ٢س]$

٣) $\lim_{س \to ٠,١} [س + ١]$

٤) $\lim_{س \to ٤} [٠,٢٥ س]$

الحل:

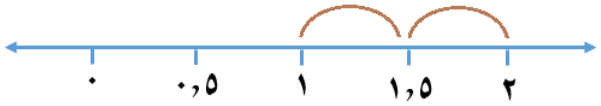
١) $\lim_{س \to ١} [س - ٢]$ نعيد التعريف حول النقطة س = ١

$$ل = \frac{١}{|\text{معامل س}|} = ١$$

$$[س - ٢] = \begin{cases} -١ & ، \ ١ \leq س < ٢ \\ -٢ & ، \ ٠ \leq س < ١ \end{cases}$$

$$\lim_{س \to ١} [س - ٢] \text{ غير موجودة} \Leftarrow \begin{cases} \lim_{س \to ١^+} [س - ٢] = -١ \\ \lim_{س \to ١^-} [س - ٢] = -٢ \end{cases}$$

٢) $\lim_{س \to ١,٥} [٤ - ٢س]$



$$ل = \frac{١}{٢}$$

$$[٤ - ٢س] = \begin{cases} \text{صفر} & ، \ ١,٥ < س \leq ٢ \\ ١ & ، \ ١ \leq س \leq ١,٥ \end{cases}$$

$$\lim_{س \to ١,٥} [٤ - ٢س] = ١ \text{ غير موجودة} \Leftarrow \begin{cases} \lim_{س \to ١,٥^+} [٤ - ٢س] = \text{صفر} \\ \lim_{س \to ١,٥^-} [٤ - ٢س] = ١ \end{cases}$$

٣) $\lim_{س \to ٠,١} [س + ١]$

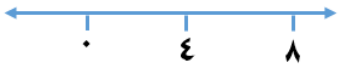
$$ل = ١$$

$$[س + ١] = \begin{cases} ١ & ، \ \text{صفر} \leq س < ١ \end{cases}$$

$$\lim_{س \to ٠,١} [س + ١] = ١$$

٤) $\lim_{س \to ٤}$ [٠,٢٥ س]

$\frac{١}{٤}$ = ٠,٢٥



ل = $\frac{١}{\frac{١}{٤}}$ = ٤

[٠,٢٥ س] = $\begin{cases} ٠ & ، \ ٠ \leq س < ٤ \\ ١ & ، \ ٤ \leq س < ٨ \end{cases}$

$\lim_{س \to ٤^+}$ [٠,٢٥ س] = ١

$\lim_{س \to ٤^-}$ [٠,٢٥ س] = صفر

$\lim_{س \to ٤}$ [٠,٢٥ س] = **غير موجودة**

تدريب ٤

إذا كان ق(س) = [٢ − س] ، فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) جد قيم أ التي تجعل $\lim_{س \to أ}$ ق(س) غير موجودة

٢) جد قيم جـ التي تجعل $\lim_{س \to جـ}$ ق(س) = − ١

الحل:

١) قيم أ هي جميع قيم أ حيث:

أ ∋ ص

٢) قيم جـ هي (٢، ٣)

تدريب ٥

جد كلًّا من النهايات الآتية:

١) $\lim_{س \to ٧}$ $\sqrt{س − ٧}$

٢) $\lim_{س \to ٥}$ $\sqrt{س − ٧}$

٣) $\lim_{س \to ٥}$ $\sqrt{س^٢ − ٢٥}$

٤) $\lim_{س \to −٧}$ $\sqrt{س^٢ − ٢٥}$

الحل:

