

## اختبار نهاية الوحدة

### التكامل

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

(1) قيمة  $\int x^3 - 1x^2$  هي:

$x^2 - 1x + C$  (a)

$x^2 + 1x + C$  (b)

$x^2 - 1x + C$  (c)

$x^2 + 1x + C$  (d)

$$\int x^3 - 1x^2 dx = \int (x^3 - 1x^2) dx = \int (x - x - 2) dx = \frac{1}{2}x^2 + x - 1 + C = \frac{1}{2}x^2 + 1x + C \dots \dots b$$

(2) إذا كان:  $\int 02kx dx = 6$  فإن قيمة الثابت k:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

$$\int 02kx dx = 6 \Rightarrow k \cdot 2x^2 \Big|_0^2 = 6 \Rightarrow k(2)^2 - k(0)^2 = 6 \Rightarrow 2k = 6 \Rightarrow k = 3 \dots \dots c$$

(3) قيمة:  $\int 03(x^2 + 3x) dx$  هي:

a) 334

b) 2114

c) 412

d) 2212

$$\int (x^2 + 3x) dx = \left( -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right) \Big|_0^3 = \left( -\frac{1}{3}(3)^3 + \frac{3}{2}(3)^2 \right) - \left( -\frac{1}{3}(0)^3 + \frac{3}{2}(0)^2 \right) = 92 \dots\dots\dots (c)$$

(4) قيمة:  $\int_0^2 e^{2x} dx$  هي:

e<sup>4</sup>-1 (a)

e<sup>4</sup>-2 (b)

2e<sup>4</sup>-2 (c)

12e<sup>4</sup>-12 (d)

$$\int_0^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} e^{2(2)} - \frac{1}{2} e^{2(0)} = \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e^4 - 1) \dots\dots\dots d$$

(5) قيمة:  $\int_1^4 x dx$  هي:

a) -2

b) 716-

c) 12

d) 2

$$\int_1^4 x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^4 = \frac{1}{2} (4^2) - \frac{1}{2} (1^2) = \frac{1}{2} (16 - 1) = \frac{15}{2} = 7.5 \dots\dots\dots d$$

(6) التكامل المحدود الذي يمكن عن طريقه إيجاد المساحة بين منحنى الاقتران:  $f(x) = 4x - x^2$  والمحور x هو:

$\int_0^4 (4x - x^2) dx$  (a) 40

$\int_0^4 (4x - x^2) dx$  (b) 04

$\int_0^4 (4x - x^2) dx$  (c) 10

$\int_0^4 (4x - x^2) dx$  (d) 01

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الآتية:

$$f(x)=0 \Rightarrow 4x-x^2=0 \Rightarrow x(4-x)=0 \Rightarrow x=0, x=4$$

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عدداً ضمن الفترة  $[0,4]$ ، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(1)=4(1)-(1)^2=3>0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور  $x$  في الفترة  $[0,4]$

والتكامل المحدود الذي يمكن عن طريقه إيجاد المساحة المطلوبة هو

$$\int_0^4 (4x-x^2) dx$$

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$\int (7x-1/2) dx$$

$$\int (3x-12) dx = 6x^2 + C$$

$$\int (8x-10x^2) dx$$

$$\int (8x-10x^2) dx = 4x^2 - 10/3 x^3 + C$$

$$\int (5x^3) dx$$

$$\int 5x^3 dx = \int (5x^3 - 3) dx = -5/2 x^2 - 2 + C = -5/2 x^2 + C$$

$$\int (x^2 - 1/x^3) dx$$

$$\int (x^2 - 1/x^3) dx = \int (x^2 - 1/x^3) dx = \int (x^2 \cdot x^3 - 1/x^3) dx = \int (x^5 - x^{-3}) dx = 3/8 x^6 + 3/2 x^{-2} + C = 3/8 x^6 + 3/2 x^{-2} + C$$

$$\int (5x^2 - 2e^{7x}) dx$$

$$\int (5x^2 - 2e^{7x}) dx = 5/3 x^3 - 2/7 e^{7x} + C$$

$$\int (2x + 3e^{4x} + 5) dx$$

$$\int (2x+3e^{4x+5})dx = \int (x^2+34e^{4x+5}+C)dx$$

$$\int (x^2-62x)dx \quad (13)$$

$$\int |x|+Cx^2-62x dx = \int (x^2-62x)dx = \int (12x-3x)dx = 14x^2-3\ln|x|$$

$$\int (x-1)^3 dx \quad (14)$$

$$\int (x-1)^3 dx = \int (x-1)^{-3} dx = -\frac{1}{2}(x-1)^{-2} + C = -\frac{1}{2}(x-1)^{-2} + C$$

$$\int (e^x+4)dx \quad (15)$$

$$\int |e^x+4|+C e^x+4 dx = \ln|e^x+4|+C e^x+4$$

$$\int (2x e^{x^2-1}) dx \quad (16)$$

$$\int 2x e^{x^2-1} dx \quad u = x^2-1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \Rightarrow \int 2x e^u \times \frac{du}{2x} = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2-1} + C$$

$$\int (4e^x(3+e^{2x})) dx \quad (17)$$

$$\int 4e^x(3+e^{2x}) dx = \int (12e^x+4e^{3x}) dx = 12e^x+4\frac{e^{3x}}{3}+C$$

$$\int (x(4+2x+x^2))^8 dx \quad (18)$$

$$\int (x(4+2x+x^2))^8 dx \quad u = 4+2x+x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2+2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2+2x} \Rightarrow \int (1+x)^8 \times \frac{du}{2+2x} = \int (1+x)^8 \times \frac{du}{2(1+x)} = \frac{1}{2} \int (1+x)^7 du = \frac{1}{2} \int (1+x)^7 du = \frac{1}{2} \times \frac{(1+x)^8}{8} + C = \frac{1}{16} (1+x)^8 + C = \frac{1}{16} (4+2x+x^2)^8 + C$$

$$\int ((3+x^2) \sin x) dx \quad (19)$$

$$\int (3+x^2) \sin x dx \quad u = 3+x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \Rightarrow \int x \sin x \sin x dx = \int x \sin x dx = -\cos x + C = -\cos \sqrt{u} + C = -\cos \sqrt{3+x^2} + C$$

$$\int (x) dx \quad (20)$$

$$\int (3x-4\cos^3 x) dx = \frac{3}{2}x^2 - 4\int \cos^3 x dx$$

$$\int ((7x+2) \sin x) dx \quad (21)$$

$$\int (7x+2) + C(7x+2) dx = \int (12x^2 + 17 \cos(7x+2)) dx = \int (1 - \sin x - \sin) dx$$

$$\int (e^{3x} - e^{-3x}) dx \quad (22)$$

$$\int (e^{3x} - e^{-3x}) dx = \frac{1}{3} e^{3x} + \frac{1}{3} e^{-3x} + C$$

$$\int (21 - 5x) dx \quad (23)$$

$$\int |1-5x| + C(21-5x) dx = \int (2-5(-5)^{1-5x}) dx = -25 \int (-5)^{1-5x} dx = -25 \ln |f|$$

(24) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة  $y$  هو:  $\frac{dy}{dx} = 4x - 2$  فأجد قاعدة العلاقة، علماً بأن منحنىها يمر بالنقطة  $(0, 3)$ .

$$y = \int (4x - 2) dx = 2x^2 - 2x + C$$

منحنى الاقتران يمر بالنقطة  $(0, 3)$  إذن:

$$C = 3 \Rightarrow y = 2x^2 - 2x + 3$$

(25) الإيراد الحدي: يمثل الاقتران:  $R'(x) = 4x - 1.2x^2$  الإيراد الحدي (بالدينار) لكل قطعة تباع في إحدى الشركات، حيث  $x$  عدد القطع المباعة، و  $R(x)$  إيراد بيع  $x$  قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد  $R(x)$ ، علماً بأن  $R(20) = 30000$ .

$$R(x) = \int (4x - 1.2x^2) dx = 2x^2 - 0.4x^3 + C$$

بما أن  $R(20) = 30000$  إذن:

$$C = 54000 \Rightarrow R(x) = 2x^2 - 0.4x^3 + 54000$$

(26) يتحرك جسيم من السكون، ويعطى تسارعه بالاقتران:  $a(t) = \cos(3t - \pi)$ ، حيث  $t$  الزمن بالثواني، و  $a$  تسارعه بالمتراً لكل ثانية تربيع. أجد سرعة الجسيم بعد  $t$  ثانية من بدء الحركة.