١) $\lim_{س \to ٧} \sqrt{س - ٧}$

س − ٧ = صفر ← س = ٧

$\lim_{س \to ٧^+} \sqrt{س - ٧}$ = صفر

$\lim_{س \to ٧^-} \sqrt{س - ٧}$ = غير موجودة

$\lim_{س \to ٧} \sqrt{س - ٧}$ = غير موجودة

منهاجي
متعة التعليم الهادف

٢) $\lim_{س \to ٥} \sqrt{س - ٧}$ = غير موجودة

٣) $\lim_{س \to ٥} \sqrt{س^٢ - ٢٥}$

س^٢ − ٢٥ = صفر ← س = ± ٥

$\lim_{س \to ٥^+} \sqrt{س^٢ - ٢٥}$ = صفر

$\lim_{س \to ٥^-} \sqrt{س^٢ - ٢٥}$ = غير موجودة

$\lim_{س \to ٥} \sqrt{س^٢ - ٢٥}$ = غير موجودة

٤) $\lim_{س \to ٧-} \sqrt{س^٢ - ٢٥} = \sqrt{٤٩ - ٢٥} = \sqrt{٢٤}$

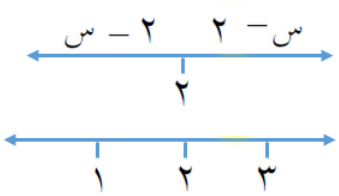
تدريب ٦

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} |س - ٢| & ، س \geq ٢ \\ [٦ - س] & ، س > ٢ \end{cases}$

فجد $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

الحل:

س − ٢ = صفر ⟵ س = ٢



$$[\,٦ - س\,] = \begin{cases} ٣ \;،\; ٢ < س \geq ٣ \\ ٤ \;،\; ١ < س \geq ٢ \end{cases}$$

$$ق(س) = \begin{cases} س - ٢ \;،\; س < ٢ \\ ٤ \;،\; ١ < س \geq ٢ \end{cases}$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ٢} ق(س) = \text{صفر} \quad ، \quad \text{نهـــا}_{س \to ٢^+} ق(س) = ٤$$

$$\Longleftarrow \text{نهـــا}_{س \to ٢} ق(س) = \textbf{غير موجودة}$$

تدريب ٧

إذا كان ق(س) = [س + ٥] ، ل(س) = [٤ − س] ، فجد كلًّا مما يأتي:

١) $\text{نهـــا}_{س \to ١} ق(س)$

٢) $\text{نهـــا}_{س \to ١} ل(س)$

٣) $\text{نهـــا}_{س \to ١} \big(ق(س) + ل(س)\big)$

ماذا تلاحظ؟

الحل:

١) $\lim_{س \to ١} ق(س)$

$$[س + ٥] = \begin{cases} ٦ & ، \ ١ \leq س < ٢ \\ ٥ & ، \ ٠ \leq س < ١ \end{cases}$$

$$\lim_{س \to ١} ق(س) = \text{غير موجودة} \Leftarrow \begin{cases} \lim_{س \to ١^+} ق(س) = ٦ \\ \lim_{س \to ١^-} ق(س) = ٥ \end{cases}$$

٢) $\lim_{س \to ١} ل(س)$

$$ل(س) = [٤ - س]$$

$$[٤ - س] = \begin{cases} ٢ & ، \ ١ < س \leq ٢ \\ ٣ & ، \ ٠ < س \leq ١ \end{cases}$$

$$\lim_{س \to ١} ل(س) = \text{غير موجودة} \Leftarrow \begin{cases} \lim_{س \to ١^+} ل(س) = ٢ \\ \lim_{س \to ١^-} ل(س) = ٣ \end{cases}$$

٣) $\lim_{س \to ١} \big(ق(س) + ل(س)\big)$

$$ق(س) + ل(س) = \begin{cases} ٨ & ، \ ١ < س < ٢ \\ ٨ & ، \ ٠ < س < ١ \\ ٩ & ، \ س = ١ \end{cases}$$

$$\lim_{س \to ١} \big(ق(س) + ل(س)\big) = ٨ \Leftarrow \begin{cases} \lim_{س \to ١^+} \big(ق(س) + ل(س)\big) = ٨ \\ \lim_{س \to ١^-} \big(ق(س) + ل(س)\big) = ٨ \end{cases}$$

لاحظ أنه قد تكون نهاية أحد الاقترانين أو كلاهما غير موجودة، ولكن قد تصبح النهاية موجودة بعد تطبيق عملية حسابية عليها.