$$\int (3t - \pi) + C(3t - \pi) dx = \int 13 \sin v(t) = \int \cos$$

إذا كان  $\int -5 - 1g(x) dx = 11 - 5 - \int$  فأجد كلاً مما يأتي:

$$\int (15f(x) dx \quad (27) - \int$$

$$\int 15f(x)dx = \int -1 - 5f(x)dx + \int -55f(x)dx = -4 + 10 = 6 - \int$$

$$\int (5 - 17f(x))dx \quad (28 - \int$$

$$\int 5 - 17f(x)dx = 7\int -5 - 1f(x)dx = 7 \times 4 = 28 - \int$$

$$\int (3f(x) - g(x))dx \quad (29) 1 - 5 - \int$$

$$\int 3f(x) - g(x)dx = 3\int -1 - 5f(x)dx - \int -1 - 5g(x)dx = 3(-4) - (-11) = 1 - 5 - \int = -1$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$\int (3x^2 - 4x + 1)dx \quad (30) 23 - \int$$

$$\int 3x^2 - 4x + 1)dx = (x^3 - 2x^2 + x)|_{-2}^3 = ((3)^3 - 2(3)^2 + 3) - ((-2)^3 - 2(-2)^2 + (-2)) = 30$$

$$\int (13x^3 + 2x^2)dx \quad (31) \int$$

$$\int 13x^3 + 2x^2)dx = \int 13(x^3 + 2x^2)dx = \int 13(x^2 + 2x)dx = (13x^3 + x^2)|_{13} = (\int 13(3)^3 + (3)^2) - (13(1)^3 + (1)^2) = 503$$

$$\int (x)|dx \quad (32) -3|15 \int$$

أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة:

$$|x| = \begin{cases} 3-x, & x < 3 \\ x-3, & x \geq 3 \end{cases}$$

بما أن الاقتران تشعب عند 3، فإنني أجزئ التكامل عنده:

$$\int (x)|dx = \int 13(3-x)dx + \int 35(x-3)dx = (3x - 12x^2)|_{13} + (12x^2 - 3x)|_{3-3}|15 \int 5 = (3(3) - 12(3)^2) - (3(1) - 12(1)^2) + (12(5)^2 - 3(5)) - (12(3)^2 - 3(3)) = 4$$

$$\int (1420x)dx \quad (33) \int$$

$$\int 1420x)dx = \int 1420x - 12dx = 40x|_{14} = 40x|_{14} = 404 - 401 = 40 \int$$

$$\int (253x(x+2))dx \quad (34) \int$$

$$\int_2^5 3x(x+2)dx = \int_2^5 (3x^2 + 6x)dx = (x^3 + 3x^2)|_2^5 = ((5)^3 + 3(5)^2) - ((2)^3 + 3(2)^2) = 180$$

$$\int_2^3 2xe^{-x^2}dx \quad (35)$$

$$2 \int_2^3 2xe^{-x^2}dx = \int_2^3 -4e^{-x^2}dx = \int_2^3 -4e^{-u} \times du = -4e^{-u}|_2^3 = -4e^{-9} + 4e^{-4} = -4e^{-9} + 4e^{-4}$$

$$\int_0^2 3x^2(x^3+1)^5dx \quad (36)$$

$$\int_0^2 3x^2(x^3+1)^5dx = \int_1^9 3x^2u^5 \times du = \int_1^9 3u^5 du = \frac{3}{6}u^6|_1^9 = \frac{1}{2}(9^6 - 1^6) = \frac{1}{2}(531441 - 1) = 265720$$

$$\int_1^2 16xx^2+1dx \quad (37)$$

$$\int_1^2 16xx^2+1dx = \int_1^2 13(2x)x^2+1dx = 3 \int_1^2 12xx^2+1dx = 3 \ln|2x^3+1|_1^2 = 3 \ln|2^3+1| - 3 \ln|2^3+1| = 3 \ln|9| - 3 \ln|5|$$

(38) إذا كان:  $f(x) = \begin{cases} x^2+4, & x < 0 \\ 4-x, & x \geq 0 \end{cases}$ , فأجد قيمة:  $\int_{-2}^1 f(x)dx$ .

بما أن الاقتران تشعب عند 0، فإنني أجزئ التكامل عنده:

$$\int_{-2}^1 f(x)dx = \int_{-2}^0 (x^2+4)dx + \int_0^1 (4-x)dx = (\frac{1}{3}x^3+4x)|_{-2}^0 + (4x-\frac{1}{2}x^2)|_0^1 = (0 - (-\frac{8}{3}-8)) + (4 - \frac{1}{2}) - (0) = \frac{8}{3} + 8 + \frac{7}{2} = \frac{16}{6} + \frac{48}{6} + \frac{21}{6} = \frac{85}{6}$$

(39) يتحرك جسم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة

بالاقتران:  $v(t) = 5 + e^t - 2$ ، حيث  $t$  الزمن بالثواني، و  $v$  سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية، إذا الجسم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوان من بدء الحركة.

$$v(t) = 5 + e^t - 2 \quad s(t) = \int (5 + e^t - 2)dt = 5t + e^t - 2t + C = 3t + e^t + C$$

بما أن الجسم بدأ حركته من نقطة الأصل، إذن  $s(0) = 0$ :

$$s(0) = 5(0) + e^0 - 2(0) + C = e - 2 + C = 0 \Rightarrow C = -e + 2 \Rightarrow s(t) = 3t + e^t - e + 2$$

موقع الجسم بعد 3 ثوان من الحركة هو:

$$s(3)=5(3)+e^{3-2}-1e^2=15+e-1e^2$$

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران  $f(x)$ ، ونقطة يمر بها منحنى  $y=f(x)$ .  
أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران  $f(x)$ :

$$(f'(x)=3x^2+6x-2; (0,6) \quad (40)$$

$$f(x)=\int(3x^2+6x-2)dx=x^3+3x^2-2x+C$$

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة  $(0,6)$  إذن:

$$6=C=f(0)=0^3+3(0)^2-2(0)+C=6$$

$$(f'(x)=20x^2; (1,400) \quad (41)$$

$$f(x)=\int 20x^2 dx = \int 20x - 2 dx = -20x - 1 + C = -20x + C$$

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة  $(1,400)$  إذن:

$$400=C=f(1)=-20(1)+C \Rightarrow C=420$$

$$(f'(x)=2x+1x^2; (1,1) \quad (42)$$

$$f(x)=\int(2x+1x^2)dx=x^2+\frac{1}{3}x^3+C$$

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة  $(1,1)$  إذن:

$$1=f(1)=1^2+\frac{1}{3}(1)^3+C \Rightarrow C=-\frac{4}{3}$$

$$(f'(x)=5e^x-4; (0,-1) \quad (43)$$

$$f(x)=\int(5e^x-4)dx=5e^x-4x+C$$

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة  $(0,-1)$  إذن:

$$-1=f(0)=5e^0-4(0)+C \Rightarrow C=-6$$

$$(f'(x)=xx^2+5; (2,10) \quad (44)$$

$$f(x)=\int xx^2+5 dx \quad u=x^2+5 \Rightarrow du=2x dx \Rightarrow dx=\frac{du}{2x} \quad \int xx^2+5 dx = \int xu \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int xu du$$



$$x = \int 12u^{1/2} du = 13u^{3/2} + C = 13(x^2 + 5)^{3/2} + C$$

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (2, 10) إذن:

$$10 = 13(2^2 + 5)^{3/2} + C \Rightarrow C = 10 - 13(2^2 + 5)^{3/2}$$

(45) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:  $f(x) = x^2 - x - 2$  والمحور  $x$ ، والمستقيمين:  $x = 1, x = -2$

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 2$$

نختار عدداً ضمن الفترة  $[-2, 1]$ ، وليكن  $-1.5$  ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(-1.5) = (-1.5 + 1)(-1.5 - 2) = 1.75 > 0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور  $x$  في الفترة  $[-2, -1]$

نختار عدداً ضمن الفترة  $[-1, 1]$ ، وليكن  $0$  ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(0) = (0 + 1)(0 - 2) = -2 < 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور  $x$  في الفترة  $[-1, 1]$

العدد 2 خارج الفترة المطلوبة بالسؤال، إذن نهمله

$$A = \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2) dx - \int_{-1}^1 (x^2 - x - 2) dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2) dx + \int_{-1}^1 (-x^2 + x + 2) dx = (13x^3 - 12x^2 - 2x) \Big|_{-2}^{-1} + (-13x^3 + 12x^2 + 2x) \Big|_{-1}^1 = (-13 - 12 + 2) - (-83 - 2 + 4) + (-13 + 12 + 2) - (13 + 12 - 2) = 316$$

إذن، المساحة هي: 316 وحدة مربعة.

(46) طب: يمثل الاقتران  $C(t)$  تركيز دواء في الدم بعد  $t$  ساعة من حقنه في جسم مريض، حيث  $C$  مقيسة بالمليغرام لكل سنتيمتر مكعب ( $mg/cm^3$ ). إذا كان تركيز الدواء في دم المريض يتغير بمعدل  $C'(t) = 3t(t^2 + 36)^3$ ، فأجد مقدار التغير في تركيز الدواء بالدم خلال الساعات الثماني الأولى التي تلت حقنه في جسم المريض.

أولاً نجد قاعدة الاقتران:

$$C(t) = \int 3t(t^2 + 36)^3 dt \quad u = t^2 + 36 \Rightarrow du/dt = 2t \Rightarrow dt = du/2t$$

$$C(t) = \int 3t(t^2 + 36)^3 dt = \int 3tu^3 \times du/2t = \int 3/2 u^3 du = 3/2 \times u^4/4 = 3/8 u^4 + K = 3/8 (t^2 + 36)^4 + K$$

بما أن مقدار تركيز الدواء في الدم في البداية هي 0 مليغرام، إذن  $C(0) = 0$  ومنه:

$$C(t) = -3t^2 + 36 + K \quad C(0) = -3(0)^2 + 36 + K = 0 \Rightarrow K = -36$$

$$C(t) = -3t^2 + 36 - 36 = -3t^2$$

$$2C(8) = 2(-3(8)^2) = -384$$

مقدار التغير في تركيز الدواء في الجسم خلال الساعات الثماني الأولى من حقنه هو  $0.8 \text{ mg/cm}^2$

(47) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران  $f(x) = 3x^2 - 3x$  والمحور  $x$ .

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3x = 0 \Rightarrow 3x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عدداً ضمن الفترة  $[0, 1]$ ، وليكن 12 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(0) = 3(0)^2 - 3(0) = 0 < 0$$

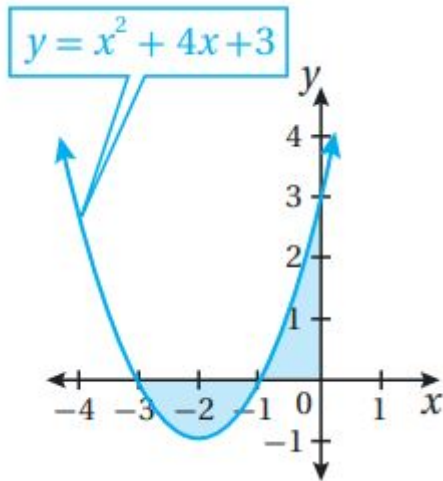
بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور  $x$  في الفترة  $[0, 1]$

$$A = - \int_0^1 (3x^2 - 3x) dx = \int_0^1 (-3x^2 + 3x) dx = (-x^3 + 3/2 x^2) \Big|_0^1 = (-(1)^3 + 3/2(1)^2) - (-(0)^3 + 3/2(0)^2) = 12$$

إذن، المساحة هي: 12 وحدة مربعة.

أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلات البيانية الآتية:

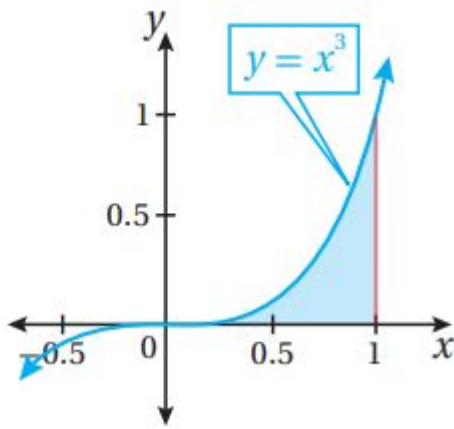
48



$$A = -\int_{-3}^{-1} (x^2 + 4x + 3) dx + \int_{-1}^{1} (x^2 + 4x + 3) dx = \int_{-3}^{-1} (-x^2 - 4x - 3) dx + \int_{-1}^{1} (x^2 + 4x + 3) dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x\right) \Big|_{-3}^{-1} + \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x\right) \Big|_{-1}^{1} = (13 - 2 + 3) - (9 - 18 + 9) + (0) - (-13 + 2 - 3) = 83$$

إذن، المساحة هي: 83 وحدة مربعة.

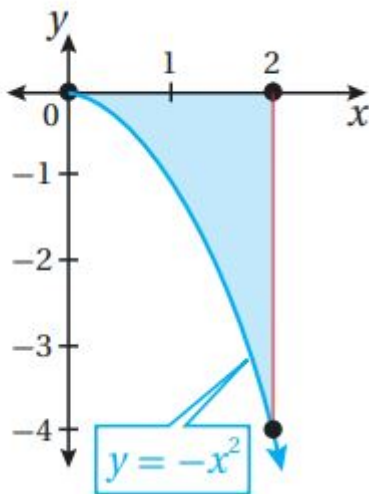
49



$$A = \int_0^1 x^3 dx = \left(\frac{1}{4}x^4\right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{4}(1)^4\right) - \left(\frac{1}{4}(0)^4\right) = \frac{1}{4}$$

إذن، المساحة هي: 14 وحدة مربعة.

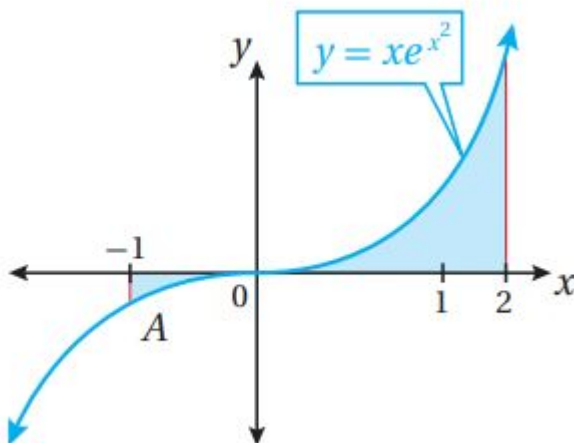
50



$$A = -\int_0^2 -x^2 dx = \int_0^2 x^2 dx = \left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2 = \left(\frac{1}{3}(2)^3\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3\right) = \frac{8}{3}$$

إذن، المساحة هي:  $\frac{8}{3}$  وحدة مربعة.

51



$$A = -\int_{-1}^0 x e^{x^2} dx + \int_0^2 x e^{x^2} dx = \int_{-1}^0 -x e^{x^2} dx + \int_0^2 x e^{x^2} dx$$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow dt = \frac{du}{2} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow u = 0 \quad x = -1 \Rightarrow u = 1 \quad x = 2 \Rightarrow u = 4$$

$$A = \int_1^0 -\frac{1}{2} e^u du + \int_0^4 \frac{1}{2} e^u du = \left(-\frac{1}{2} e^u\right)\Big|_1^0 + \left(\frac{1}{2} e^u\right)\Big|_0^4 = \left(-\frac{1}{2} e^0\right) - \left(-\frac{1}{2} e^1\right) + \left(\frac{1}{2} e^4\right) - \left(\frac{1}{2} e^0\right) = -1 + \frac{1}{2} e + \frac{1}{2} e^4$$

إذن، المساحة هي:  $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e + \frac{1}{2} e^4$  وحدة مربعة.